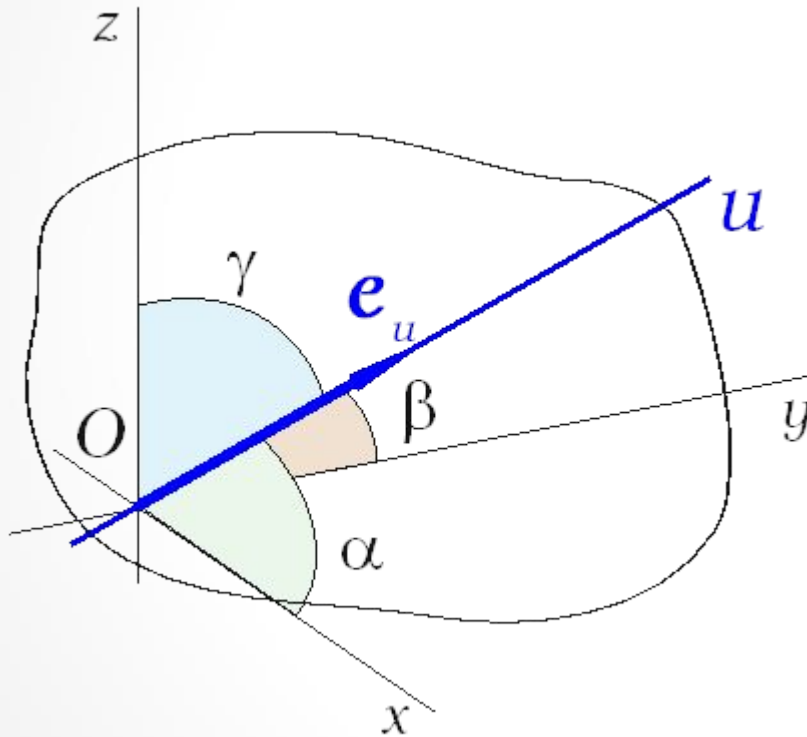


Момент инерции относительно произвольной оси, проходящей через данную точку



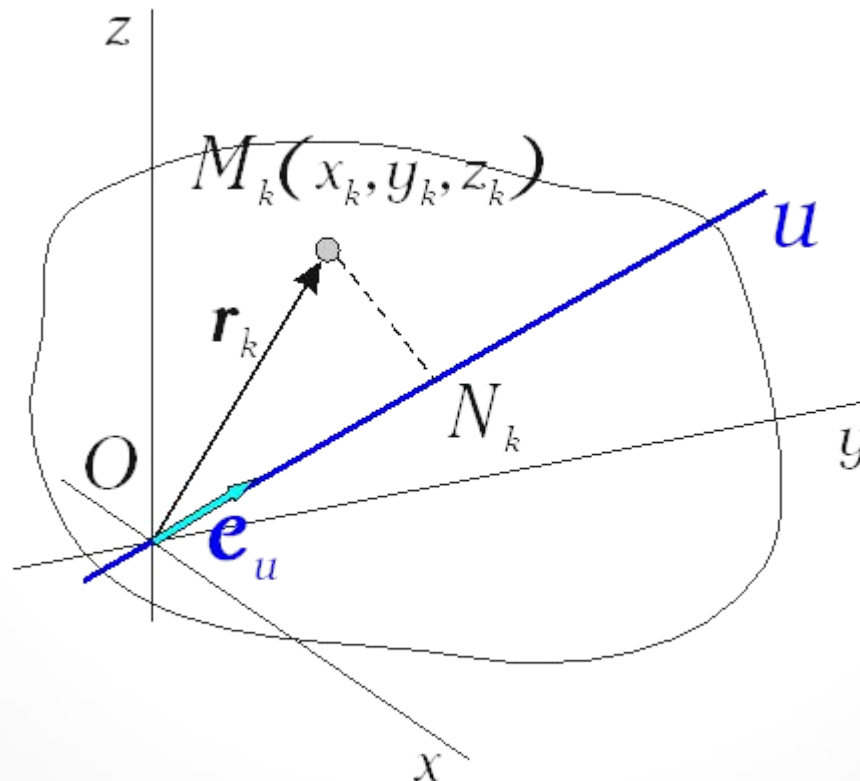
$$\bar{e}_u = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

