

Матрицы

Метод Гаусса
Формулы Крамера

Матрица

Определение

Прямоугольная таблица из m , n чисел, содержащая m – строк и n – столбцов, вида:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется **матрицей размера $m \times n$**

Числа, из которых составлена матрица, называются *элементами матрицы*.

Положение элемента a_{ij} в матрице характеризуется двойным индексом:

первый i – номер строки;

второй j – номер столбца, на пересечении которых стоит элемент.

Сокращенно матрицы обозначают заглавными буквами: $A, B, C \dots$

$$A = (a_{ij}); \quad (i = 1, m; \quad j = 1, n)$$

Коротко можно записывать так:

Метод Гаусса

Метод Гаусса — метод последовательного исключения переменных, когда с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида, из которого последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

Система m линейных уравнений с n неизвестными имеет вид:

[illegible]

$x_1, x_2, \dots, x_n$ – неизвестные.

a_{ij} - коэффициенты при неизвестных.

b_i - свободные члены (или правые части)

Типы уравнений

Система линейных уравнений называется *совместной*, если она имеет решение, и *несовместной*, если она не имеет решения.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение и *неопределенной*, если она имеет бесчисленное множество решений.

Две совместные системы называются *равносильными*, если они имеют одно и то же множество решений.

Элементарные преобразования

К элементарным преобразованиям системы отнесем следующее:

1. перемена местами двух любых уравнений;
2. умножение обеих частей любого из уравнений на произвольное число, отличное от нуля;
3. прибавление к обеим частям одного из уравнений системы соответствующих частей другого уравнения, умноженных на любое действительное число.

Общий случай

Для простоты рассмотрим метод Гаусса для системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными в случае, когда существует единственное решение:

Дана система:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1)$$

1-ый шаг метода Гаусса

На первом шаге исключим неизвестное x_1 из всех уравнений системы (1), кроме первого. Пусть коэффициент a_{11} — ведущим элементом. Назовем его ведущим элементом.

Разделим первое уравнение системы (1) на a_{11} . Получим уравнение:

где $a_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}$; $j = 1, 2, 3$; $b_1^{(1)} = \frac{b_1}{a_{11}}$

Исключим x_1 из второго и третьего уравнений системы (1). Для этого вычтем из них уравнение (2), умноженное на коэффициент при x_1 (соответственно a_{21} и a_{31}).

$$x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = b_1^{(1)} \quad (2)$$

Система примет вид:

Верхний индекс (1) указывает, что речь идет о коэффициентах первой преобразованной системы

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = b_2^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = b_3^{(1)} \end{cases} \quad (3)$$

2-ой шаг метода Гаусса

На втором шаге исключим неизвестное x_2 из третьего уравнения системы (3) из третьего уравнения системы (3). Пусть коэффициент $a_{23}^{(1)}$ за ведущий элемент и разделим на него второе уравнение системы (3), получим уравнение:

$$x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 = b_2^{(2)} \quad (4)$$

$$a_{23}^{(2)} = \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}; \quad b_2^{(2)} = \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$$

где

Из третьего уравнения системы (3) вычтем уравнение (4), умноженное на $a_{33}^{(1)}$.

Получим уравнение:

$$a_{33}^{(2)} x_3 = b_3^{(2)} \quad \text{где} \quad a_{33}^{(2)} = \frac{a_{33}^{(1)} - a_{23}^{(1)} a_{23}^{(2)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad b_3^{(2)} = \frac{b_3^{(1)} - a_{23}^{(1)} b_2^{(2)}}{a_{22}^{(1)}}$$

Предполагая, что

находим

$$x_3 = \frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} = b_3^{(3)}$$

В результате преобразований система приняла вид:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 = b_1^{(1)} \\ x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 = b_2^{(2)} \\ x_3 = b_3^{(3)} \end{cases} \quad (5)$$

Система вида (5) называется **треугольной**.

Процесс приведения системы (1) к треугольному виду (5) (шаги 1 и 2) называют **прямым ходом метода Гаусса**.

Нахождение неизвестных из треугольной системы называют **обратным ходом метода Гаусса**.

Для этого найденное значение x_3 подставляют во второе уравнение системы (5) и находят x_2 . Затем x_2 и x_3 подставляют в первое уравнение и находят x_1 .

Если в ходе преобразований системы получается противоречивое уравнение вида $0 = b$, где $b \neq 0$, то это означает, что система несовместна и решений не имеет.

В случае совместной системы после преобразований по методу Гаусса, составляющих прямой ход метода, система m линейных уравнений с n неизвестными будет приведена или к *треугольному* или к *ступенчатому* виду.

