

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Теория графов — это раздел математики, включающий в себя систему терминов и обозначений, которые позволяют сравнительно просто описывать сложные процессы и явления.

Началом возникновения теории графов явилась **задача о кенигсбергских мостах**, которую решил **Л. Эйлер**. Задача заключалась в том, чтобы пройти по семи мостам только один раз и вернуться в исходную часть города.

Графом $G = (X, U)$ называется совокупность двух множеств: непустого множества X (вершин) и множества U (ребер), т.е.

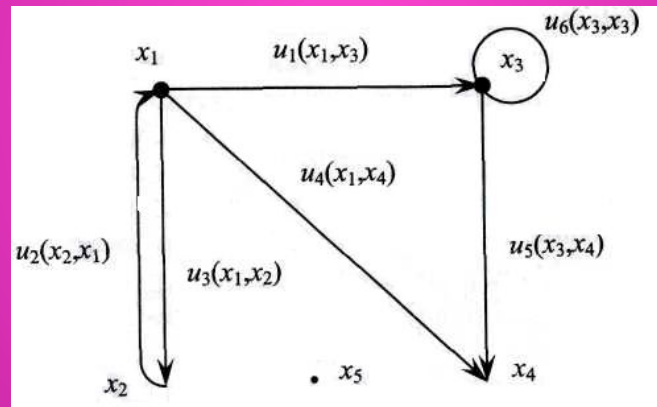
$$G(X, U) = \{X, U\}, X \neq \emptyset, U = \{u_k\}, k = \overline{1, n}.$$

Каждая дуга соединяет две вершины графа, одна из которых является начальной, другая конечной и направлена от первой вершины ко второй. Обозначают дуги:

$$U_i = (x_1, x_2), U_i \text{ или } (x_1, x_2).$$

Обычно граф изображают диаграммой: вершины — точками или кружочками, а ребра — линиями.

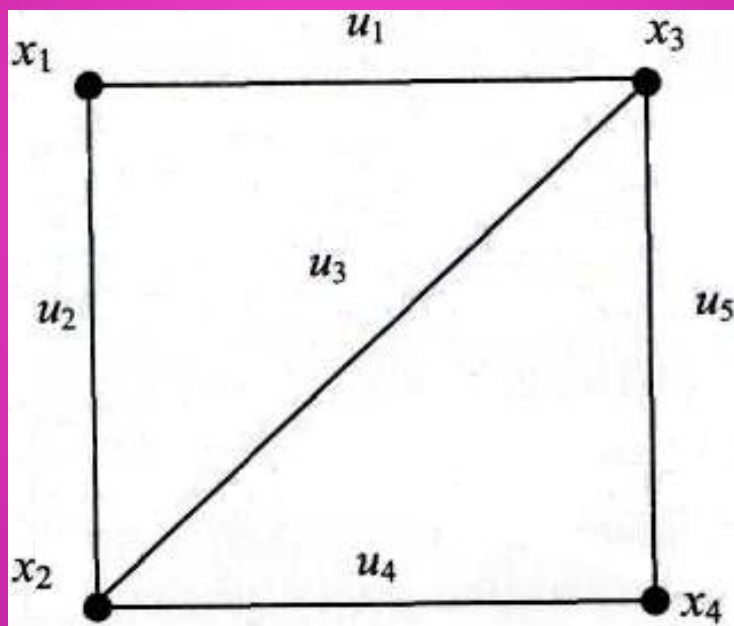
Если ребра графа ориентированы, т.е. показаны стрелкой от вершины к вершине, то они называются дугами, а такой граф называется ориентированным или орграфом.



Орграф

Для орграфа на рис. Соответствие $\Gamma(x_1) = \{x_2, x_3, x_4\}$, т.е. вершины x_2, x_3, x_4 являются конечными вершинами дуг, у которых начальной вершиной будет x_1

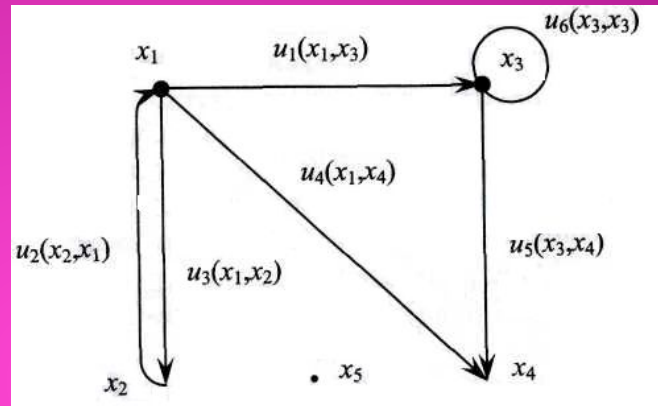
Если ребра не имеют ориентации, то граф называется неориентированным или неографом.



