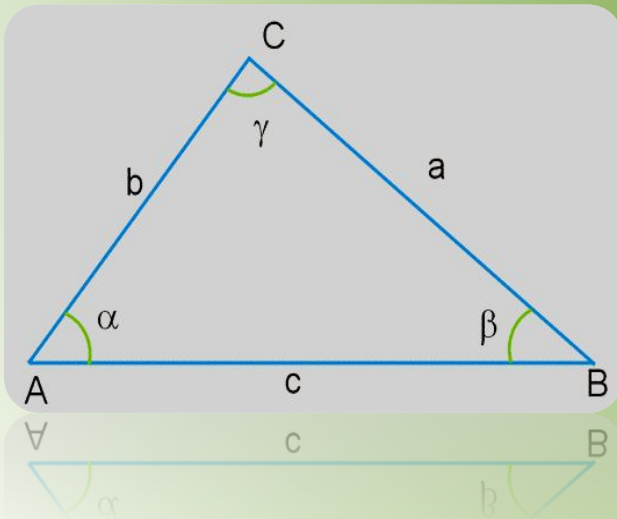


Треугольник и все что его касается.



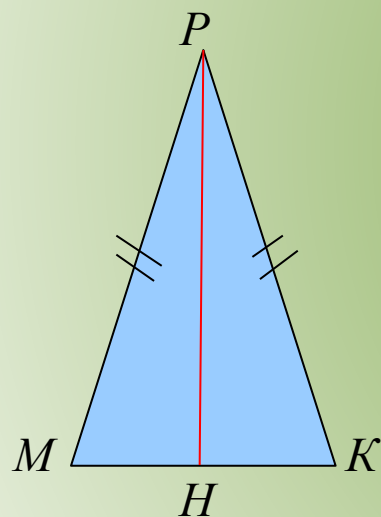
Треугольник

- ❖ простейший многоугольник, имеющий 3 вершины (угла) и 3 стороны;
- ❖ часть плоскости, ограниченная тремя точками, и тремя отрезками, попарно соединяющими эти точки;
- ❖ замкнутая ломаная линия с тремя звеньями.



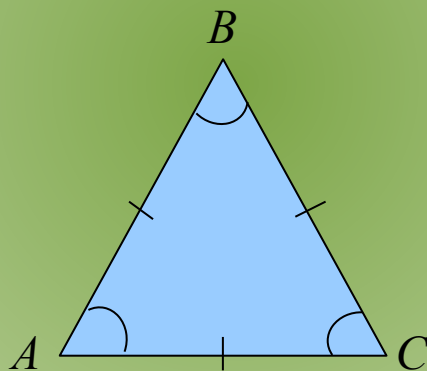
Виды треугольников по сторонам

Равнобедренный



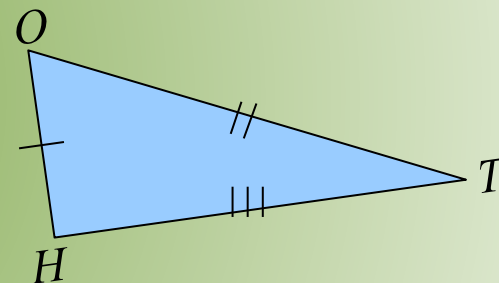
- 1) Углы при основании равны;
- 2) Медиана является биссектрисой и высотой.

Равносторонний



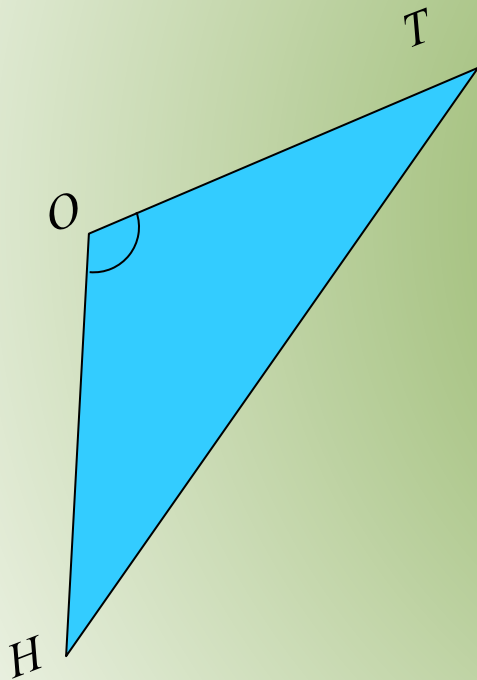
- 1) Все углы равны 60° .

Разносторонний

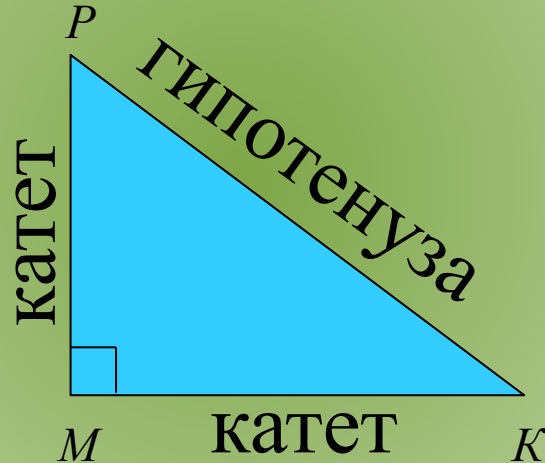


Виды треугольников по углам

Тупоугольный

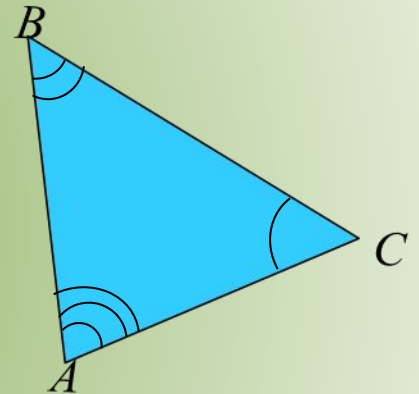


Прямоугольный



$\angle PMK = 90^\circ$ - прямой

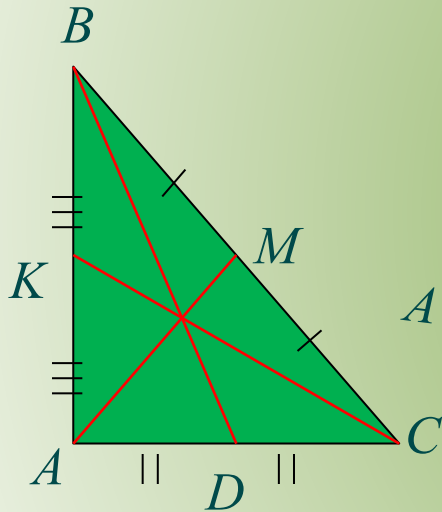
Остроугольный



Элементы треугольника



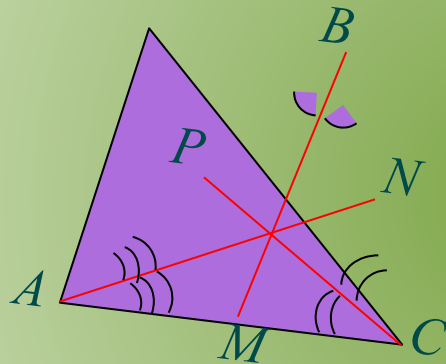
Медиана



$$\begin{aligned} BM &= MC \\ AD &= DC \\ AK &= KB \end{aligned}$$



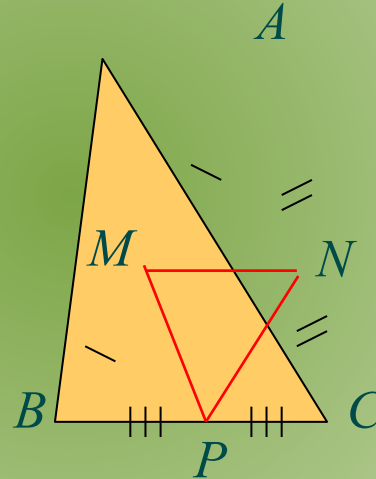
Биссектриса



$$\begin{aligned} \angle ABM &= \angle MBC \\ \angle BCP &= \angle PCA \\ \angle CAN &= \angle NAB \end{aligned}$$



