

ИЗОМОРФИЗМ ГРАФОВ

Авторы: Владислав Аксенов (418 гр.)

Яна Булина (419 гр.)

Научные руководители:

Павлов И.С., Харчева А.А.

**ННГУ им. Н.И. Лобачевского, радиофизический факультет,
Нижний Новгород, март 2019**

В целях упрощения работы с голосовым сопровождением презентации будет дано определение изоморфизму графов, а также описаны способы, в углу экрана будет появляться значок, означающий, что можно перейти, также, не оборвав звуковой ряд презентации.



Что такое изоморфизм?

Изоморфизм устанавливает отношение **равенства** между **графами** G и H ($G=H$ – графы изоморфны).

Определе
ние

Два графа изоморфны, если между **множествами их вершин** можно установить взаимно-однозначное соответствие, **сохраняющее смежность**.

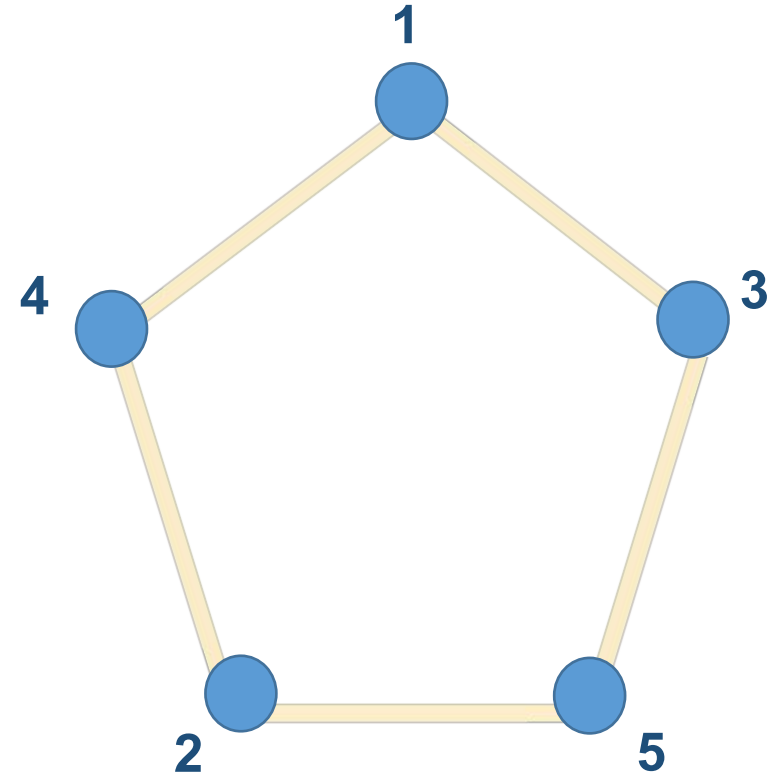
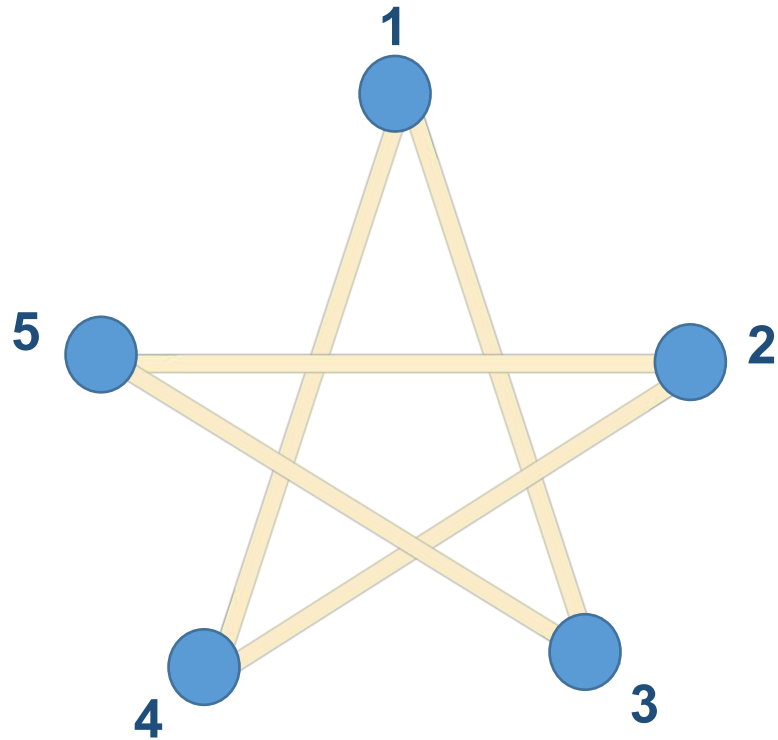
Другими словами, два графа равны, если их **соответствующие** вершины соединены **одинаково**.

Маленькая проверка: мысленно «**деформируйте**» один из графов так, чтобы он стал похож на второй. Если получилось, то...