Неограф

- **Примеры.**

- $\Gamma(x_2) = \{x_1, x_3\}$



- $\Gamma(x_5) = \emptyset$ — пустое множество;

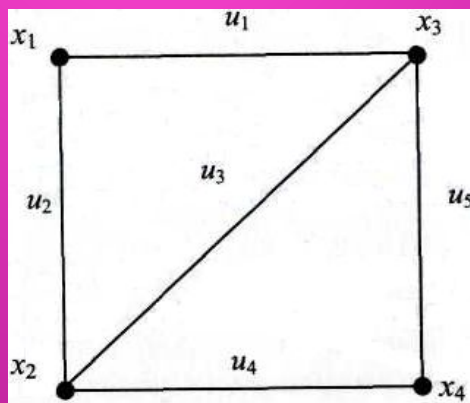
- $\Gamma(x_3) = \{x_4, x_3\}$

В случае неографа, предполагается, что соответствие Γ задает такой ориентированный граф, который получается из исходного графа заменой:

каждого ребра двумя противоположно направленными дугами, соединяющими те же вершины.

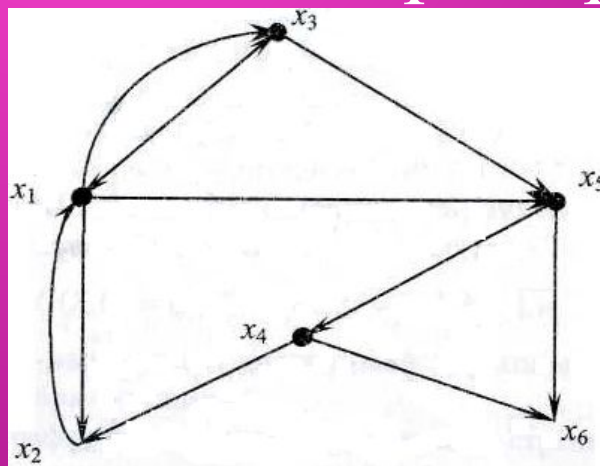
Например, для неографа, приведенного на рис.

$\Gamma(x_3) = \{x_1, x_2, x_3\}$ и т.д.

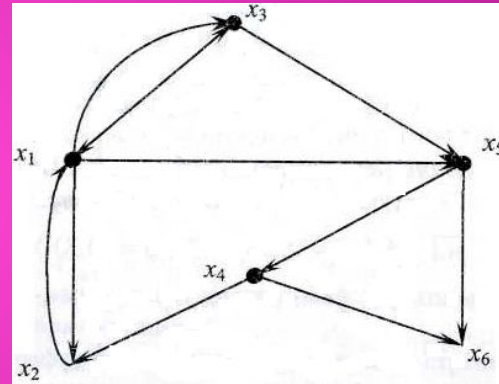


- Так как $\Gamma(x_i)$ представляет множество вершин $x_k \in X$, для которых в G существует дуга (x_k, x_i) , то через $\Gamma^{-1}(x_i)$ обозначают множество вершин x_k для которых в графе существует дуга (x_k, x_i) , и называют обратным соответствием. Например, для орграфа G , рис.

$$\begin{aligned}\Gamma^{-1}(x_1) &= \{x_2, x_3\}, \\ \Gamma^{-1}(x_2) &= \{x_1, x_4\}, \\ \Gamma^{-1}(x_6) &= \{x_4, x_5\}.\end{aligned}$$

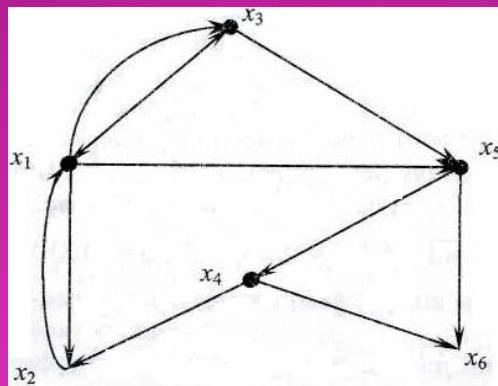


- Если отображение $\Gamma(x_i)$ распространяется не на одну вершину, а на множество вершин $X_m = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, то под $\Gamma(x_m)$ понимают объединение $\Gamma(x_1) \cup \Gamma(x_2) \cup \dots \cup \Gamma(x_m)$
- Например, для орграфа