$$I_u = ?$$

- Момент инерции относительно произвольной оси, проходящей через данную точку

$$\bar{r}_k = (x_k, y_k, z_k)$$

$$ON = n\rho_u \bar{r}_k = \bar{r}_k \cdot \bar{e}_u = x_k \cos \alpha + y_k \cos \beta + z_k \cos \gamma$$



$$I_u = \sum_{k=1}^n m_k M_k N_k^2 = \sum_{k=1}^n m_k (r_k^2 - ON_k^2) =$$

$$= \sum_{k=1}^n m_k \left[(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) \cdot 1 - (x_k \cos \alpha + y_k \cos \beta + z_k \cos \gamma) \right]$$

$$\Downarrow$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$$

$$I_u = \sum_{k=1}^n m_k (y_k^2 + z_k^2) \cos^2 \alpha + \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + z_k^2) \cos^2 \beta + \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2) \cos^2 \gamma -$$

$$- 2 \sum_{k=1}^n m_k x_k y_k \cos \alpha \cos \beta - 2 \sum_{k=1}^n m_k y_k z_k \cos \beta \cos \gamma - 2 \sum_{k=1}^n m_k x_k z_k \cos \alpha \cos \gamma$$

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma -$$

$$- 2I_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2I_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2I_{xz} \cos \alpha \cos \gamma$$

Тензор инерции

$$I_u = I_u \left((I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{yz}, I_{xz}), (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \right)$$

Тензор инерции I –
симметричный тензор
2-го ранга

$$I = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{pmatrix}$$

Исходная система координатных осей $Oxyz$

Новая система координатных осей $Ox'y'z'$

Матрица перехода от исходной системы к новой $A_{3,3}$

Преобразование компонент тензора
инерции

$$I' = A^{-1} I A$$

Главные оси и моменты инерции

Ось Ox называется главной осью инерции, если

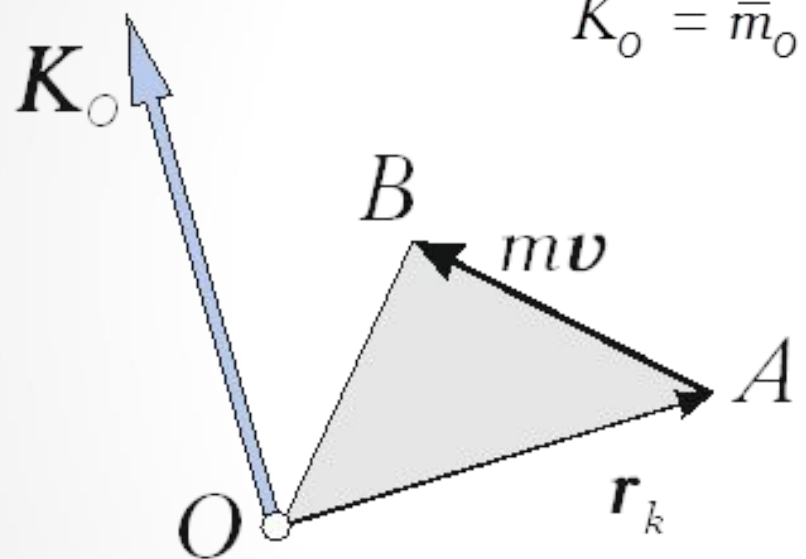
$$I_{xy} = I_{xz} = 0$$

Тензор инерции в главных осях

$$I = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}$$

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma$$

Кинетический момент материальной точки и механической системы



$$\bar{K}_O = \bar{m}_O (m\bar{v}) = \bar{r} \times m\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix}$$

