

Площадь многоугольника

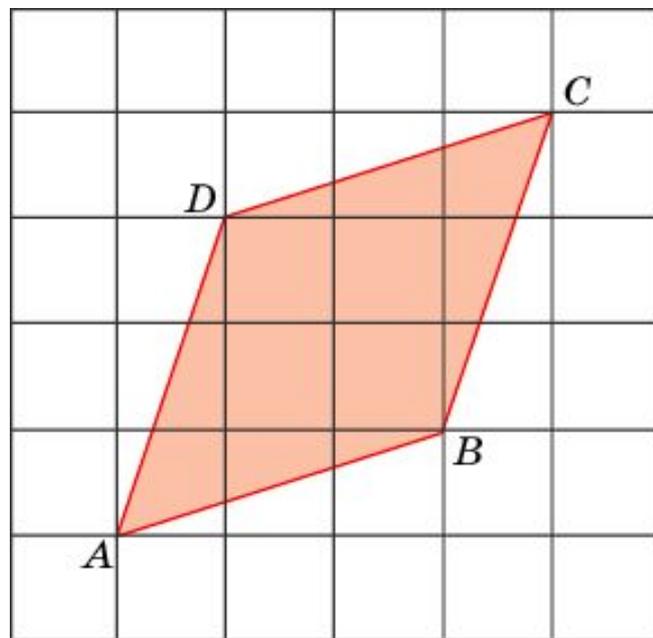
Площадь произвольного многоугольника можно находить, разбивая его на треугольники. При этом площадь многоугольника будет равна сумме площадей этих треугольников.

Теорема. Площадь многоугольника, описанного около окружности, равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности.

Следствие. Площадь правильного n -угольника выражается формулой
$$S = \frac{1}{2} n \cdot a \cdot r,$$
 где a — сторона n -угольника, r — радиус вписанной окружности.

Упражнение 1

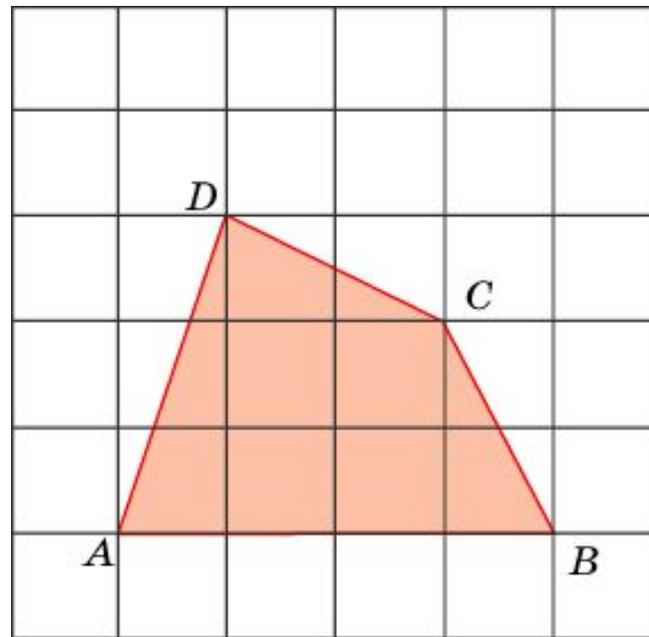
Найдите площадь ромба, изображенного на клетчатой бумаге, клетками которой являются единичные квадраты.



Ответ: 8.

Упражнение 2

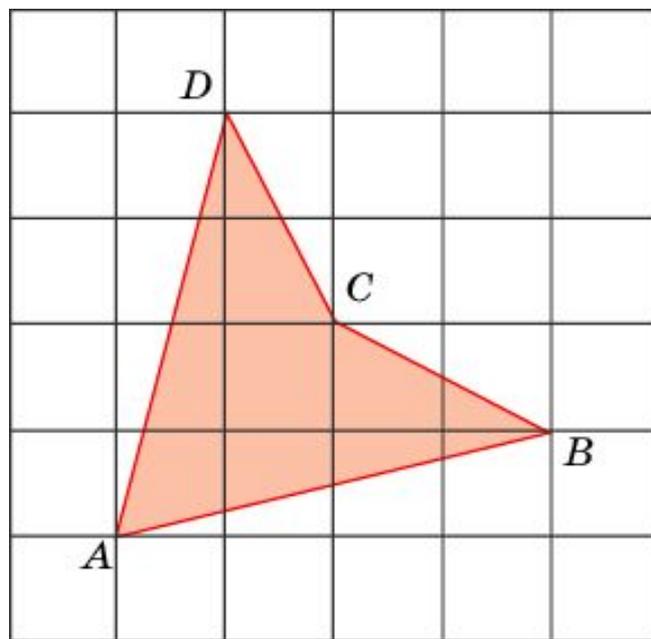
Найдите площадь многоугольника, изображенного на клетчатой бумаге, клетками которой являются единичные квадраты.