- соответствиями будут
- $\Gamma(\{x_2, x_3\}) = \{x_1, x_5\}$, $\Gamma(\{x_1, x_4\}) = \{x_2, x_3, x_5, x_6\}$.
- Отображение $\Gamma(\Gamma(x_i))$ записывают $\Gamma^2(x_i)$.
- Тройное отображение $\Gamma(\Gamma(\Gamma(x_i)))$ записывают $\Gamma^3(x_i)$ и т.д.

Для орграфа,

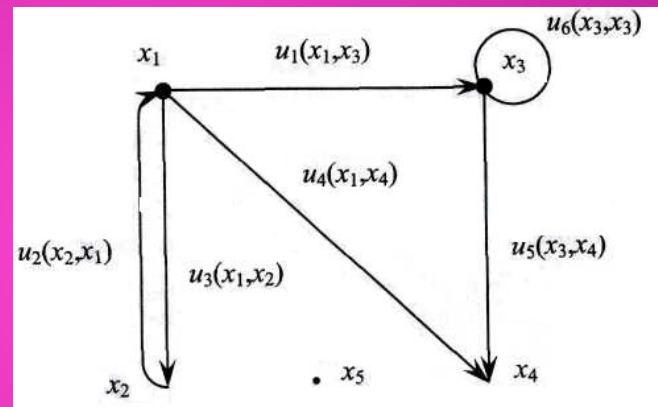


запишем

$$\begin{aligned}\Gamma^2(x_1) &= \Gamma(\Gamma(x_1)) = \Gamma(\{x_2, x_3, x_5\}) = \{x_1, x_4, x_5, x_6\}, \\ \Gamma^3(x_1) &= \Gamma(\Gamma^2(x_1)) = \Gamma(\{x_1, x_4, x_5, x_6\}) = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}.\end{aligned}$$

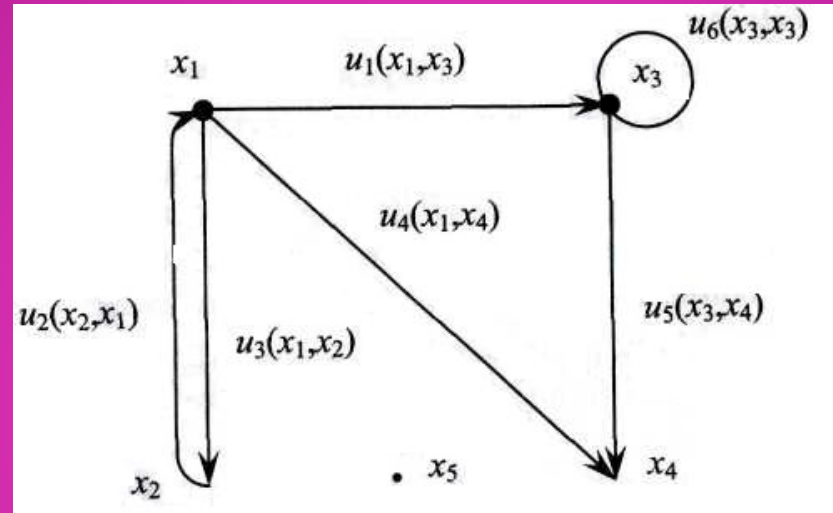
С каждой вершиной графа связаны два множества (соответствия $\Gamma^+(x_i)$ и $\Gamma^-(x_i)$). $\Gamma^+(x)$ — множество тех смежных с x_i - вершин, в которые заходят дуги из x_i . $\Gamma^-(x_i)$ — множество таких вершин смежных с x_i , из которых выходят дуги, заканчивающиеся в x_i .

- Вершины x_i и x_k называются **смежными**, если существует дуга (ребро) $U(x_i, x_k)$ соединяющая их. Например, (x_1, x_2) , (x_1, x_3) , (x_1, x_4) , вершины x_2 и x_3 не являются смежными, рис.