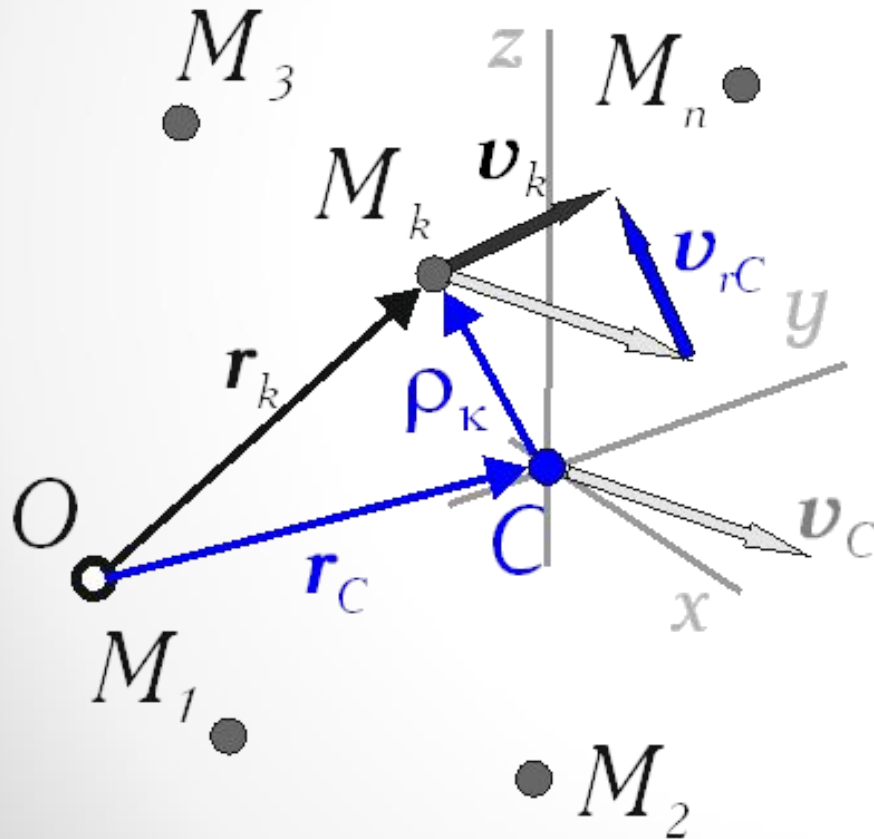
$$\bar{K}_O = \sum_{k=1}^n \bar{K}_{Ok} = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k$$

$$K_x = m_{Ol} (m\vec{v}')$$

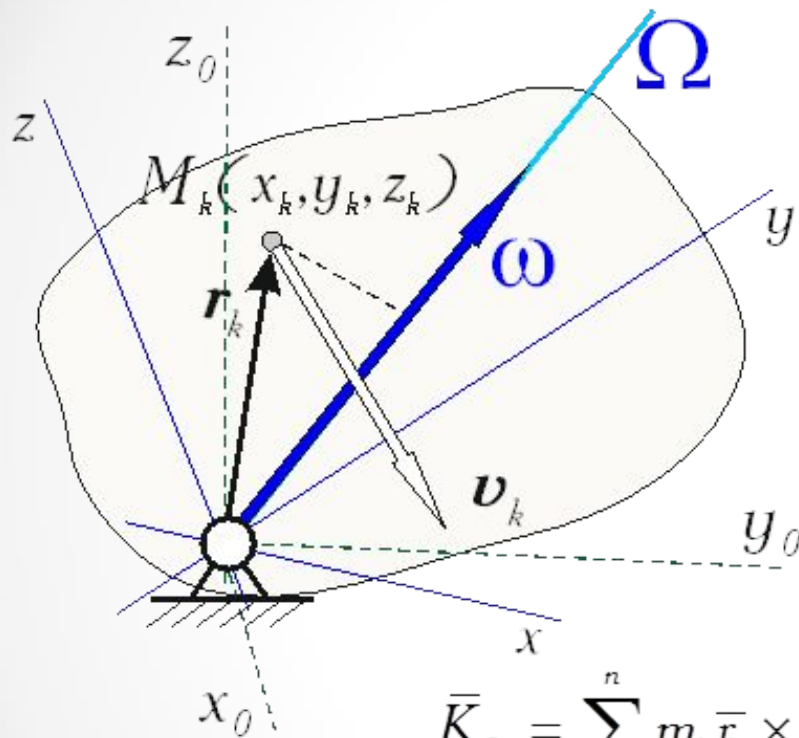
Кинетический момент механической системы