Ответ: 7,5.

Упражнение 3

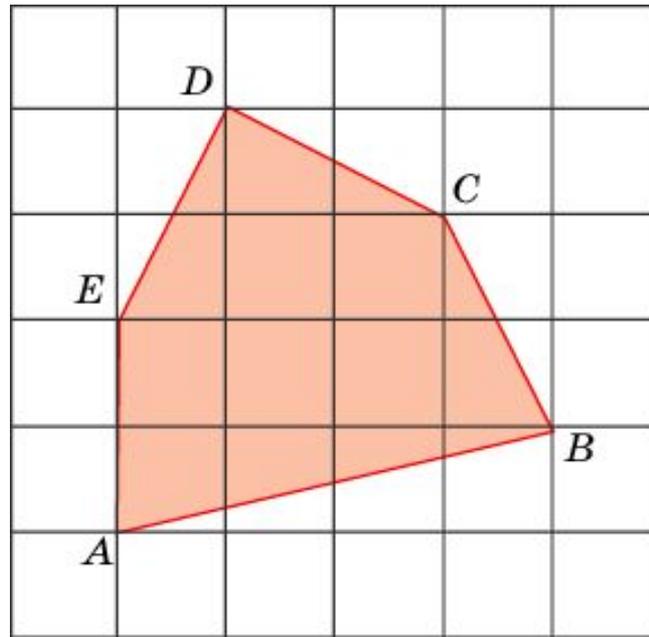
Найдите площадь многоугольника, изображенного на клетчатой бумаге, клетками которой являются единичные квадраты.



Ответ: 6.

Упражнение 4

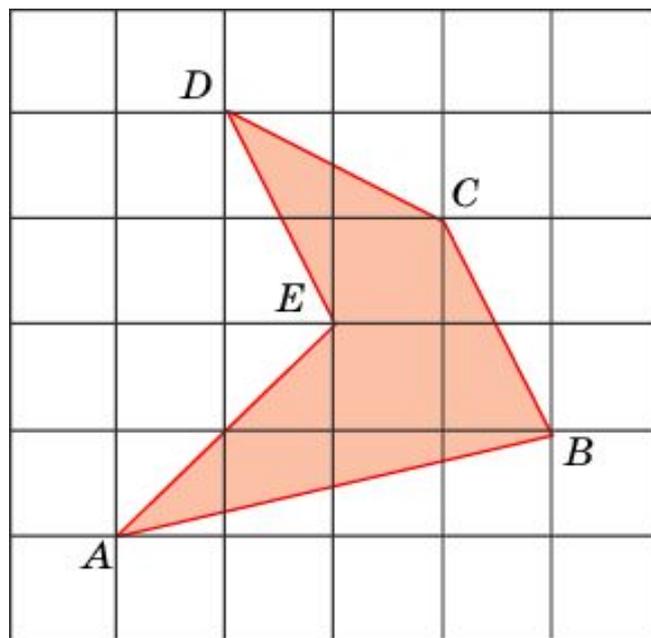
Найдите площадь многоугольника, изображенного на клетчатой бумаге, клетками которой являются единичные квадраты.



Ответ: 10.

Упражнение 5

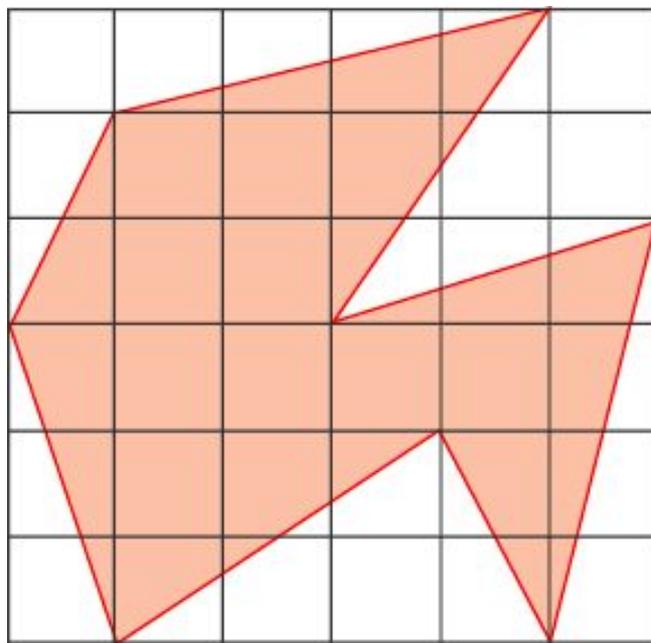
Найдите площадь многоугольника, изображенного на клетчатой бумаге, клетками которой являются единичные квадраты.