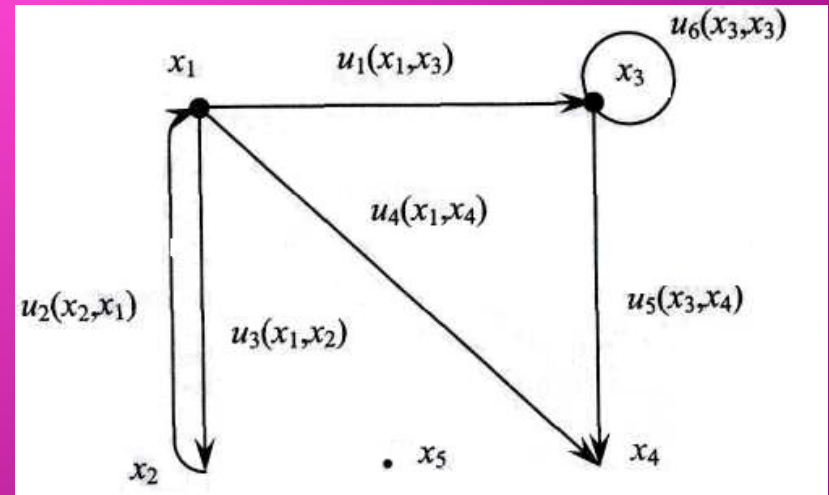
- Если вершины x_i и x_k являются концами дуги $U(x_i, x_k)$, то говорят, что эти вершины **инцидентны дуге U** (или дуга U инцидентна вершинам x_i, x_k).

- **Степенью или валентностью вершины графа** называется количество инцидентных ей дуг (ребер) и обозначается $d(x_i) = \Gamma(x_i)$. Например, $d(x_1) = 4$, $d(x_2) = 2$



- Вершина, степень которой равна нулю, называется **изолированной** $d(x_5) = 0$.
- Число дуг орграфа, которые имеют вершину x_i своей начальной вершиной называется **полустепенью исхода** и обозначается $d^+(x_i)$.

- Аналогично, количество дуг орграфа, которые имеют вершину x_k конечной вершиной, называется **полустепенью захода** и обозначается $d^-(x_i)$.
- Например, $d^+(x_1) = 3$,
 $d^+(x_2) = 1$,
 $d^-(x_1) = 1$,
 $d^-(x_4) = 2$.



- Теорема Эйлера. Сумма степеней вершин графа равна удвоенному количеству дуг (ребер):

$$\sum_{i=1}^n d(x_i) = 2m,$$

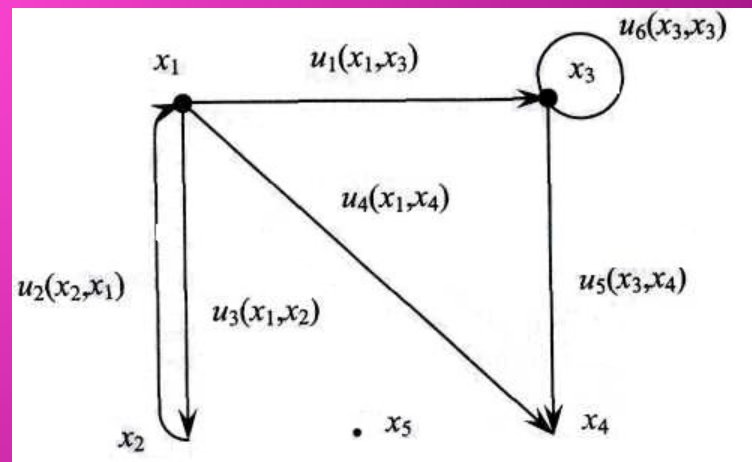
где n — число вершин графа, m — число дуг.

- Следствие 1. Число вершин нечетной степени всегда четно.
- Следствие 2. Сумма полустепеней вершин орграфа равна удвоенному числу дуг:

$$\sum_{i=1}^n d^+(x_i) + \sum_{i=1}^n d^-(x_i) = 2m.$$

Путем (или ориентированным маршрутом) орграфа называется последовательность дуг, в которой конечная вершина любой дуги, отличной от последней, является начальной вершиной следующей. Например, пути из вершины x_1 в вершину x_4 орграфа

$$\begin{aligned} P_1 &= \{u_1, u_5\}, \\ P_2 &= \{u_3, u_2, u_1, u_5\}, \\ P_3 &= \{u_1, u_6, u_5\}, \\ P_4 &= \{u_4\}. \end{aligned}$$



- **Ориентированной цепью (орцепью)** или *простым путем* называется такой путь, в котором каждая дуга используется не более одного раза.
- **Простой орцепью (элементарным путем)** называется путь, в котором каждая вершина графа применяется не более одного раза.