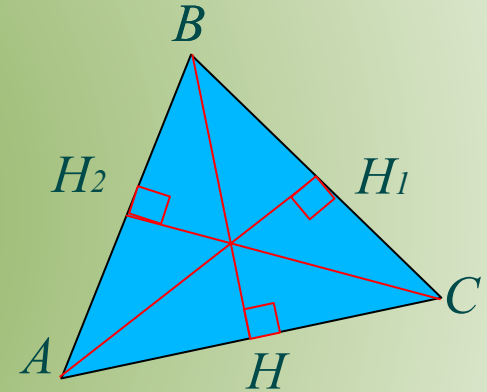
Средняя линия



$$\begin{aligned} BM &= MA \\ AN &= NC \\ MN &\parallel BC \\ BC &= 2 \cdot MN \end{aligned}$$

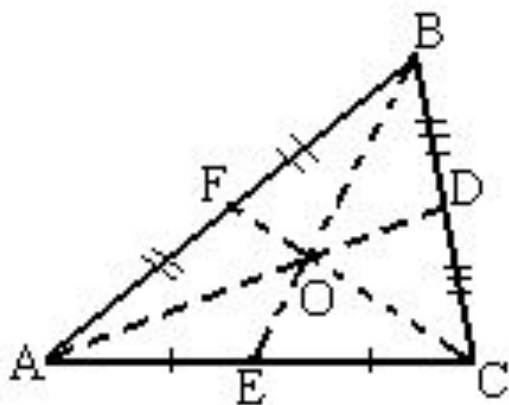


Высота



$$\begin{aligned} BH &\perp AC \\ AH_1 &\perp BC \\ CH_2 &\perp AB \end{aligned}$$

Медиана треугольника

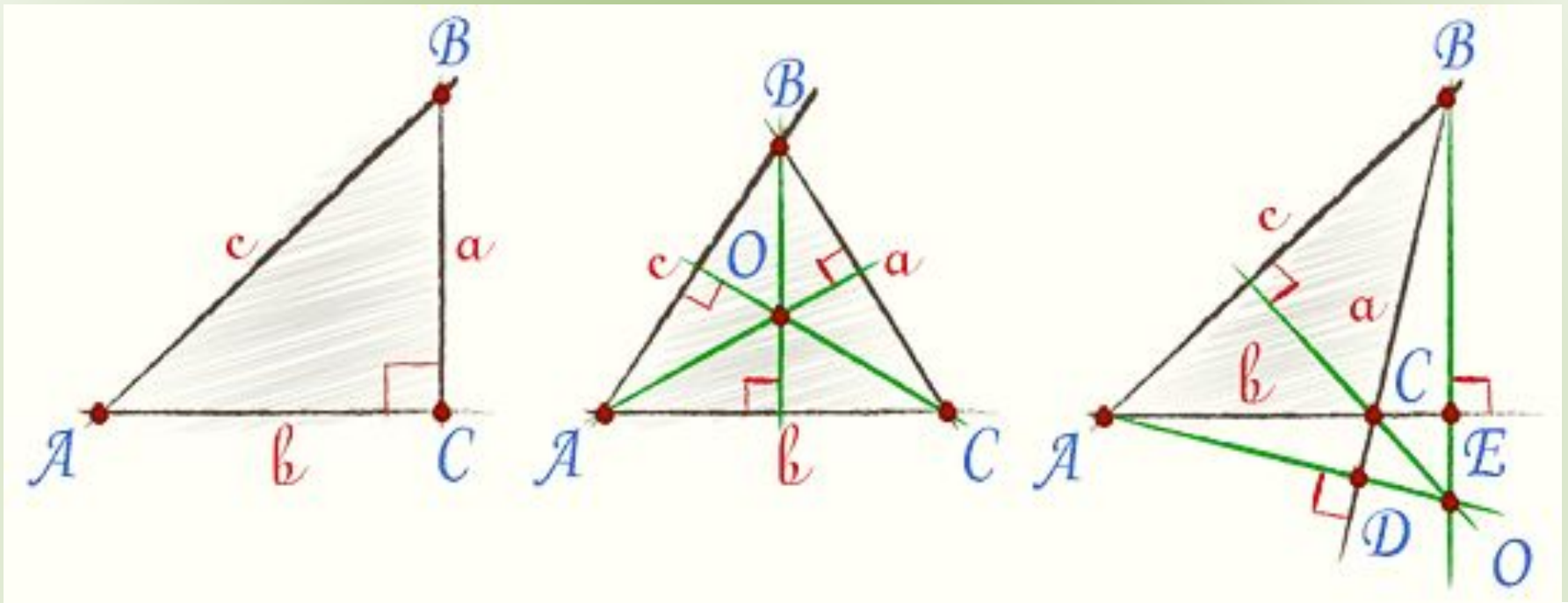


- **Свойства медиан треугольника:**
- 1. Медианы треугольника делятся точкой пересечения в отношении 2:1 (считая от вершины треугольника).
- 2. Медиана делит треугольник, равных по площади на два треугольника.

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$



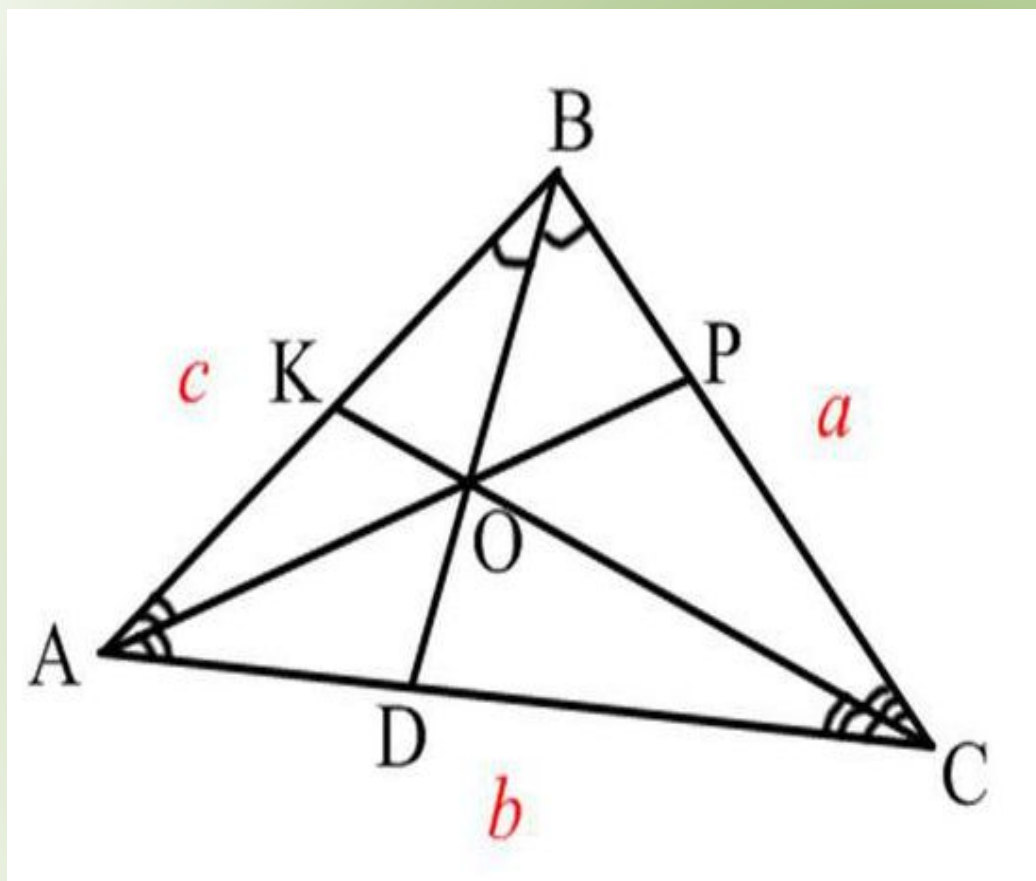
Высота треугольника.



$$H = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$



Биссектриса треугольника.



Свойства биссектрис треугольника:

1. Биссектриса делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.
2. Биссектриса треугольника делит площадь треугольника в отношении, пропорциональном прилежащим сторонам.
3. Точка пересечения биссектрис треугольника является центром окружности, вписанной в этот треугольник.