$$\bar{K}_O = \bar{r}_C \times M \bar{v}_C + \bar{K}_{rC}$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_O &= \sum_{k=1}^n \bar{K}_{O_k} = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k = \\ &= \sum_{k=1}^n (\bar{r}_C + \bar{\rho}_k) \times m_k (\bar{v}_C + \bar{v}_{rk}) = \\ &= \bar{r}_C \times \left(\sum_{k=1}^n m_k \right) \bar{v}_C + \left(\sum_{k=1}^n m_k \bar{\rho}_k \right) \times \bar{v}_C + \\ &\quad M \bar{\rho}_C = 0 \\ &+ \bar{r}_C \times \left(\sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_{rk} \right) + \left(\sum_{k=1}^n \bar{\rho}_k \times m_k \bar{v}_{rk} \right) = \\ &\quad M \bar{v}_{rC} = 0 \quad \bar{K}_{rC} \\ &= \bar{r}_C \times M \bar{v}_C + \bar{K}_{rC} \end{aligned}$$



Кинетический момент твердого тела при вращении вокруг неподвижного центра



$$\bar{K}_O = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k, \quad \bar{v}_k = \bar{\omega} \times \bar{r}_k$$

$$\bar{K}_O = \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_k)$$

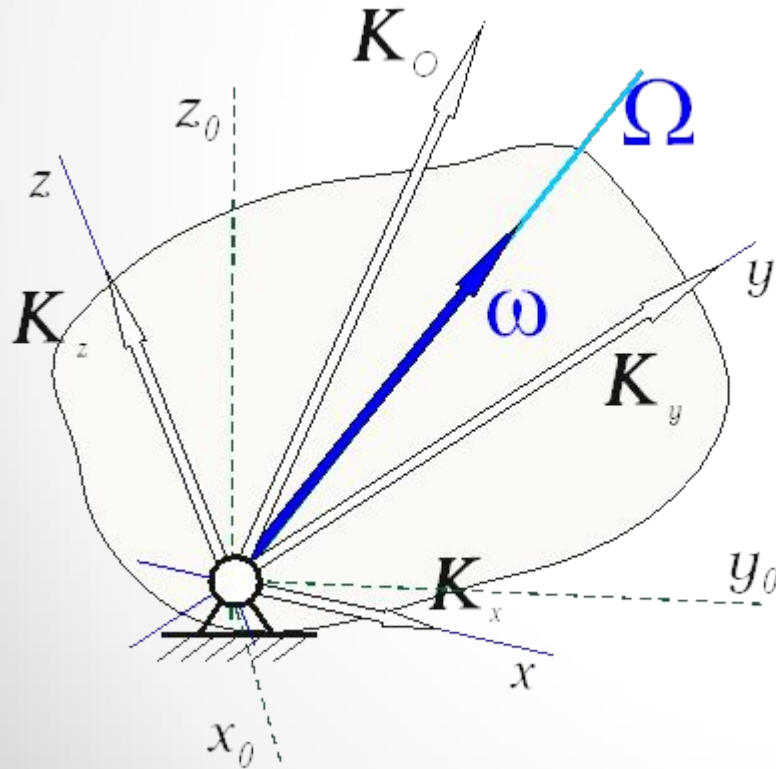
$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{c}) \bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b}) \bar{c}$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_O &= \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_k) = \sum_{k=1}^n m_k \left[(\bar{r}_k \cdot \bar{r}_k) \bar{\omega} - (\bar{r}_k \cdot \bar{\omega}) \bar{r}_k \right] = \\ &= \sum_{k=1}^n m_k \left[(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) \bar{\omega} - (x_k \omega_x + y_k \omega_y + z_k \omega_z) \bar{r}_k \right] \end{aligned}$$