Ответ: 6.

Упражнение 6

Найдите площадь многоугольника, изображенного на клетчатой бумаге, клетками которой являются единичные квадраты.



Ответ: 20.

Упражнение 7

Диагонали четырехугольника перпендикулярны и равны 4 см и 5 см. Найдите площадь этого четырехугольника.

Ответ: 10 см^2 .

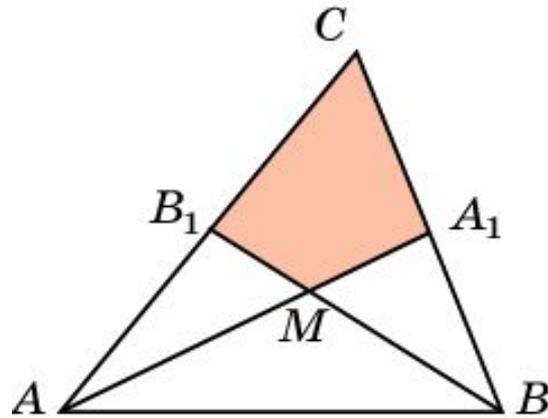
Упражнение 8

Периметр четырехугольника равен 100 м. Может ли его площадь быть меньше одного квадратного метра, если этот четырехугольник: а) параллелограмм; б) прямоугольник; в) ромб; г) квадрат; д) трапеция?

Ответ: а) Да;
б) да;
в) да;
г) нет;
д) да.

Упражнение 9

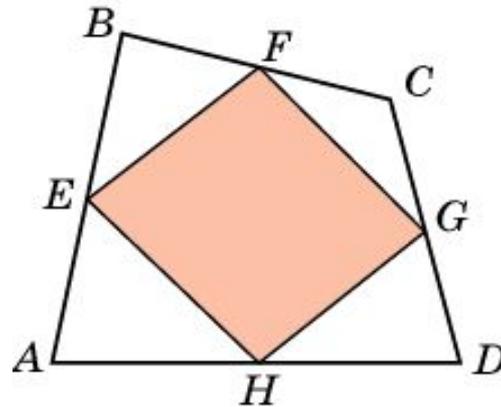
Медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Найдите площадь четырехугольника CA_1MB_1 , если площадь данного треугольника равна 12.



Ответ: 4.

Упражнение 10

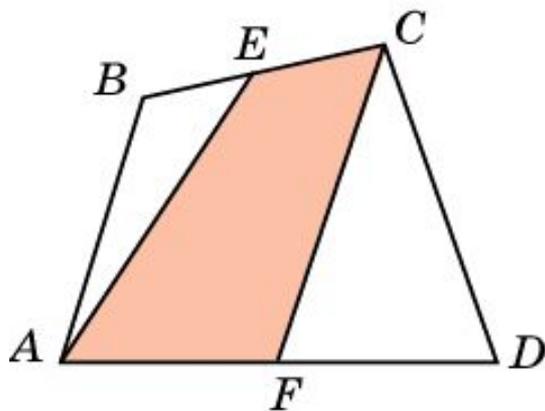
Средины сторон выпуклого четырехугольника последовательно соединены между собой. Найдите площадь получившегося четырехугольника, если площадь данного четырехугольника равна 16.



Ответ: 8.

Упражнение 11

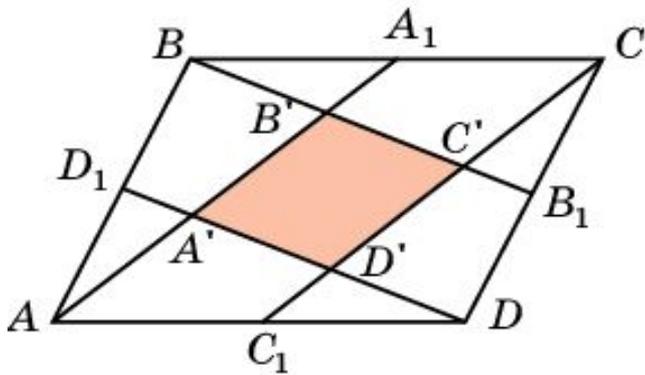
Вершины A и C выпуклого четырехугольника $ABCD$ соединены отрезками с серединами E и F сторон соответственно BC и AD . Найдите площадь четырехугольника $AECF$, если площадь данного четырехугольника равна 12.