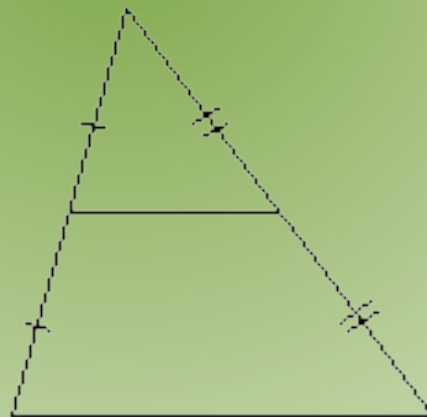


Средняя линия

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Свойство средней линии треугольника

Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.



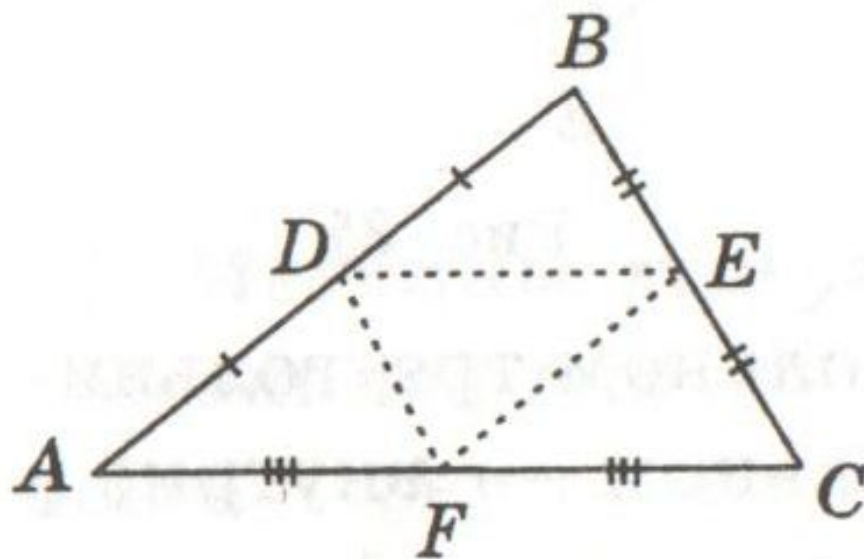
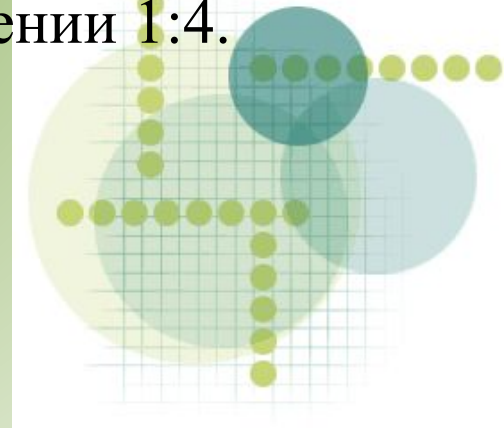


Рис. 37

2. Средняя линия треугольника отсекает от треугольника подобный треугольник. Площадь отсекаемого треугольника относится к площади основного треугольника в отношении 1:4.



$$\begin{aligned}a + b &> c, \quad c < a - b; \\a + c &> b, \quad b < a - c; \\b + c &> a, \quad a < b - c.\end{aligned}$$

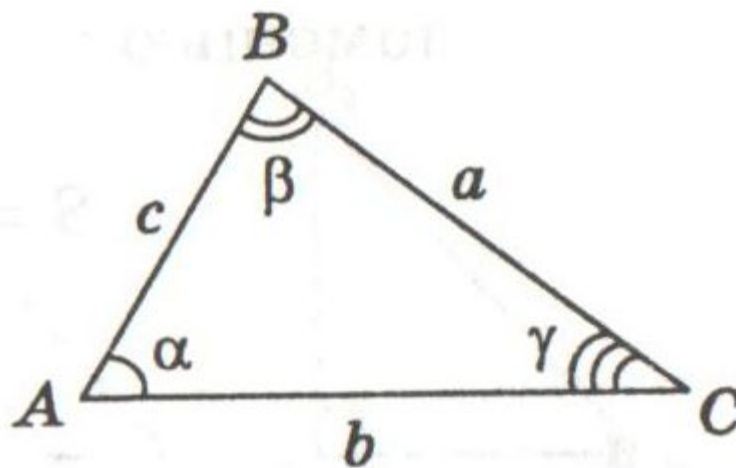


Рис. 38



Площадь треугольника.

Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.

Пусть S - площадь треугольника ABC . Примем сторону AB за основание треугольника и проведем высоту CH . Докажем что

$$S = 1/2 * AB * CH$$

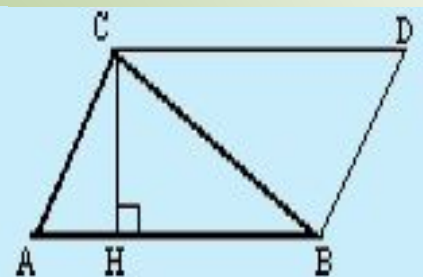
Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$ так, как показано на рисунке. Треугольники ABC и BCD равны по трем сторонам (BC - их общая сторона, $AB = CD$ и $AC = BD$ как противоположные стороны параллелограмма $ABCD$), поэтому их площади равны. Следовательно, площадь S треугольника ABC равна половине площади параллелограмма $ABCD$, т.е.

$$S = 1/2 * AB * CH$$

Теорема доказана.

Следствие 1 : Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов

Следствие 2 : Если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся как основания.



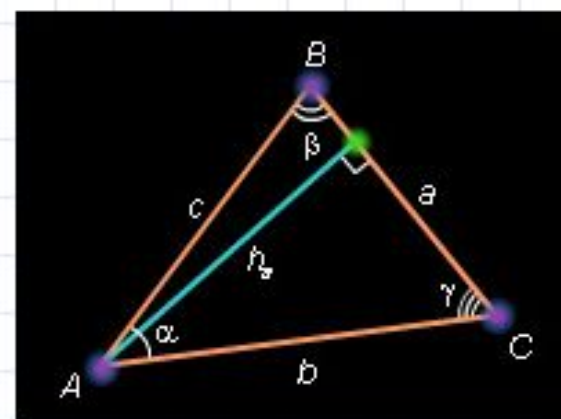
$$1. S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha$$

Доказательство:

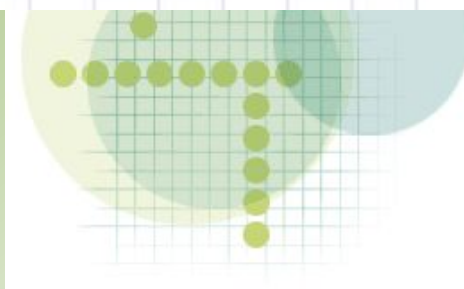
Из основной формулы $S = \frac{1}{2} h_a \cdot a$.

С другой стороны $h_a = b \cdot \sin \gamma$.

По теореме синусов $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$, откуда $a = \frac{c \cdot \sin \alpha}{\sin \gamma}$.

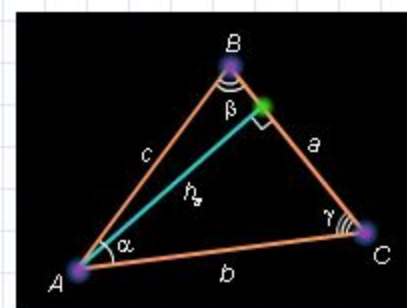


Подставляя выражения для h_a и a в основную формулу, получим искомое выражение.



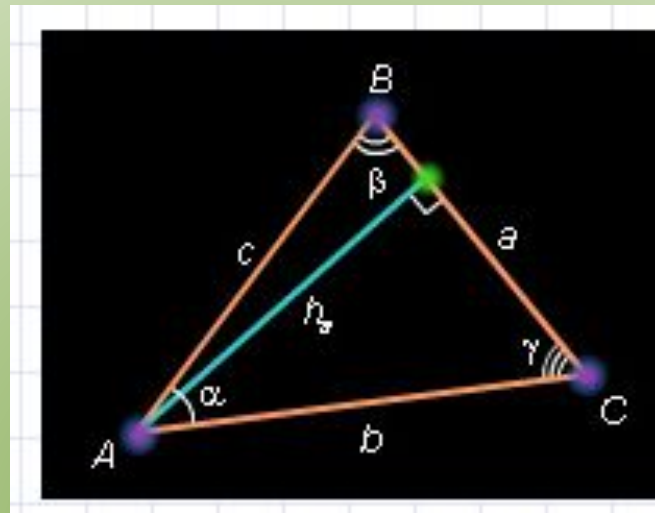
$$2. S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$



$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{1}{2bc} \sqrt{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)} = \frac{1}{2bc} \sqrt{(2bc - b^2 - c^2 + a^2)(2bc + b^2 + c^2 - a^2)} = \\ &= \frac{1}{2bc} \sqrt{(a^2 - (b - c)^2)((b + c)^2 - a^2)} = \frac{1}{2bc} \sqrt{(a - b + c)(a + b - c)(a + c - a)(b + c + a)} = \\ &= \frac{4}{2bc} \sqrt{(p - b)(p - c)(p - a)p}, \end{aligned}$$

где $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Подставляя полученное выражение в формулу $S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin \alpha$, получим искомую формулу.