- **Маршрут** — это неориентированный «двойник» пути, и это понятие рассматривается в тех случаях, когда можно пренебречь направленностью дуг в орграфе.
- **Маршрутом** называется последовательность ребер $u_1, u_2, \dots, u_n$, в которой каждое ребро u_i , за исключением, возможно, первого и последнего ребер, связано с ребрами u_{i-1} и u_{i+1} своими двумя концевыми вершинами.

Последовательность дуг

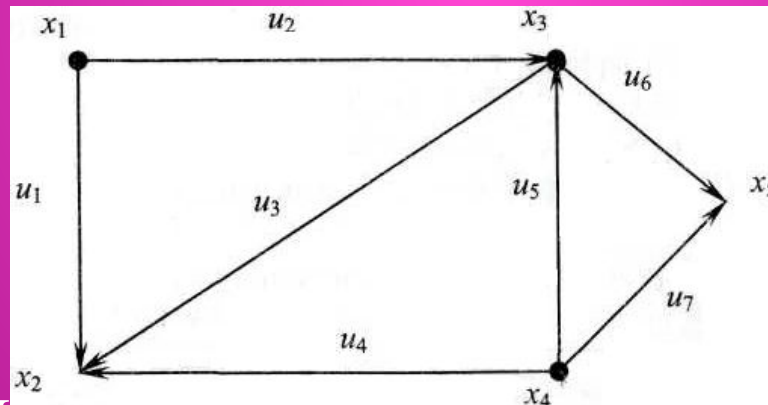
в орграфе

, являются маршрутами.

$$M_1 = \{\bar{u}_1, \bar{u}_3, \bar{u}_5, \bar{u}_7\},$$

$$M_2 = \{\bar{u}_2, \bar{u}_5, \bar{u}_4, \bar{u}_3, \bar{u}_6\},$$

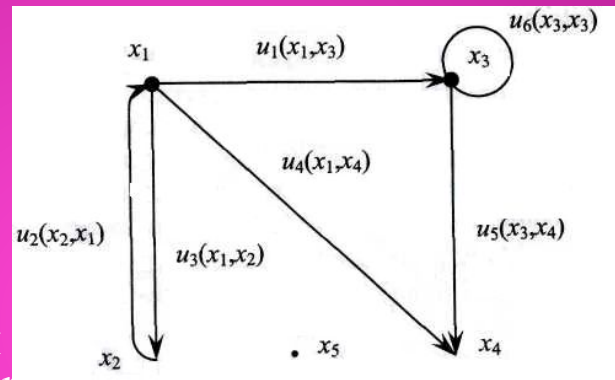
$$M_3 = \{\bar{u}_1, \bar{u}_4, \bar{u}_5, \bar{u}_3, \bar{u}_4, \bar{u}_7\}.$$



*Черта над дугой указывает **исключение ориентации дуг**, т.е. дуги рассматриваются как ребра.*

Маршруты различают простые и цепи (ребро в таком маршруте используется только один раз) и элементарные или простые цепи, в которых вершина встречается только один раз.

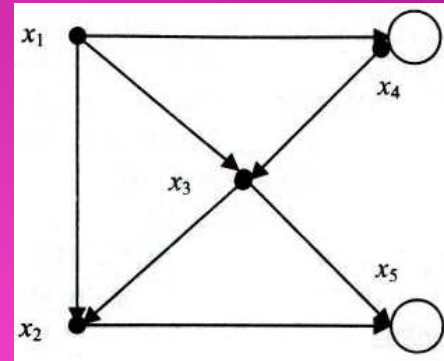
Петлей называется дуга графа, у которой начальная и конечные вершины совпадают $u_6(x_3, x_3)$