Ответ: 6.

Упражнение 12

Вершины A, B, C, D параллелограмма соединены отрезками с серединами его сторон соответственно BC, CD, DA, AB . Найдите площадь четырехугольника, ограниченного этими отрезками, если площадь данного четырехугольника равна 15.

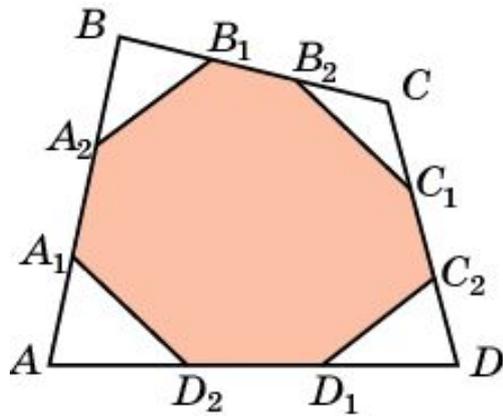


Решение. Искомым четырехугольником является параллелограмм $A'B'C'D'$. Его площадь равна четырем площадям треугольника $AA'D_1$. Площадь треугольника ADD_1 равна одной четвертой площади параллелограмма.

Площадь треугольника $AA'D_1$ равна одной пятой площади треугольника ADD_1 и равна одной двадцатой площади параллелограмма. Следовательно, площадь параллелограмма $A'B'C'D'$ равна 3.

Упражнение 13

Стороны выпуклого четырехугольника $ABCD$ разделены каждая на три равные части соответственно точками $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2$. Найдите площадь восьмиугольника $A_1A_2B_1B_2C_1C_2D_1D_2$, если площадь данного четырехугольника равна 18.

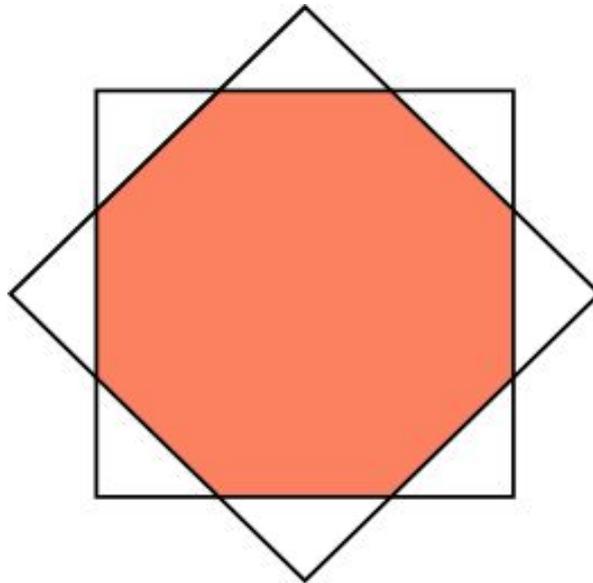


Решение. Сумма площадей треугольников AA_1D_2 и CC_1B_2 равна сумме площадей треугольников BB_1A_2 и DD_1C_2 и равна одной девятой площади данного четырехугольника.

Следовательно, площадь восьмиугольника равна семи девятым площади четырехугольника и равна 14.

Упражнение 14

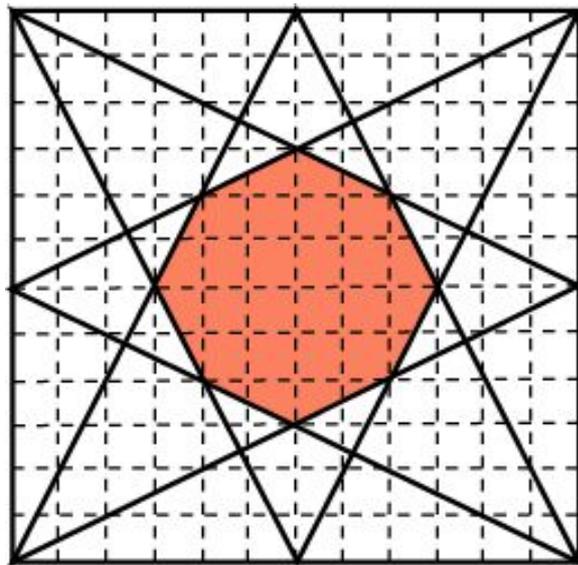
Квадрат со стороной a повернут вокруг центра симметрии на угол 45° . Найдите площадь фигуры, которая является общей частью (пересечением) квадратов.