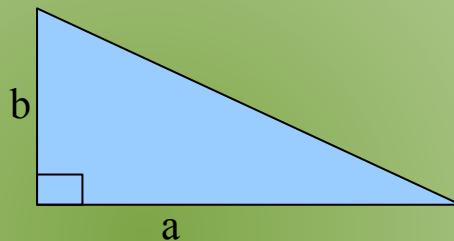
$$S = \frac{abc}{4R}.$$

$$S = pr.$$

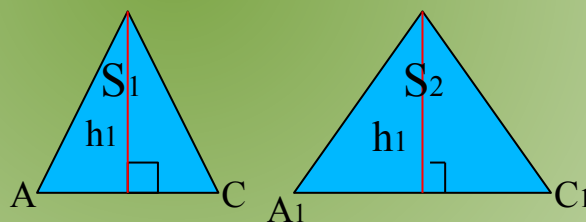


Площадь треугольника

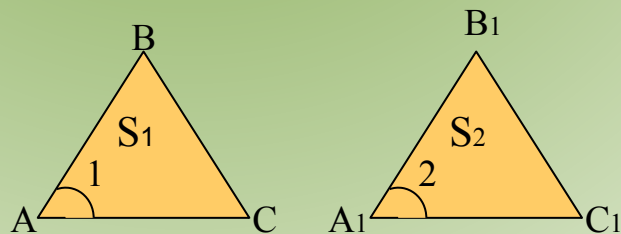
$$S (\text{п/у}\triangle) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b.$$



$$h_1 = h_2 \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$



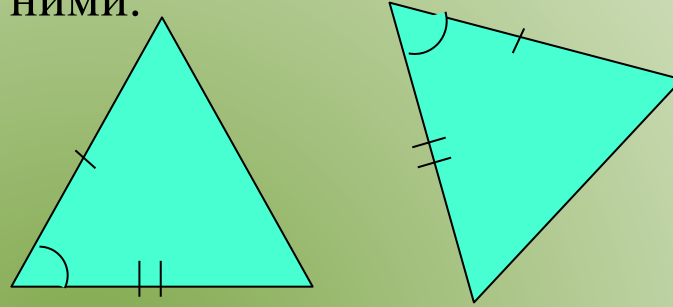
$$\frac{\angle 1}{\angle 2} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{AC \cdot AB}{A_1C_1 \cdot A_1B_1}$$



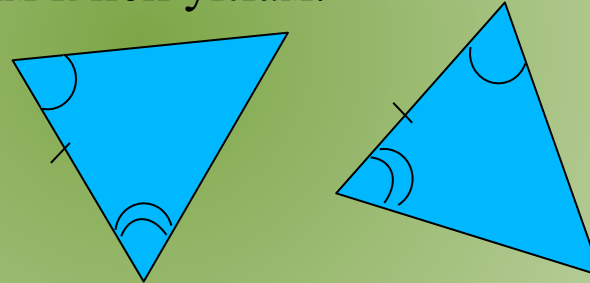
Равенство треугольников

Признаки равенства треугольников:

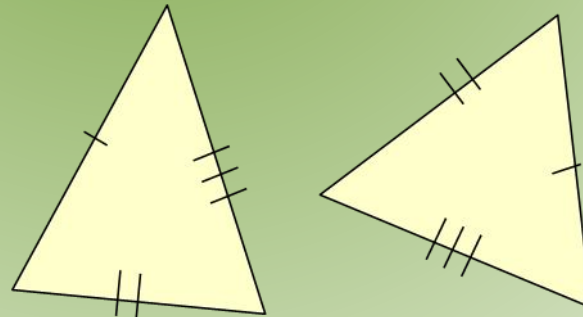
1. По двум сторонам и углу между ними.



2. По стороне и двум прилежащим к ней углам.



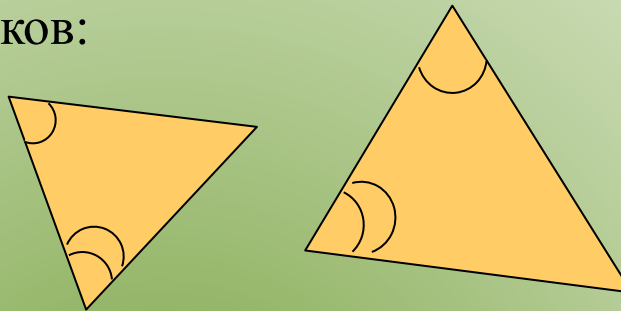
3. По трём сторонам.



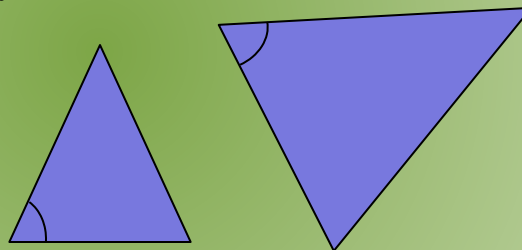
Подобие треугольников

Признаки подобия треугольников:

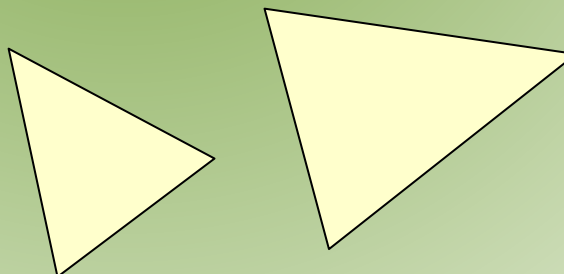
1. По двум углам.



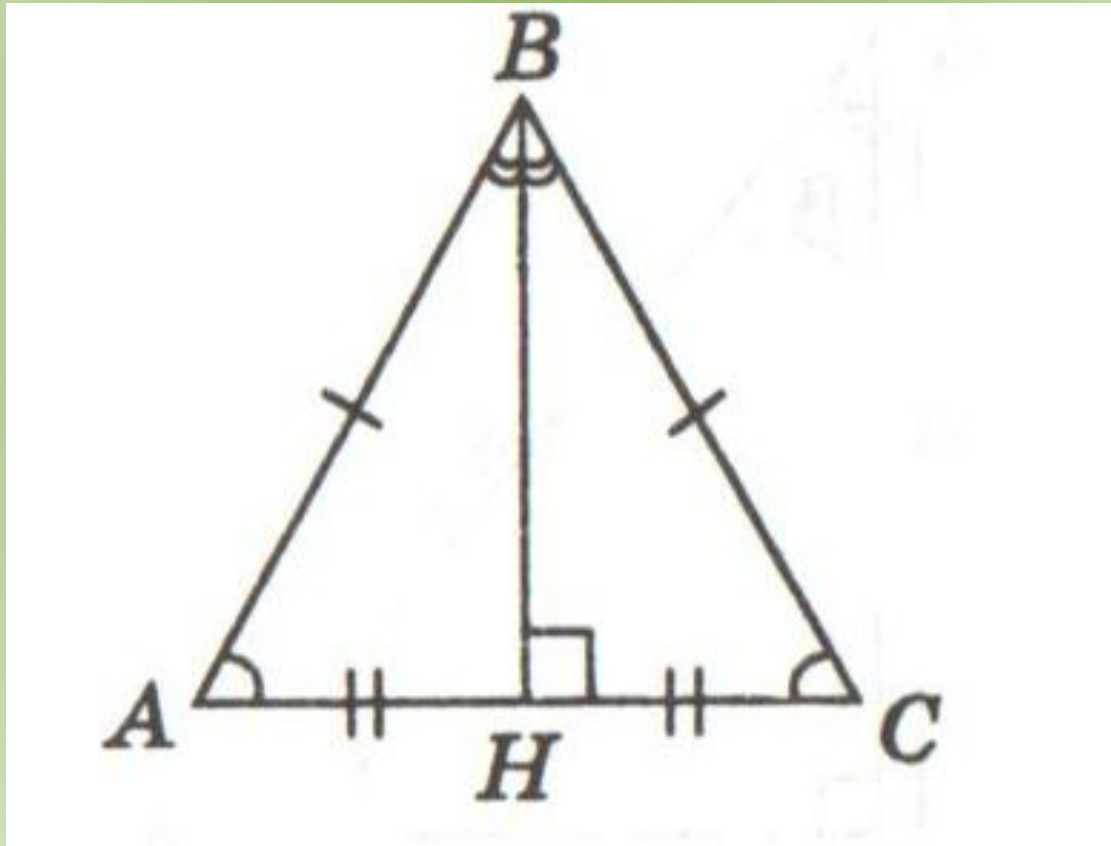
2. По двум сторонам и углу между ними.