Треугольная система имеет вид:

Такая система имеет единственное решение, которое находится в

результате проведения обратного хода метода Гаусса.

Ступенчатая система имеет вид:

Такая система имеет бесчисленное множество решений.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = d_1 \\ x_2 + \dots + a_{2n}x_n = d_2 \\ \dots\dots\dots \\ x_n = d_n \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = d_1 \\ x_2 + \dots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \dots\dots\dots \\ x_k + \dots + c_{kn}x_n = d_k \end{array} \right.$$

Рассмотрим на примере

1. Покажем последовательность решения системы из трех уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16 \\ x_1 + 2,5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 18 \end{cases}$$

2. Поделим первое уравнение на 2, затем вычтем его из второго ($a_{21}=1$, поэтому домножение не требуется) и из третьего, умножив предварительно на $a_{31}=3$

$$\begin{cases} x_1 + 0,5x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_2 + 4x_3 = 16 \\ 4,5x_2 - 5x_3 = -6 \end{cases}$$

3. Поделим второе уравнение полученной системы на 2, а затем вычтем его из третьего, умножив предварительно на 4,5 (коэффициент при x_2)

$$\begin{cases} x_1 + 0,5x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_2 + 2x_3 = 8 \\ -14x_3 = -42 \end{cases}$$

Тогда

$$x_3 = -42 / (-14) = 3;$$

$$x_2 = 8 - 2x_3 = 2$$

$$x_1 = 8 - 0,5x_2 - 2x_3 = 1$$

Метод Крамера

Метод Крамера—способ решения квадратных систем линейных алгебраических уравнений с ненулевым определителем основной матрицы (причём для таких уравнений решение существует и единственно).

Рассмотрим систему линейных уравнений с квадратной матрицей A , т.е. такую, у которой число уравнений совпадает с числом неизвестных:

Теорема. Система

$$\left[\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

Имеет единственное решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы этой системы отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

В этом случае решение можно вычислить по формуле
Крамера

$$x_k = \frac{\det [A_{[1]} | \dots | A_{[k-1]} | \mathcal{B} | A_{[k+1]} | \dots | A_{[n]}]}{\det A} \quad \text{при } k \in \{1, \dots, n\} .$$

Для получения значения x_k в числитель ставится определитель, получающийся из $\det(A)$ заменой его k -го столбца на столбец правых частей

- **Пример. Решить систему уравнений :**

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$$

Решение.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-28}{14} = -2, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{0}{14} = 0$$

Найдите оставшиеся компоненты решения.

- Формулы Крамера не представляют практического значения в случае систем с *числовыми* коэффициентами: вычислять по ним решения конкретных систем линейных уравнений неэффективно, поскольку они требуют вычисления $(n+1)$ -го определителя порядка n , в то время как метод Гаусса фактически эквивалентен вычислению одного определителя порядка n . Тем не менее, теоретическое значение формул Крамера заключается в том, что они дают **явное** представление решения системы через ее коэффициенты. Например, с их помощью легко может быть доказан результат
- Решение системы линейных уравнений с квадратной матрицей A является непрерывной функцией коэффициентов этой системы при условии, что $\det A \neq 0$.

Найдите оставшиеся компоненты решения.

- Кроме того, формулы Крамера начинают конкурировать по вычислительной эффективности с методом Гаусса в случае систем, зависящих от параметра.
- зависящей от параметра $\lambda \in \mathbb{R}$ определить предел отношения компонент решения:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + \lambda x_4 = 6 \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11, \end{cases}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 8} \frac{x_3}{x_2}.$$

Решение.

- В этом примере определитель матрицы системы равен $-(\lambda - 8)^2$. По теореме Крамера система совместна при $\lambda \neq 8$. Для случая $\lambda \neq 8$ применением метода Гаусса убеждаемся, что система несовместна. Тем не менее, указанный предел существует. Формулы Крамера дают значения компонент решения в виде

$$x_2 = \frac{2(2\lambda - 13)}{\lambda - 8}, \quad x_3 = \frac{3(\lambda - 6)}{\lambda - 8}$$

и, хотя при $\lambda \rightarrow 8$ каждая из них имеет бесконечный предел, их отношение стремится к пределу конечному.

Ответ.

Приведенный пример поясняет также каким образом система линейных уравнений, непрерывно зависящая от параметра, становится несовместной: при стремлении параметра к какому-то критическому значению (обращающему в нуль определитель матрицы системы) хотя бы одна из компонент решения «уходит на бесконечность».

Вывод

Рассмотренный в данной презентации Метод Крамера позволяет решать линейные системы, но удобнее решать системы линейных уравнений с помощью метода Гаусса, который находит широкое применение и содержится в пакетах стандартных программ для ЭВМ.