Ответ: $2a^2(\sqrt{2}-1)$.

Упражнение 15

Вершины квадрата соединены с серединами его сторон, как показано на рисунке. Найдите площадь закрашенного восьмиугольника, если , стороны квадрата равны 12.



Ответ: 24.

Упражнение 16

Около окружности, радиуса 2 см, описан многоугольник, периметра 4 см. Найдите его площадь.

Ответ: 4 см^2 .

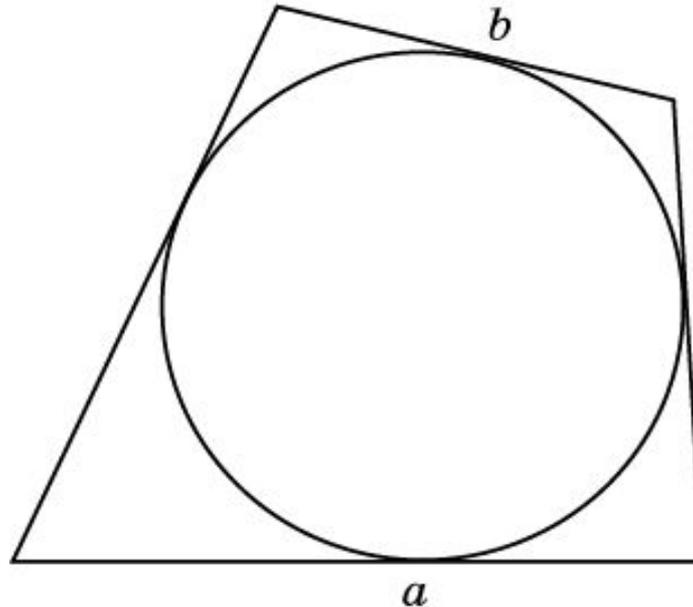
Упражнение 17

Площадь многоугольника, описанного около окружности радиуса 3 см, равна 6 см^2 . Найдите периметр многоугольника.

Ответ: 4 см.

Упражнение 18

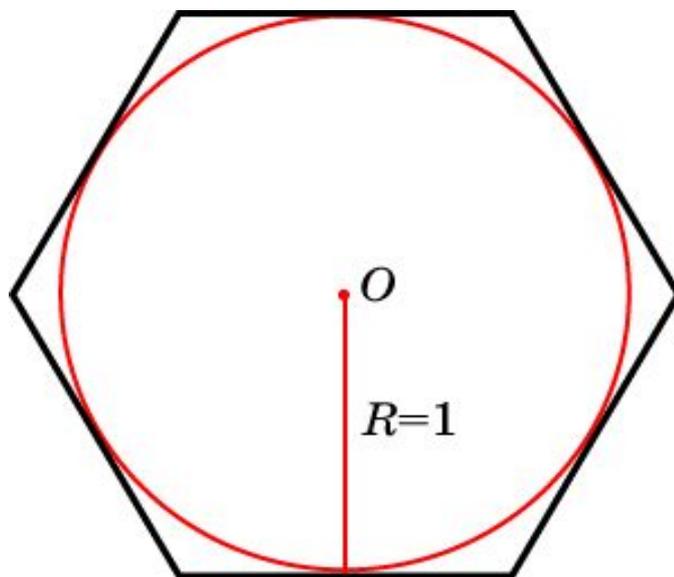
Около окружности описан четырехугольник. Найдите площадь четырехугольника, если две его противоположные стороны равны a и b , радиус окружности равен R .



Ответ: $(a + b)R$.