Кинетический момент твердого тела при вращении вокруг неподвижного центра

$$K_x = \left(\sum_{k=1}^n m_k (y_k^2 + z_k^2) \right) \omega_x - \left(\sum_{k=1}^n m_k x_k y_k \right) \omega_y - \left(\sum_{k=1}^n m_k x_k z_k \right) \omega_z =$$

$$= I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z$$



$$\begin{cases} K_x = I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z; \\ K_y = -I_{xy} \omega_x + I_y \omega_y - I_{yz} \omega_z; \\ K_z = -I_{xz} \omega_x - I_{yz} \omega_y + I_z \omega_z. \end{cases}$$

Кинетический момент твердого тела при вращении вокруг неподвижного центра

1. Оси Ox , Oy , Oz –
главные оси инерции тела
2. Вращение вокруг неподвижной оси

$$Oz \quad \omega_x = \omega_y = 0 \quad \omega_z = \omega \quad \begin{cases} K_x = -I_{xz} \omega; \\ K_y = -I_{yz} \omega; \\ K_z = I_z \omega. \end{cases}$$

3. Ось вращения – главная ось инерции тела

$$K_x = K_y = 0, \quad K_z = I_z \omega.$$

Теорема об изменении кинетического момента механической системы

Полная производная от вектора кинетического момента системы относительно некоторого неподвижного центра O равна главному моменту всех внешних сил, приложенных к точкам и телам системы, относительно выбранного центра

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \bar{M}_O^e, \quad \bar{M}_O^e = \sum_{k=1}^n m_k (\bar{F}_k^e) = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_k^e$$

В проекциях на оси
декартовой системы
координат

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dK_x}{dt} = M_x^e = \sum_{k=1}^n m_k (\bar{F}_k^e)_x; \\ \frac{dK_y}{dt} = M_y^e = \sum_{k=1}^n m_k (\bar{F}_k^e)_y; \\ \frac{dK_z}{dt} = M_z^e = \sum_{k=1}^n m_k (\bar{F}_k^e)_z. \end{array} \right.$$

Теорема об изменении кинетического момента механической системы

Доказательство: $m_k \bar{\omega}_k = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i, \quad k = 1, \dots, n$

$$\bar{r}_k \times m_k \bar{\omega}_k = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i,$$

$$\frac{d}{dt} \bar{K}_O = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k = \sum_{k=1}^n \dot{\bar{r}}_k \times m_k \bar{v}_k + \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times m_k \dot{\bar{v}}_k =$$

$$= \sum_{k=1}^n \cancel{\dot{\bar{v}}_k \times m_k \bar{v}_k} + \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times m_k \bar{\omega}_k$$

$$= 0$$

$$\sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times m_k \bar{\omega}_k = \frac{d\bar{K}_O}{dt} = \sum_{k=1}^n \cancel{\dot{\bar{r}}_k \times \bar{F}_k^e} + \sum_{k=1}^n \cancel{\bar{r}_k \times \dot{\bar{F}}_k^i} = \bar{M}_O^e.$$