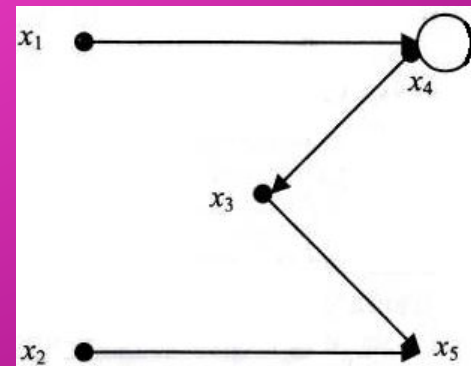
- Путь $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ называется **путем**, если конечная вершина дуги u_n совпадает с начальной вершиной дуги u_1 .
- Замкнутые пути в орграфах называются **контурами**.
- Замкнутые маршруты (цепи) в неографах называются **циклами**.
- Если дугам орграфа G ставится в соответствие какое-либо число, то говорят, что дуга имеет пропускную способность, величина которой — расстояние между вершинами или время прохождения точки, или объем перевозимого и т.д.
- Если дуга $u = (x_i, x_k)$, приписывается число c_{ik} , называемое **пропускной способностью дуги**, а граф G называется **графом со взвешанными дугами**.

Разновидности графов

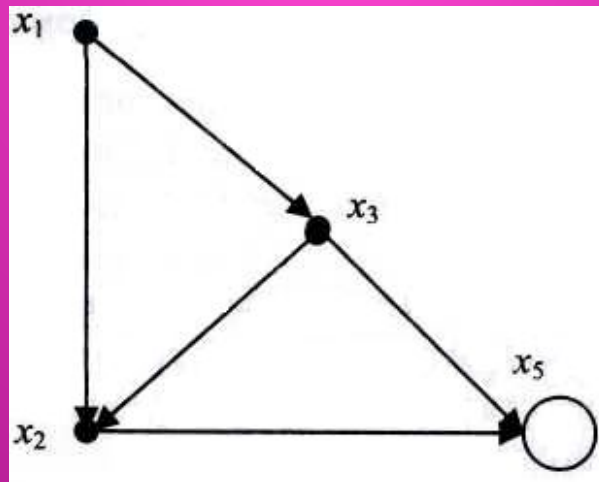
- 1. Подграфы или суграфы
- Пусть дан граф $G = (X, U)$



Остовным подграфом G_p графа G называется граф, для которого $X = X$, а $U_p \subset U$, т.е. остовный граф имеет то же самое множество вершин, но множество дуг подграфа G_p является подмножеством множества дуг исходного графа.



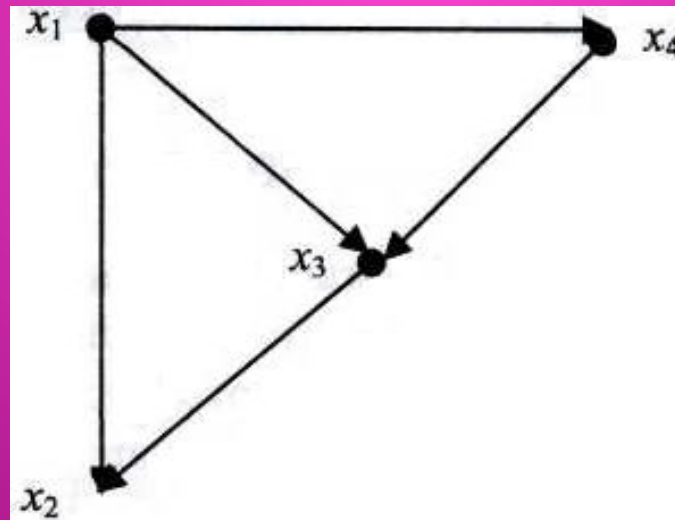
Порожденным подграфом G_t , называется граф $G_t = (X_t, \Gamma_t)$, для которого $X_t \subset X$ и для каждой вершины $x_i \in x_p$, $\Gamma_t(x_i) = \Gamma(x_i) \cap x_p$, т.е. порожденный подграф состоит из подмножества вершин X_t множества вершин исходного графа и всех таких дуг графа G , у которых конечные и начальные вершины принадлежат подмножеству X_t (рис.).