Упражнение 19

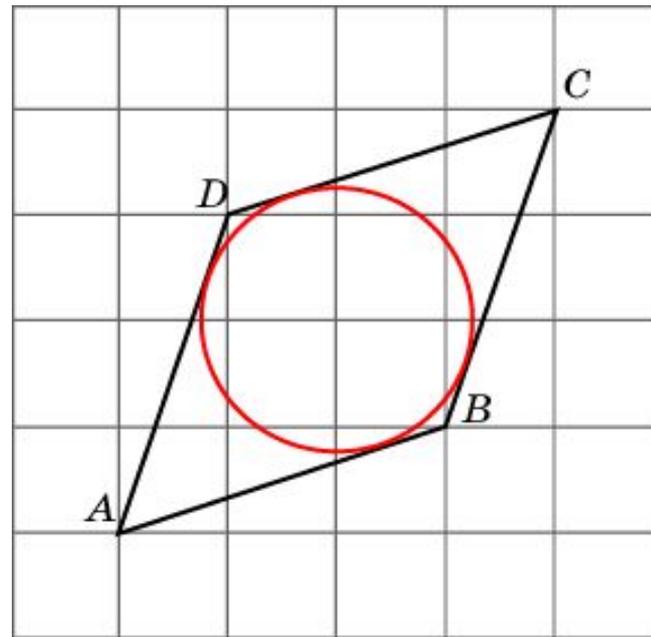
Найдите площадь правильного шестиугольника, описанного около окружности, радиуса 1 см.



Ответ: $2\sqrt{3}$ см².

Упражнение 20

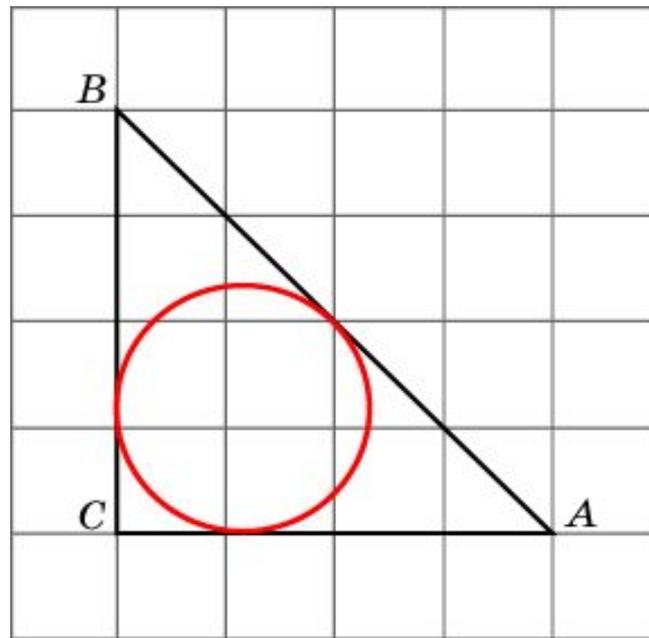
Используя понятие площади, найдите радиус окружности, вписанной в ромб, изображенный на клетчатой бумаге, клетками которой являются единичные квадраты.



Ответ: $\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

Упражнение 21

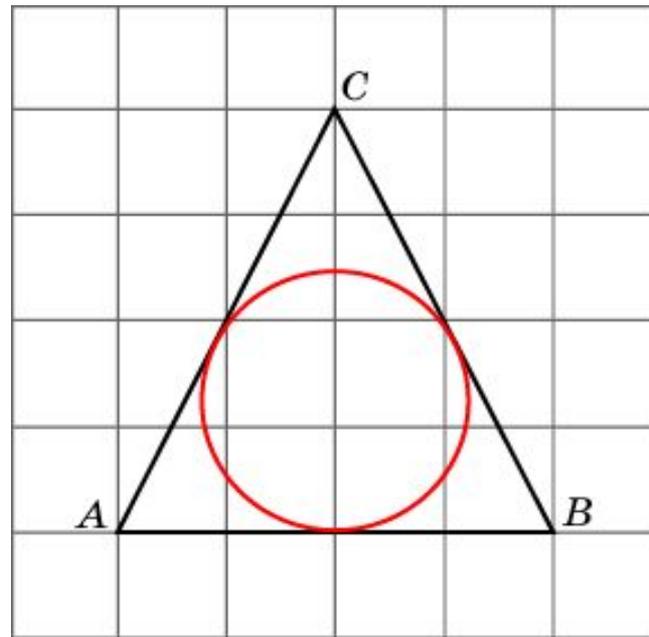
Используя понятие площади, найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, изображенный на клетчатой бумаге, клетками которой являются единичные квадраты.



Ответ: $4 - 2\sqrt{2}$.

Упражнение 22

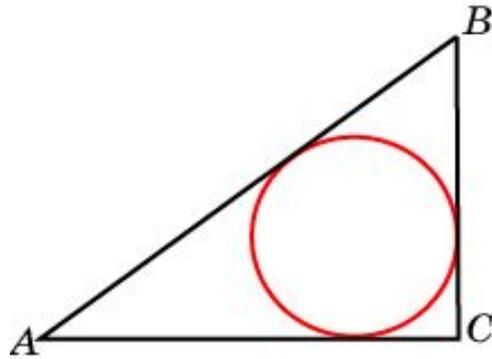
Используя понятие площади, найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, изображенный на клетчатой бумаге, клетками которой являются единичные квадраты.