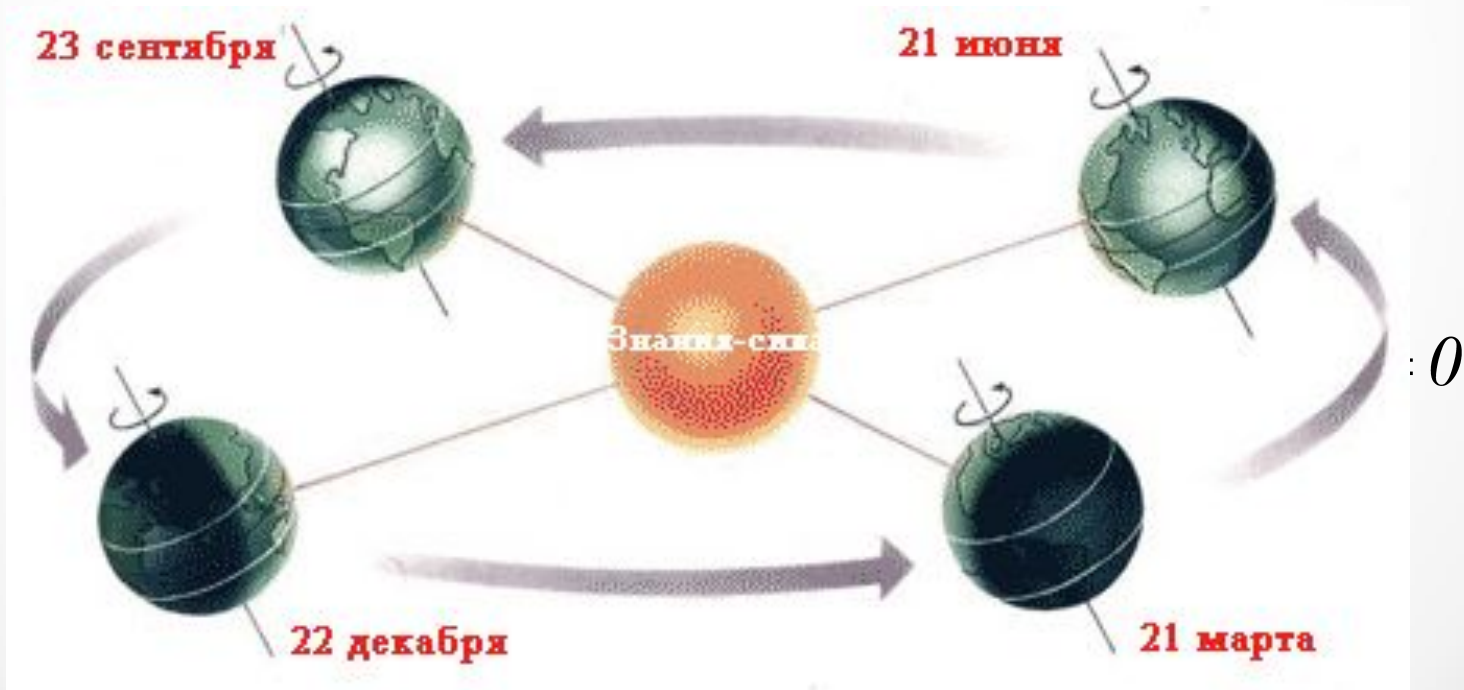
$$= \bar{M}_O^e$$

$$= \bar{M}_O^i = 0$$

Теорема об изменении кинетического момента механической системы

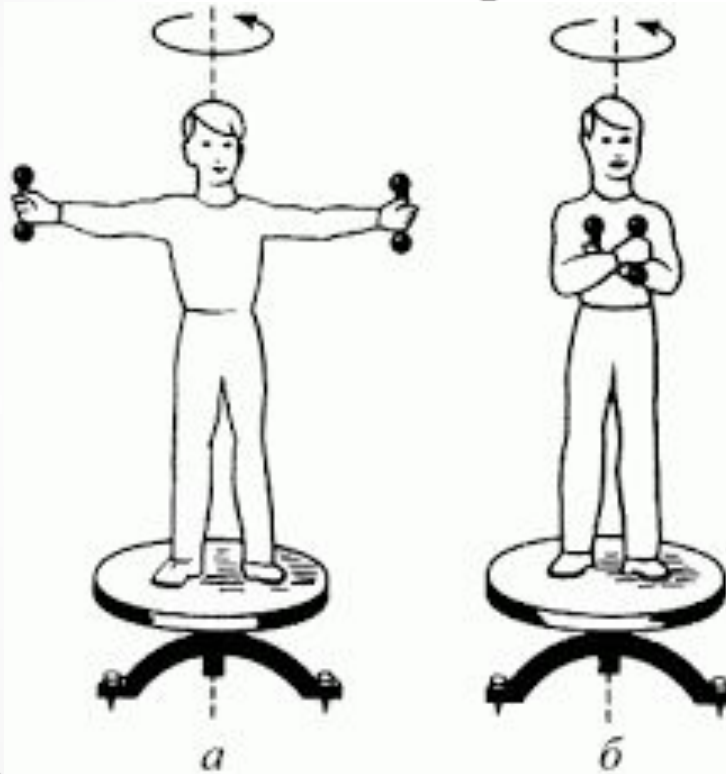
Следствия:

$$1. \bar{M}_O^e = 0 \Rightarrow \frac{d\bar{K}_O}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{K}_O = \text{const}$$



Теорема об изменении кинетического момента механической системы

Следствия: 2. $M_z^e = 0 \Rightarrow \frac{dK_z}{dt} = 0 \Rightarrow K_z = \text{const}$



$$I_a > I_b \Rightarrow \omega_a < \omega_b$$

3. Внутренние силы не могут непосредственно изменить кинетический момент механической системы.

Теорема об изменении кинетического момента механической системы

Движение вокруг центра масс

$$\bar{K}_O = \bar{r}_C \times M\bar{v}_C + \bar{K}_{rC}$$