...ура!- эти графы изоморфны, а вы великолепны! А вот если нет — это уже другая история....

Например, поиграем в спички: соберём звезду и пятиугольник.

Итак, перед нами две фигуры. Но точно ли они различаются?



Заметим, что в 1-м графе можно удалить три ребра соединяющие вершины (5, 3), (4, 2) и (5, 2). В результате, получится такой же 5-угольник, что и на 2-м рисунке.

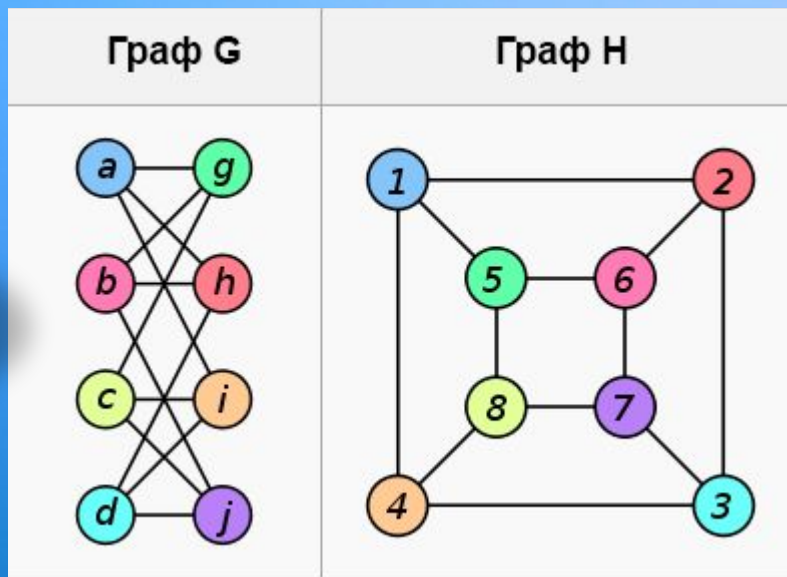
СТРОГОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИЗОМОРФНЫХ ГРАФОВ



Определе
ние

Два графа $G = \langle V, X \rangle$ и $H = \langle W, Y \rangle$ (V, W – множества вершин; X, Y – множества ребер) называются изоморфными, если существует биективное отображение $\phi: V \rightarrow W$, сохраняющее смежность, такое, что для вершин $u, v \in V$ $(\phi(u), \phi(v)) \in Y \Leftrightarrow (u, v) \in X$. В этом случае отображение ϕ называют изоморфизмом.

Пример



Данные графы изоморфны, т.к. между множествами их вершин существует *изоморфизм* - каждой вершине одного графа соответствует вершина второго графа того же цвета.



Выясним, существует ли изоморфизм для графов G и H , изображенных ниже:

u_1

u_2

w_1

w_2

G :

u_4

u_3

H :

w_4

w_3

Полученные вершины u_1, u_2, u_3, u_4 графа G соответствуют вершинам w_1, w_2, w_3, w_4 графа H . Очевидно, что u_1 и u_3 смежны в графе G , но не смежны в графе H . Значит, графы G и H не являются изоморфными.



Задача

Выяснить, изоморфны ли графы, можно перебором всех взаимно-однозначных отображений множества вершин одного из них в множество вершин другого. Однако таких отображений имеется $p!$

Для более простой проверки будем пользоваться инвариантами, то есть такими характеристиками графов, значения которых сохраняются при изоморфизмах.

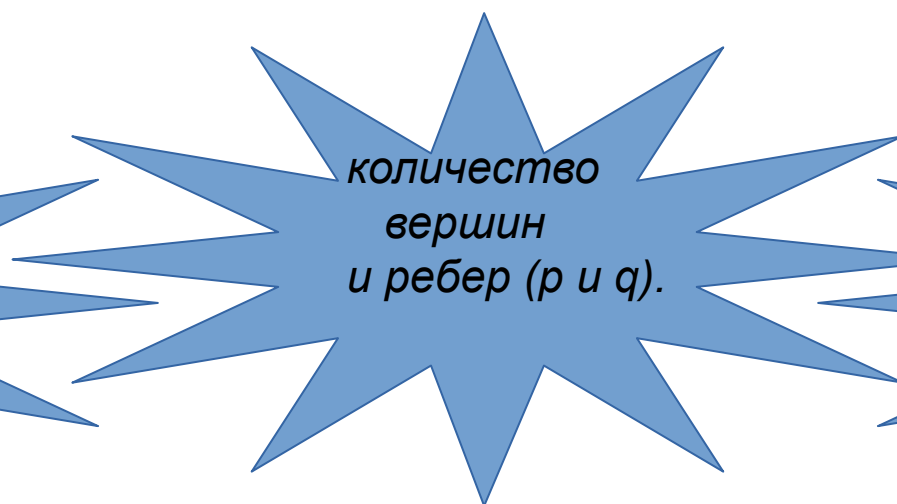
Инвариант графа G – это число или последовательность чисел, связанных с графом G .