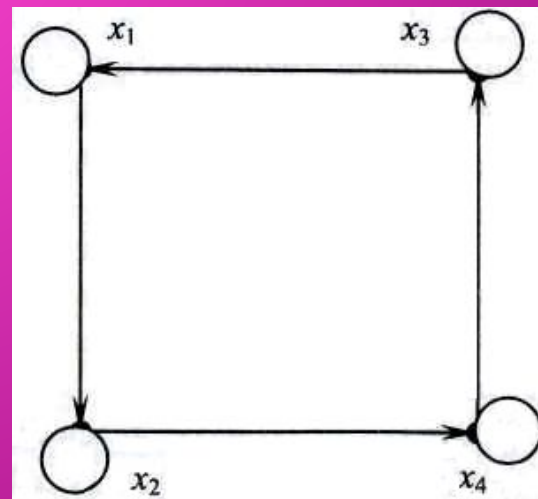
Подграфом $G_n = (X_n, U_n)$ или частичным подграфом $G = (X, U)$ является граф, для которого выполняется условие

$$X_n \subset X \text{ и } U_n \subset U, \text{ т.е. } G_n \subset G$$

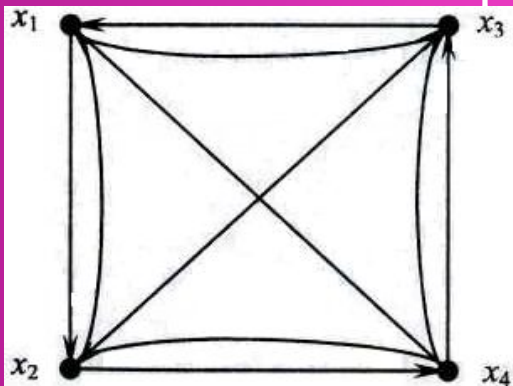
(рис.)



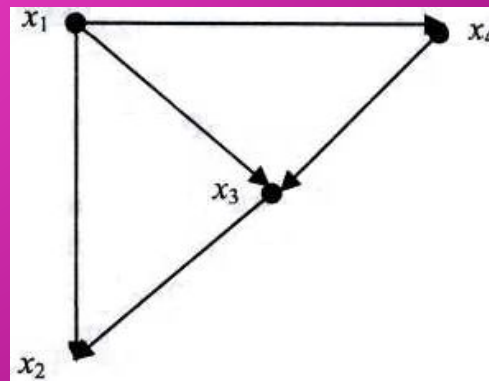
Граф $G = (X, U)$ называется **полным**, если для любой пары вершин существует дуга (ребро). Примером такого графа является любой многоугольник с проведенными в нем всеми диагоналями, а каждая вершина имеет петлю (рис.).



Граф $G = (X, U)$ называется **симметричным** (рис. 10.9), если в множестве дуг U для любой дуги (x_i, x_k) существует также противоположно направленная дуга (x_k, x_i) .



В противоположном случае граф называется **ассиметричным** (рис.).

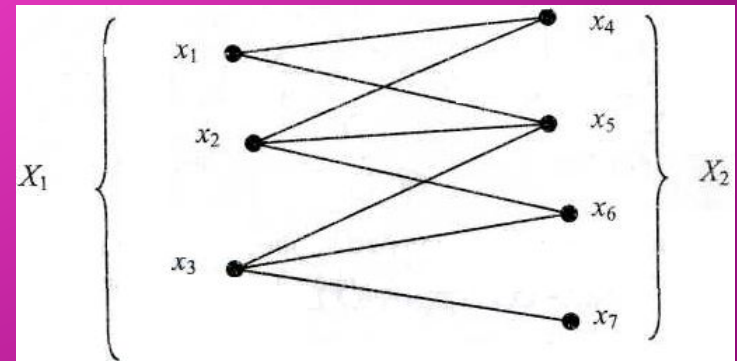


- **Двудольным графом (биграфом или четным)** $G = (X, U)$ называется такой граф, у которого множество X вершин разделено на два непересекающихся множества X_1 и X_2 , т.е.

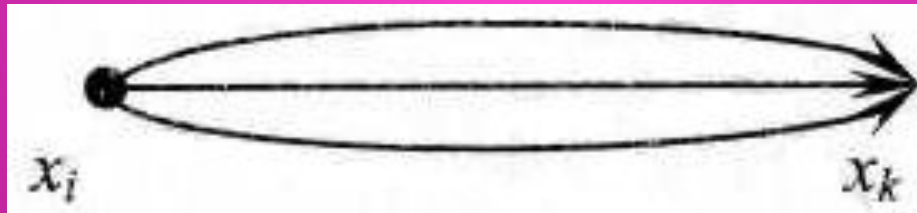
$$X_1 \cup X_2 = X; X_1 \cap X_2 = \emptyset,$$

причем всякое ребро (дуга) из U соединяет вершину из X_1 с вершиной из X_2 .