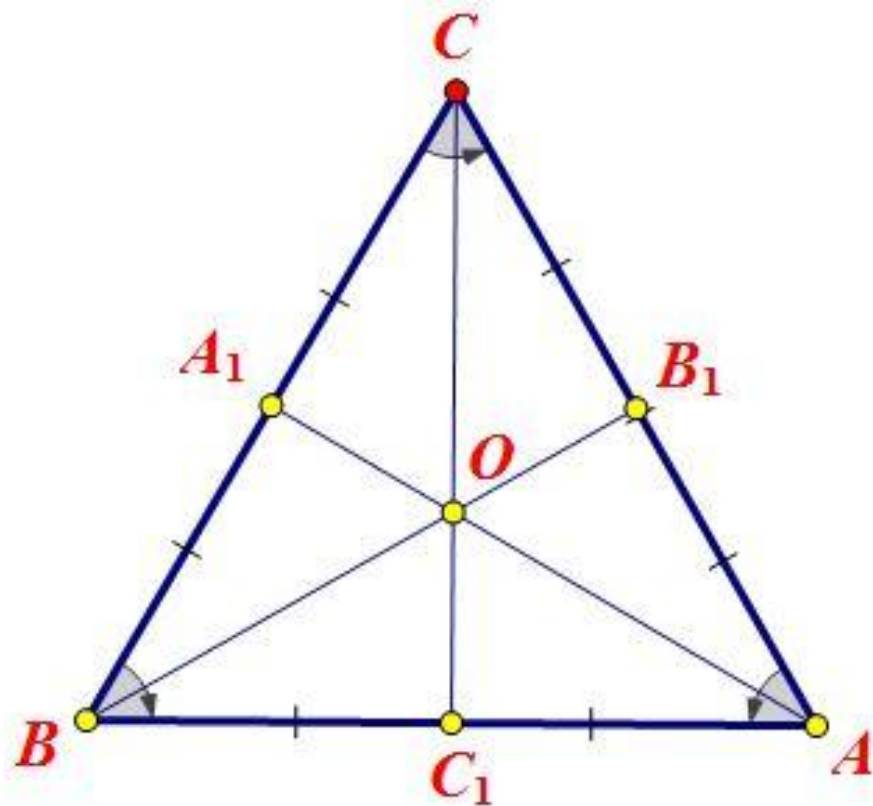
3. По трём сторонам.



Равнобедренный треугольник.



Равносторонний треугольник.



$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

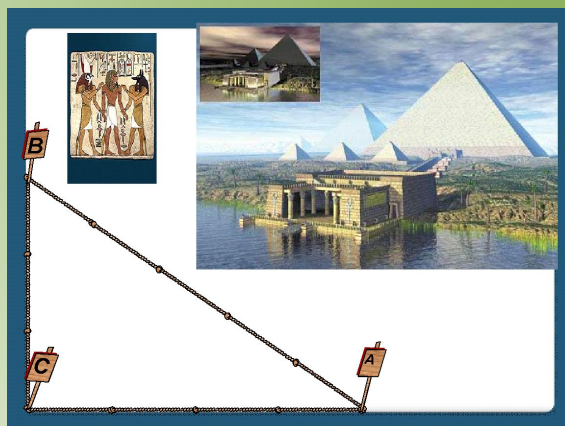
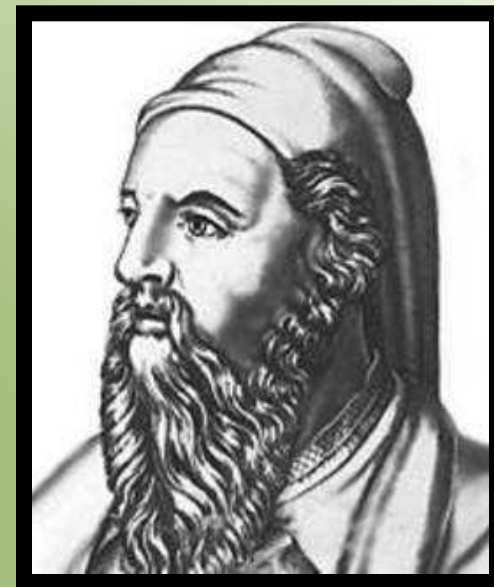
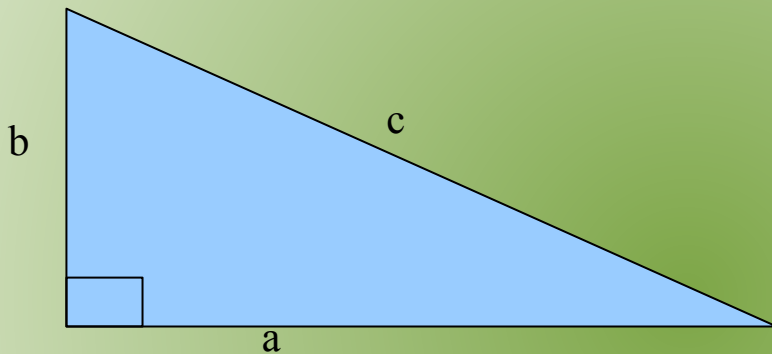
$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$R = \frac{2}{3} \cdot h = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$r = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Теорема Пифагора

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Доказательство теоремы Пифагора

Дано: a, b - катеты, c -гипотенуза.

Доказать: $a^2 + b^2 = c^2$.

Доказательство:

Достроим до квадрата со стороной $(a+b)$.

$$S_1 = (a+b)^2$$

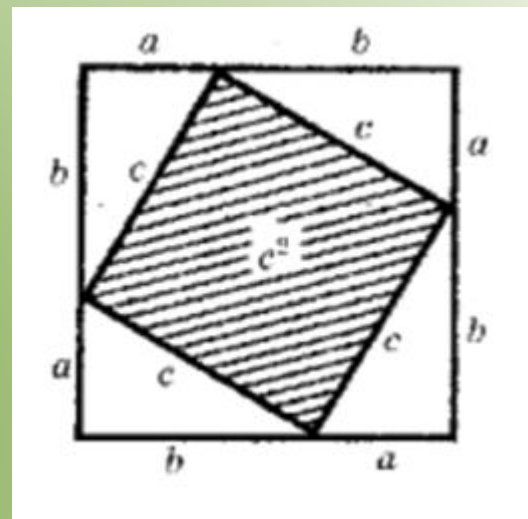
$$S_2 = 4\left(\frac{1}{2}ab\right) + c^2$$

Приравняем площади: $S_1 = S_2$.

$$(a+b)^2 = 4\left(\frac{1}{2}ab\right) + c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