Ответ: $\sqrt{5} - 1$.

Упражнение 23

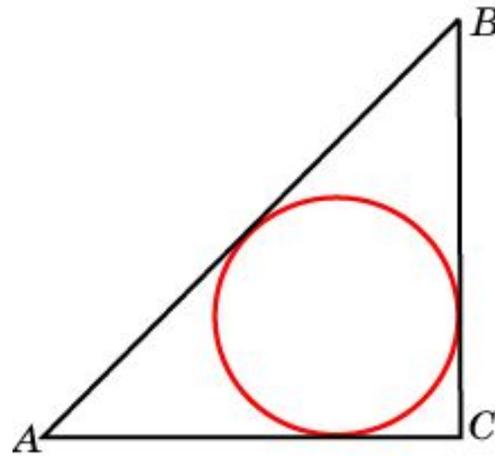
В треугольнике ABC $AC = 4$, $BC = 3$, угол C равен 90° . Используя понятие площади, найдите радиус вписанной окружности.



Ответ: 1.

Упражнение 24

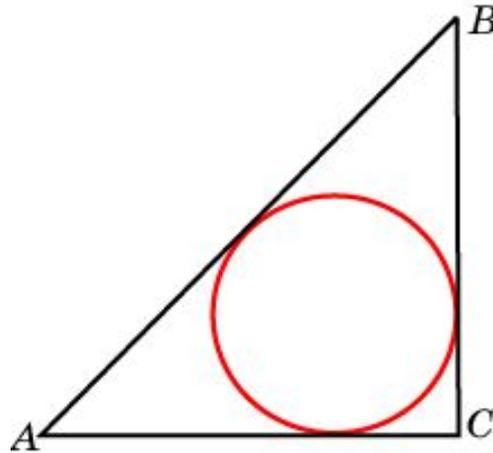
Катеты равнобедренного прямоугольного треугольника равны 1. Используя понятие площади, найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.



Ответ: $\frac{2 - \sqrt{2}}{2}$.

Упражнение 25

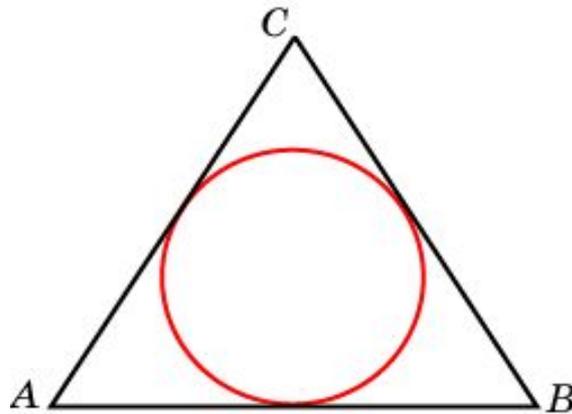
Радиус окружности, вписанной в равнобедренный прямоугольный треугольник, равен 1. Используя понятие площади, найдите гипотенузу этого треугольника.



Ответ: $2 + 2\sqrt{2}$.

Упражнение 26

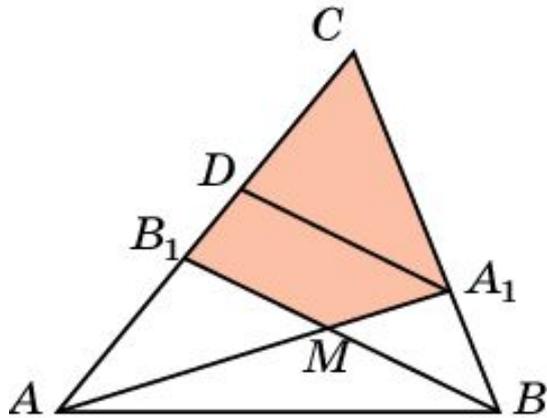
Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 5, основание равно 6. Используя понятие площади, найдите радиус вписанной окружности.



Ответ: 1,5.

Упражнение 27*

Точки A_1 и B_1 делят стороны BC и AC треугольника ABC в отношениях соответственно $1:2$ и $2:3$. Найдите площадь четырехугольника CA_1MB_1 , если площадь данного треугольника равна 15 .



Решение. Проведем отрезок A_1D , параллельный прямой BB_1 .