Множества X_1 и X_2 называются **долями** такого графа (рис.).



5. **Мультиграфом** называется граф, у которого две смежные вершины x_i и x_k соединены более чем одной дугой (ребром) в одном и том же направлении (рис.).



Наибольшее число дуг (ребер) графа определяет его **кратность**.

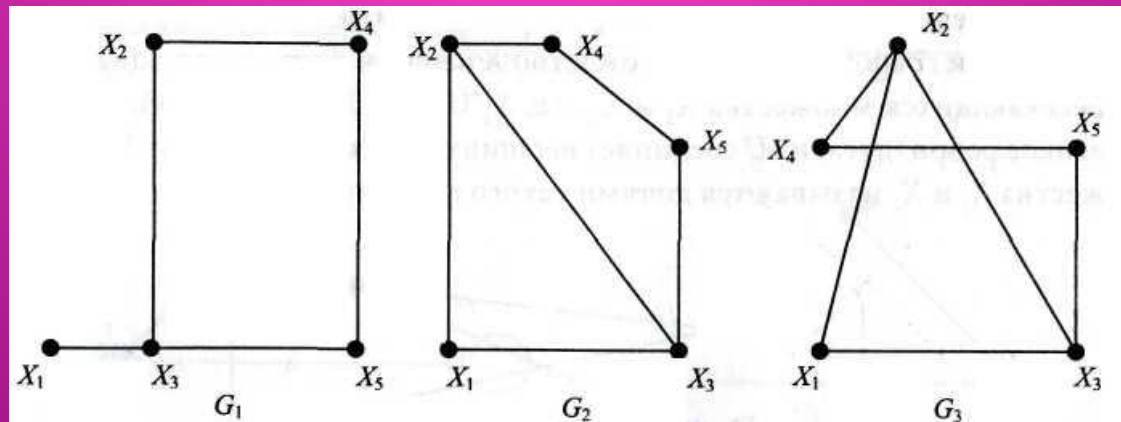
• 6. Изоморфные графы

Термин «изоморфный» означает в переводе с латинского (иос — равный, одинаковый и морфи — форма, вид), т.е. одинаковый по форме.

Графы на плоскости можно представить различными диаграммами.

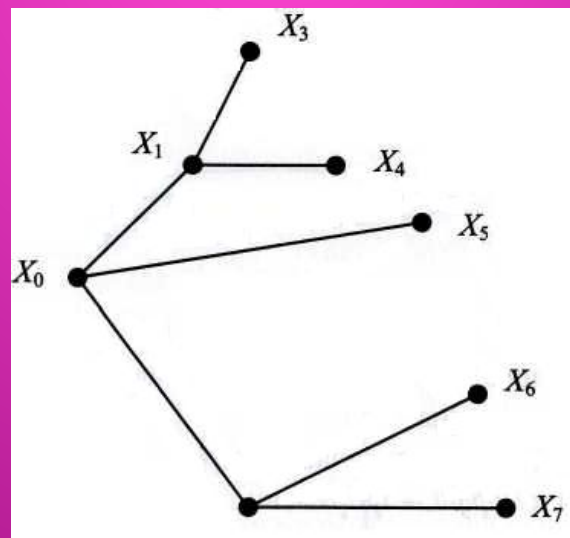
Два графа G_1 и G_2 называются изоморфными, если они имеют одно и то же число вершин и две любые вершины x_1 и x_k одного графа соединены ребром (дугой), то и соответствующие им вершины другого графа тоже соединены ребром (рис.).

Обозначаются $G_1 \sim G_2$.



- 7. **Древовидные графы** являются простейшим классом графов и самым распространенным видом графов, применяемых в программировании.

Древовидным графом (деревом) называется неориентированный связный граф с числом вершин не менее двух, не содержащий петель и циклов (рис.).



- Вершины, инцидентные только одному ребру дерева, называются **висячими** (x_3, x_4, x_5, x_6 и x_7).
- Ориентированным называется древовидный граф без циклов, в котором полустепень захода каждой вершины, за исключением одной, например, вершины x_0 , равна единице, а полустепень захода вершины x_0 равна нулю. Вершина x_0 называется **корнем** дерева (рис.).