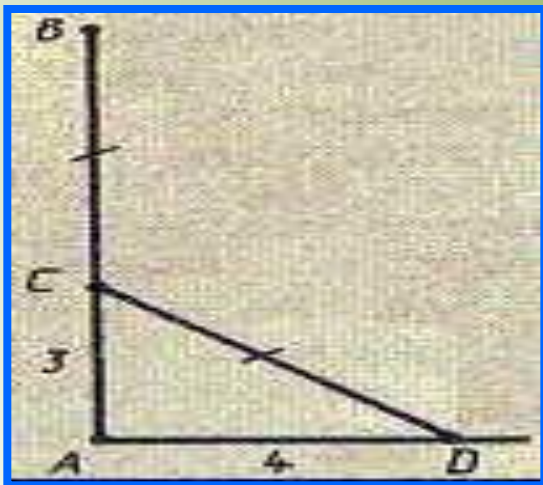
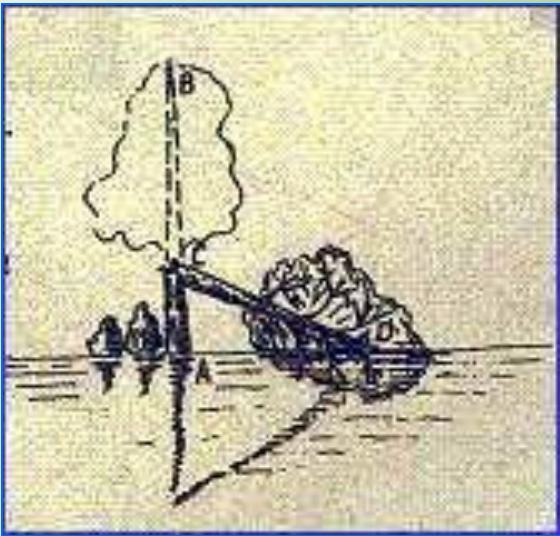
$$a^2 + b^2 = c^2$$



Задача

Вот задача индийского математика 12в. Бхаскары

На берегу реки рос тополь одинокий. Вдруг ветра порыв его ствол надломал. Бедный тополь упал. И угол прямой с течением реки его ствол составлял. Запомни теперь, что в том месте река в четыре лишь фута была широка. Верхушка склонилась у края реки. Осталось три фута всего от ствола, прошу тебя, скоро теперь мне скажи: у тополя как велика высота?



Решение:

По теореме Пифагора находим CD:

$$CD^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow CD = 5.$$

Высота тополя равна: CB+CA. Т.к.

$$CD = CB \Rightarrow$$

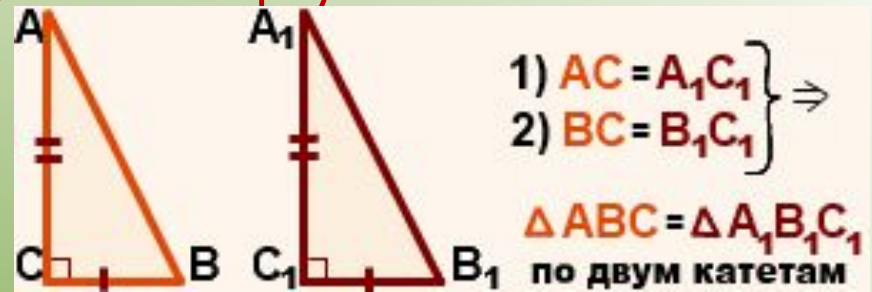
$$AB = AC + CD = 3 + 5 = 8.$$

Ответ: высота тополя 8 футов.

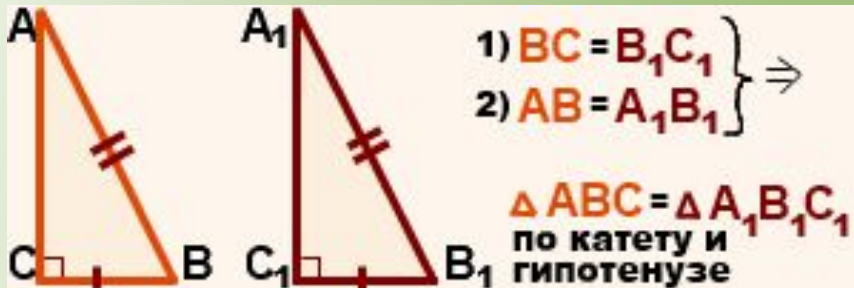


Признаки равенства прямоугольных треугольников.

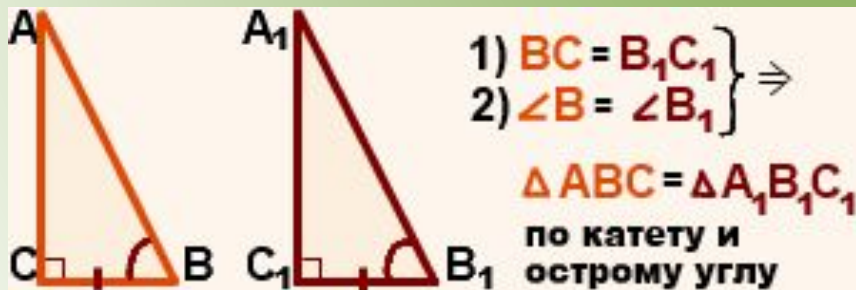
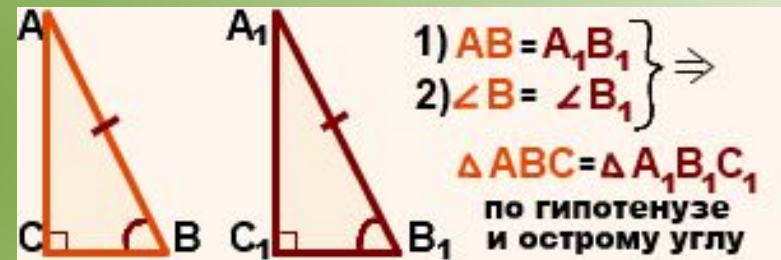
Признак равенства
прямоугольных треугольников
по двум катетам



Признак равенства
прямоугольных треугольников
по катету и гипотенузе



Признак равенства по гипотенузе и
острому углу

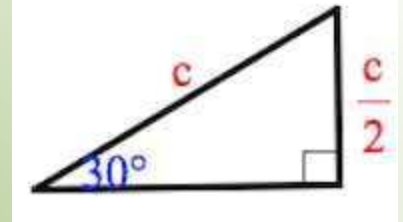


Признак равенства прямоугольных
треугольников по катету и острому
углу



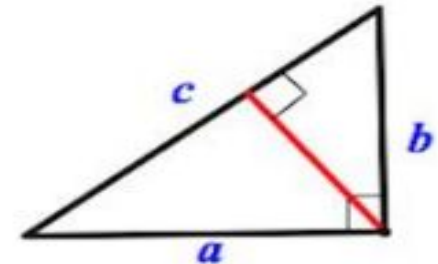
Свойства прямоугольного треугольника

1. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90° .
2. Катет, противолежащий углу в 30° , равен половине гипотенузы.
3. И обратно, если в треугольнике катет вдвое меньше гипотенузы, то напротив него лежит угол в 30° .



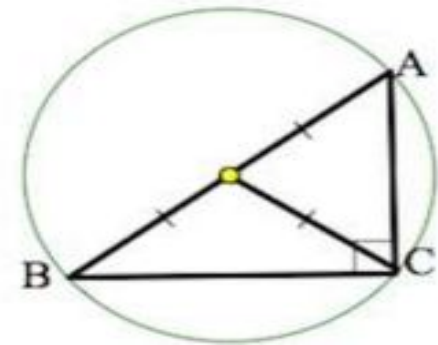
4. Площадь S прямоугольного треугольника с катетами a , b : $S = \frac{1}{2}ab$

5. Высота h прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе выражается через катеты a , b и гипотенузу c следующим образом: $h = \frac{ab}{c}$

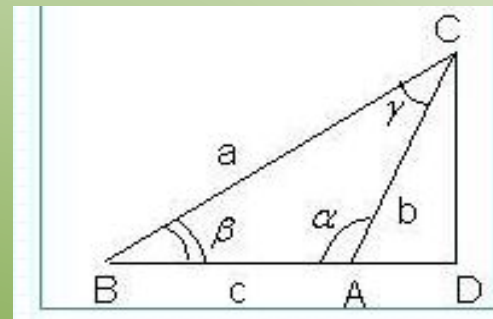
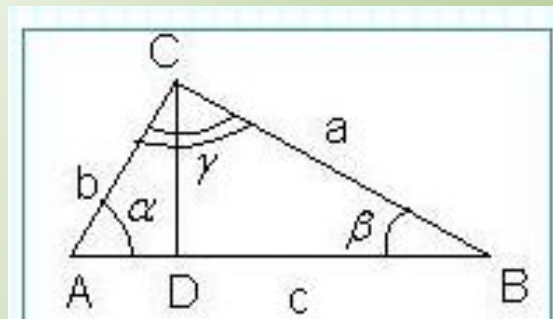


6. Центр описанной окружности – есть середина гипотенузы.