Простейшие инварианты



k — число
компонент связности



количество
вершин
и ребер (p и q).



спектр степеней
вершин



циклы и цепи
определенной длины и
их количество



количество мостов
и разделяющих вершин



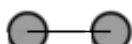
радиус(rad) и
диаметр($diam$)

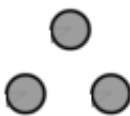
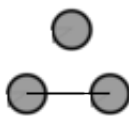
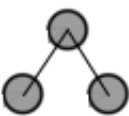
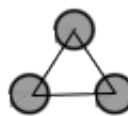


Задача

Полный набор инвариантов (код графа) определяет граф с точностью до изоморфизма. В частности, число вершин и число ребер графа образуют полный набор инвариантов для всех графов с числом вершин не больше трех.

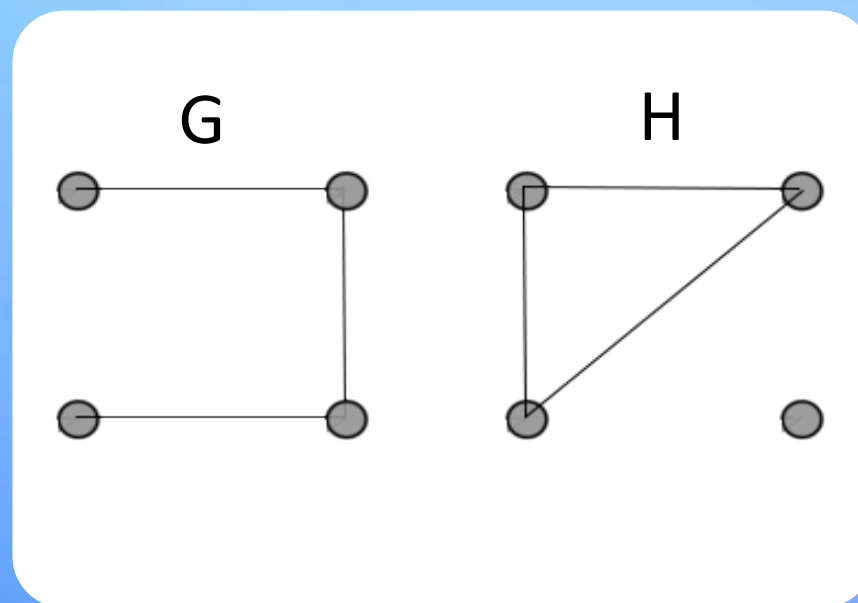
$p=1$ 

$p=2$  

$p=3$    
 $q=0$ $q=1$ $q=2$ $q=3$

Задача

Если же $p > 3$, то чисел вершин и ребер графа уже недостаточно для создания кода графа. Так, например, графы G и H , представленные на рисунке ниже и имеющие 4 вершины и 3 ребра, не изоморфны, т. к. G – связный, а H – нет.



АЛГОРИТМ



1. Пытаемся доказать, что графы не изоморфны. Для этого составим список различных инвариантов в порядке возрастания сложности их нахождения.

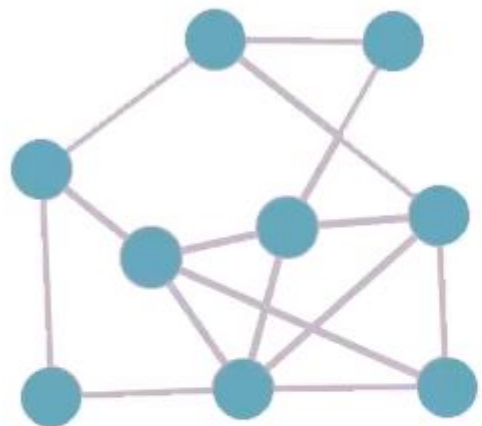
2. Последовательно сравниваем значения инвариантов.

К сожалению, в общем случае неизвестен код графа, который бы позволил по этой процедуре установить изоморфность графов. Поэтому

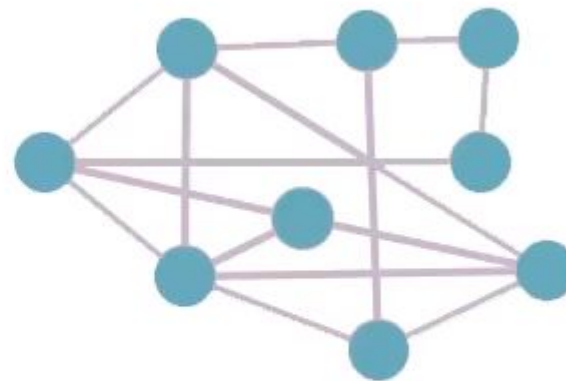
3а. Если есть несовпадающие инварианты, то графы не изоморфны.

3б. При совпадении достаточно большого числа инвариантов целесообразно попробовать доказать, что графы изоморфны. Для этого достаточно привести изоморфизм.

G:



H:



Пример 1

Пример 2

Пример 3

Пример 4