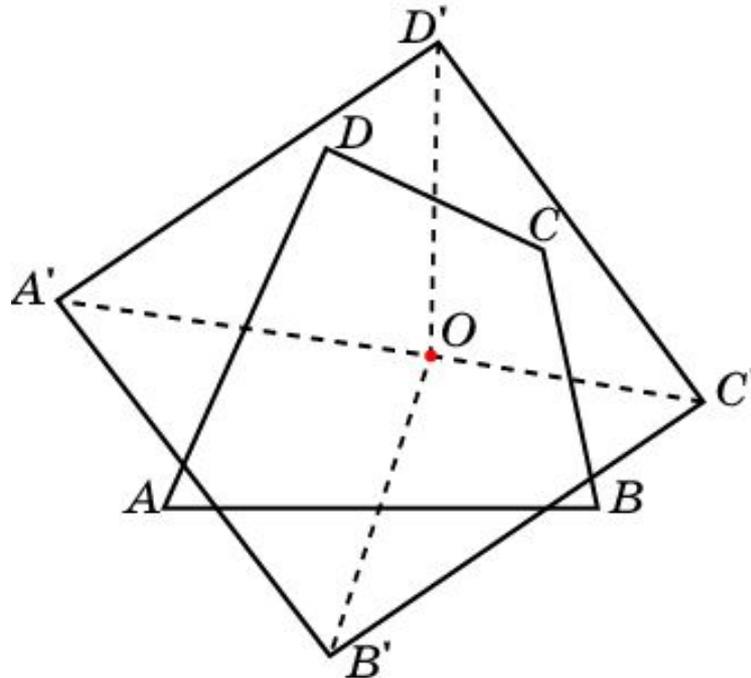
По теореме о пропорциональных отрезках $B_1D:DC = 1:2$, следовательно, $AM:MA_1 = 2:1$.

Площадь треугольника ABB_1 равна две пятых площади треугольника ABC . Площадь треугольника BA_1M равна одной третьей площади треугольника ABA_1 .

Площадь четырехугольника CA_1MB_1 равна $15(1 - \frac{2}{5} - \frac{2}{15}) = 7$.

Упражнение 28*

Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$, площади S , взята точка O . Найдите площадь четырехугольника $A'B'C'D'$, вершинами которого являются точки, симметричные выбранной точке относительно середин сторон данного четырехугольника.



Ответ: $2S$.

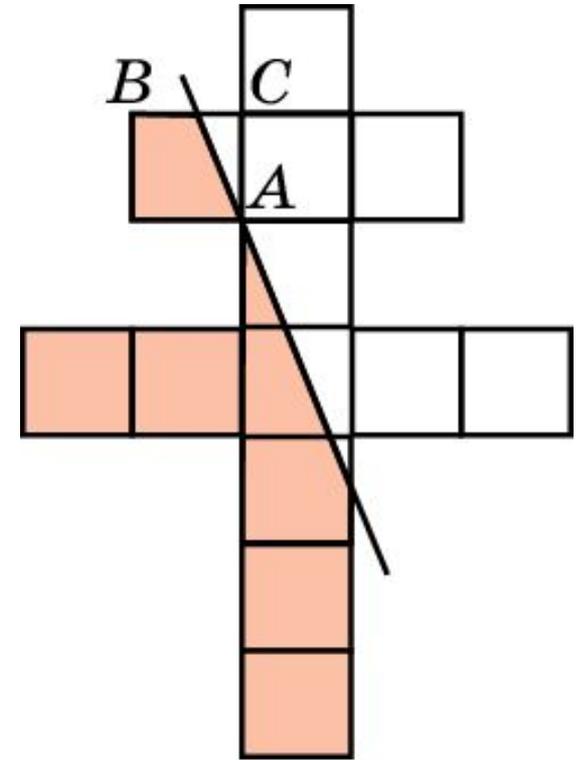
Упражнение 29*

Каждая диагональ выпуклого пятиугольника отсекает от него треугольник, площадь которого равна 1. Найдите площадь пятиугольника.

Ответ: $\frac{5 + \sqrt{5}}{2}$.

Упражнение 30*

На рисунке изображен лотарингский крест, служивший эмблемой "Свободной Франции" (организации, которую в годы Второй мировой войны возглавлял генерал де Голль). Он составлен из тринадцати единичных квадратов. В каком отношении делит отрезок BC прямая, проходящая через точку A и делящая площадь лотарингского креста на две равные части?



Ответ: В золотом отношении.