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \frac{d}{dt} \bar{r}_C \times M\bar{v}_C + \frac{d\bar{K}_{rC}}{dt} = \bar{r}_C \times M\bar{w}_C + \frac{d\bar{K}_{rC}}{dt}$$

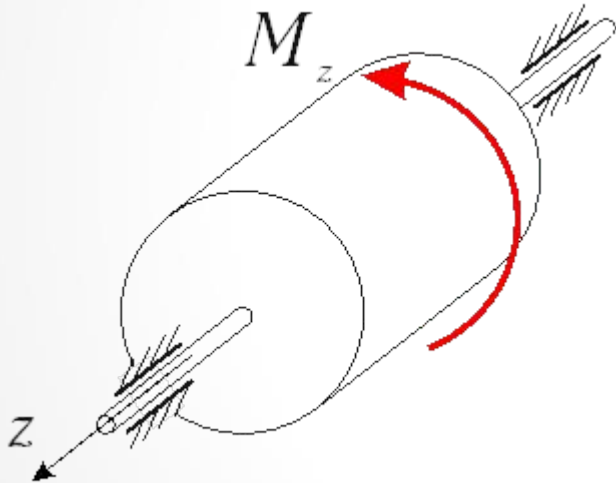
$$\bar{M}_O^e = \bar{M}_C^e + \bar{r}_C \times \bar{R}^e$$

$$\bar{r}_C \times M\bar{w}_C + \frac{d\bar{K}_{rC}}{dt} = \bar{M}_C^e + \bar{r}_C \times \bar{R}^e \quad - \quad \left[\bar{r}_C \times M\bar{w}_C = \bar{R}^e \right]$$

$$\frac{d\bar{K}_C}{dt} = \bar{M}_C^e,$$

Дифференциальные уравнения вращательного движения твердого тела

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^e \quad K_z = I_z \omega \quad I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^e$$



$$I\varepsilon = M_z \quad mw = F_x$$

$$\varphi$$

$$x$$

$$\omega = \dot{\varphi}$$

$$v = \dot{x}$$

$$\varepsilon = \ddot{\varphi}$$

$$w = \ddot{x}$$

Осевой момент инерции твердого тела – мера инертности тела при его вращении вокруг неподвижной оси