7. Радиус R описанной окружности есть половина гипотенузы c : $R = \frac{c}{2}$



Теорема синусов и теорема косинусов.



Теорема синусов. Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

Доказательство. Рассмотрим $\triangle ABC$ со сторонами a, b, c и противолежащими углами α, β, γ . Докажем, что

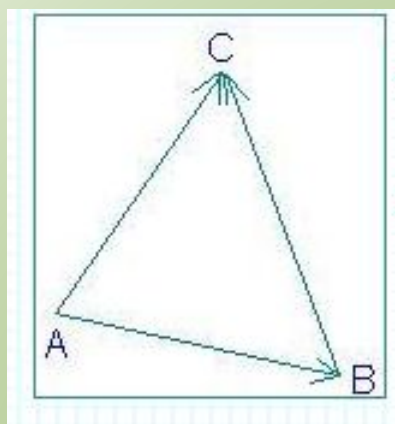
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Из вершины C треугольника ABC опустим высоту CD . Из прямоугольного $\triangle ACD$, если α – острый угол, получаем $CD = b \sin \alpha$. Если α – тупой угол, то $CD = b \sin(180^\circ - \alpha) = b \sin \alpha$.

Аналогично из прямоугольного $\triangle BCD$ получаем $CD = a \sin \beta$. Таким образом, $a \sin \beta = b \sin \alpha$, т.е.

$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$. Опуская высоту в треугольнике ABC из вершины A , аналогично имеем $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$. Итак,

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$



Теорема косинусов.

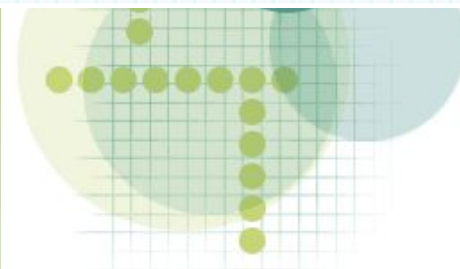
Теорема косинусов. Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

Доказательство. Дан $\triangle ABC$. Рассмотрим векторы $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{AC}$ (рис. 13). Очевидно, $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$. Возведем это равенство скалярно в квадрат:

$$\vec{BC}^2 = \vec{BC} \cdot \vec{BC} = (\vec{AC} - \vec{AB}) \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) = \vec{AC}^2 - \vec{AC} \cdot \vec{AB} - \vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AB}^2 = \vec{AC}^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AB}^2$$

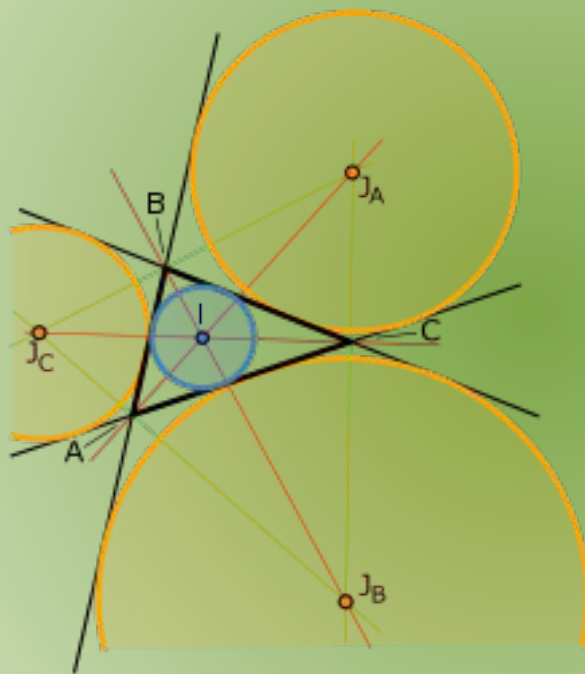
Используя теперь определение скалярного произведения векторов, имеем

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$, где $AB = |\vec{AB}|$, $AC = |\vec{AC}|$, $BC = |\vec{BC}|$ - длины сторон $\triangle ABC$, $\angle A$ - угол между сторонами AB и AC . Теорема доказана.



Вневписанная окружность

Вневписанная окружность треугольника – окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других его сторон.



Свойство: длина отрезка касательной, проведенной к вневписанной окружности из противоположной вершины, равна полупериметру треугольника.

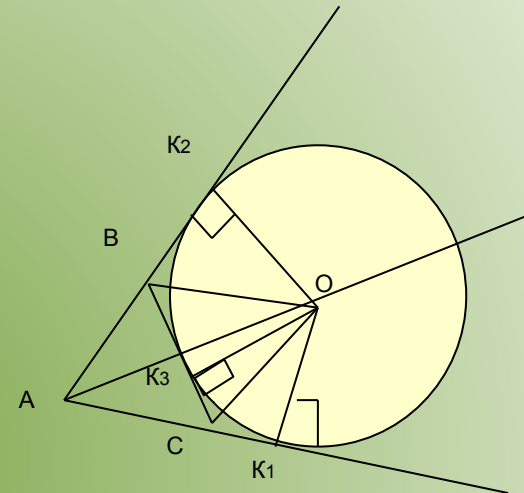


Доказательство:

1) Пусть точки K_2 и K_3 - точки касания вневписанной окружности с прямыми AB и BC соответственно.

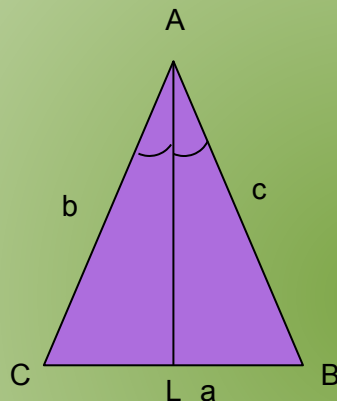
2) $CK_1 = CK_3$ (по свойству касательных к окружности).
 $BK_2 = BK_3$
 $AK_1 = AK_2$

3) $P = AC + CB + AB = AC + CK_3 + BK_3 + AB = AC + CK_1 + BK_2 + AB = AK_1 + AK_2 = 2 \cdot AK_1$.
Значит, $AK_1 = P/2$.



Расстояние от инцентра треугольника до его вершин

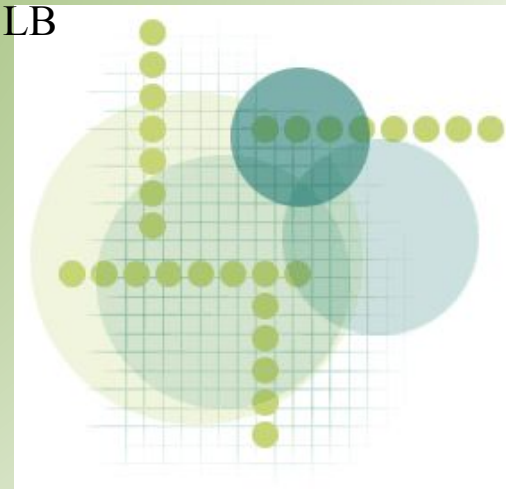
Теорема 1: Биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные соответствующим боковым сторонам.



Следствие: Пусть AL-биссектриса $\angle A$ в $\triangle ABC$. Тогда отрезки CL и LB находятся по формулам:

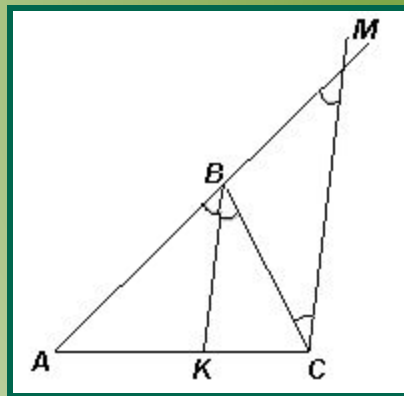
$$CL = \frac{ab}{b+c}$$

$$BL = \frac{ac}{b+c}$$



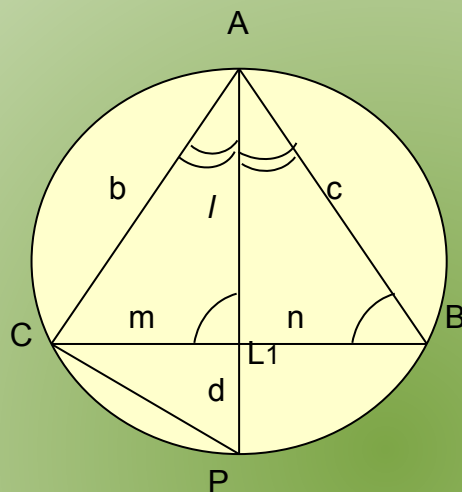
Дано: BK - биссектриса, $CM \parallel BK$

Доказательство: Так как BK – биссектриса $\angle ABC$, то $\angle ABK = \angle KBC$. Далее, $\angle ABK = \angle BMC$, как соответственные углы при параллельных прямых, и $\angle KBC = \angle BCM$, как накрест лежащие углы при параллельных прямых. Отсюда $\angle BCM = \angle BMC$, и поэтому треугольник BMC – равнобедренный, откуда $BC = BM$. По теореме о параллельных прямых, пересекающих стороны угла, имеем $AK/KC = AB/BM = AB/BC$, что и требовалось доказать.



Теорема 2: Пусть в $\triangle ABC$ из вершины $\angle A$ проведена биссектриса l , которая делит сторону CB на отрезки $CL=m$, $LB=n$. Тогда справедливо равенство:

$$l^2 = b \cdot c - m \cdot n.$$



Теорема 3: Для всякого $\triangle ABC$ справедливы равенства:

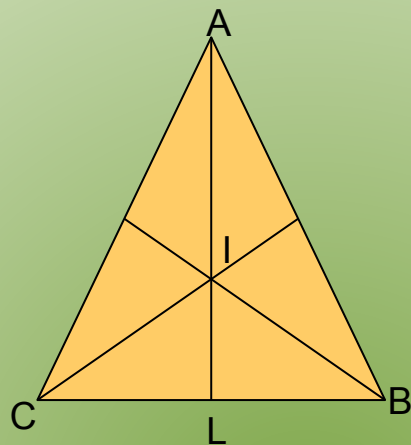
$$l_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \cdot \sqrt{p(p-a)}$$

$$l_b = \frac{2\sqrt{ac}}{a+c} \cdot \sqrt{p(p-b)}$$

$$l_c = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \cdot \sqrt{p(p-c)}$$



Инцентр - точка пересечения биссектрис треугольника.



Расстояние от инцентра треугольника до его вершин вычисляется по формулам:

$$AI = \sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}}$$

$$BI = \sqrt{\frac{ac(p-b)}{p}}$$

$$CI = \sqrt{\frac{ab(p-c)}{p}}$$



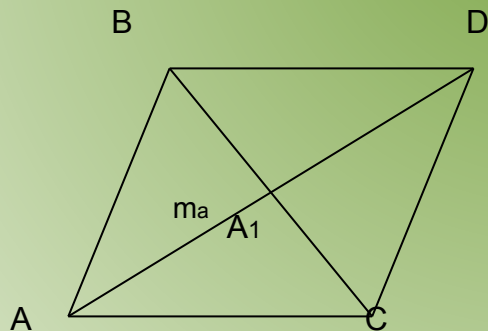
Свойства медиан

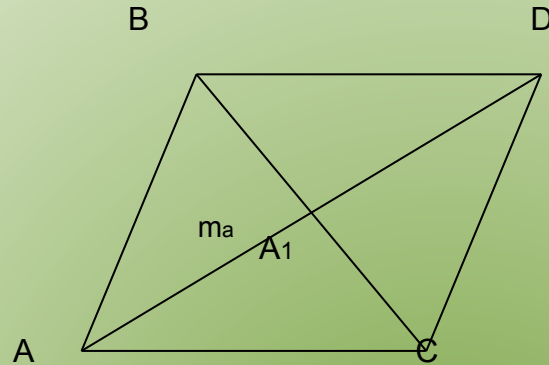
Теорема: Если a, b, c - стороны $\triangle ABC$ (рис.34), m_a, m_b, m_c - его медианы, проведенные к соответствующим сторонам, то справедливы формулы:

- $$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4},$$

- $$m_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4},$$

- $$m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$





Доказательство:

На продолжении медианы AA_1 треугольника ABC отложим отрезок A_1D равный отрезку AA_1 . Тогда по теореме о том, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон, имеем:

$$AD^2 + BC^2 = 2AB^2 + 2AC^2$$

$$\text{или } 4m^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2,$$

$$\text{откуда } m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}.$$



Следствие 1: Если a , b , c - стороны $\triangle ABC$, m_a , m_b , m_c - его медианы, проведенные к соответствующим сторонам, то справедлива формула:

$$\frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{3}{4}.$$

Следствие 2: Если a , b , c - стороны $\triangle ABC$, m_a , m_b , m_c - его медианы, проведенные к соответствующим сторонам, то справедливы формулы, выражающие стороны треугольника через его медианы:

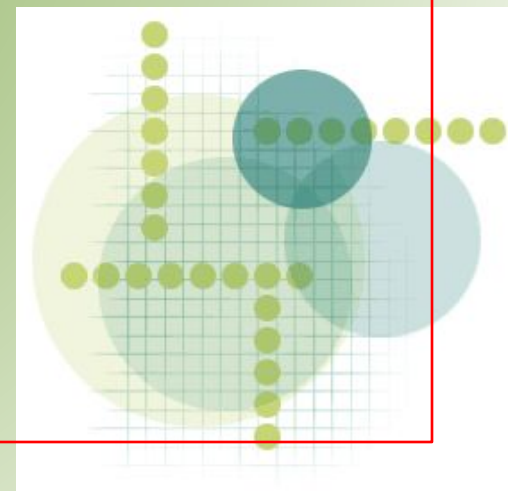
$$a^2 = \frac{4}{9} \cdot (2m_b^2 + 2m_c^2 + m_a^2),$$

$$b^2 = \frac{4}{9} \cdot (2m_a^2 + 2m_c^2 + m_b^2),$$

$$c^2 = \frac{4}{9} \cdot (2m_a^2 + 2m_b^2 + m_c^2).$$

Следствие 3: В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$ тогда и только тогда, когда

$$m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2.$$



Задача

Дано: в прямоугольном треугольнике медианы катетов $\sqrt{52}$ и $\sqrt{73}$.

Найти: $S_{\triangle ABC}$.

Решение:

Каждая из медиан катетов образует с прямым углом прямоугольный треугольник. Обозначим длину половины каждого катета как a и b . Тогда, по теореме Пифагора получим:

$$a^2 + 4b^2 = (\sqrt{73})^2$$

$b^2 + 4a^2 = (\sqrt{52})^2$, откуда $a^2 = 73 - 4b^2$, подставим выражение во второе уравнение $b^2 + 4 \cdot (73 - 4b^2) = 52$

$$\begin{cases} b^2 + 292 - 16b^2 = 52 \\ 15b^2 = 240, b^2 = 16, b = 4 \end{cases}$$

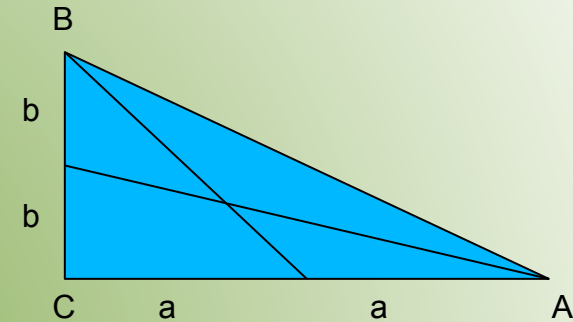
Соответственно, $a^2 = 73 - 4 \cdot 16 = 9$, $a = 3$.

Таким образом, катеты прямоугольного треугольника равны ($2a$ и $2b$) 8 и 6 см.

Откуда площадь прямоугольного треугольника равна

$$S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24 \text{ см}^2.$$

Ответ: Площадь прямоугольного треугольника равна 24 см^2 .



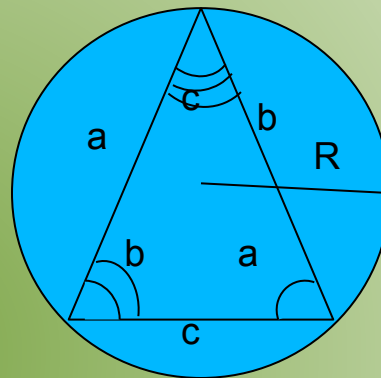
Спасибо за внимание!



Теорема синусов и косинусов

Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin a} = \frac{b}{\sin b} = \frac{c}{\sin c} = 2 \cdot R.$$



Теорема косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos a.$$

