

# **МЕХАНИКА**

## **КИНЕМАТИКА**

### **Механическое движение**

Механическим движением тел называют изменение их положения (или положения их частей) в пространстве с течением времени. В основе классической механики лежат законы Ньютона.

Кинематика изучает механическое движение с геометрической точки зрения и не рассматривает причины, вызывающие это движение.

В механике рассматривается движение таких объектов, как материальная точка и абсолютно твердое тело.

Материальной точкой называется тело, размерами которого в данных условиях можно пренебречь.

Абсолютно твёрдым телом называется тело, деформацией которого в данных условиях можно пренебречь. Абсолютно твёрдое тело можно рассматривать как систему материальных точек, жестко связанных между собой.

В механике Ньютона постулируется, что пространство и время абсолютны.

Абсолютное пространство трехмерно, непрерывно, эвклидово, однородно, изотропно.

Абсолютное время одномерно, непрерывно, однородно, анизотропно.

Абсолютное пространство и абсолютное время не взаимосвязаны.

## Кинематические характеристики движения материальной точки

Описать движение материальной точки — значит знать ее положение относительно выбранной системы отсчета в любой момент времени.

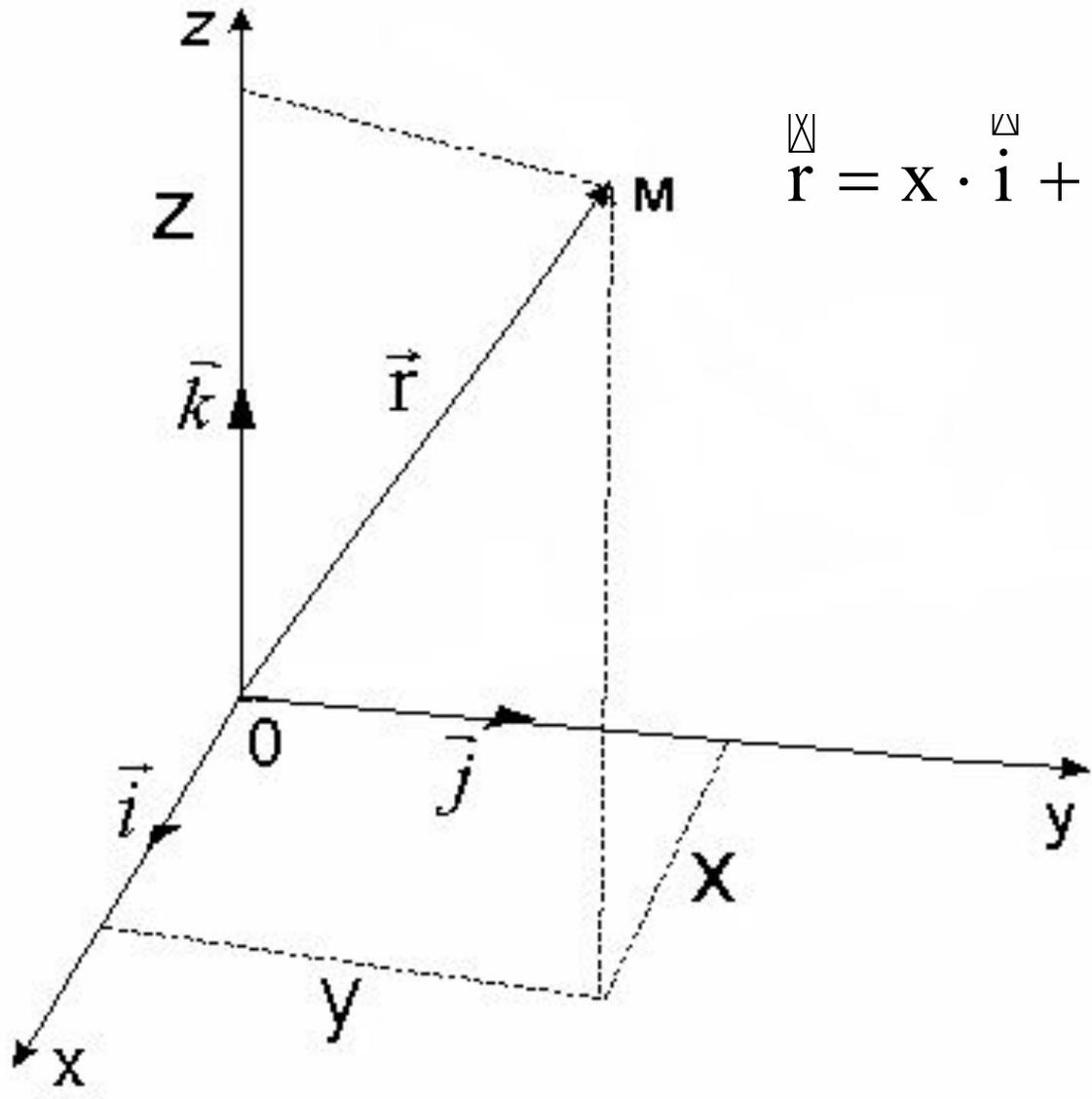
Системой отсчёта называется система координат, связанная с телом отсчёта и снабжённая синхронизированными часами.

Наиболее часто используется прямоугольная декартова система координат.

Положение материальной точки характеризуется радиусом-вектором, проведённым из начала координат в данную точку.

Проекции радиуса-вектора на координат-ные оси соответствуют координатам точки в выбранной системе координат:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$



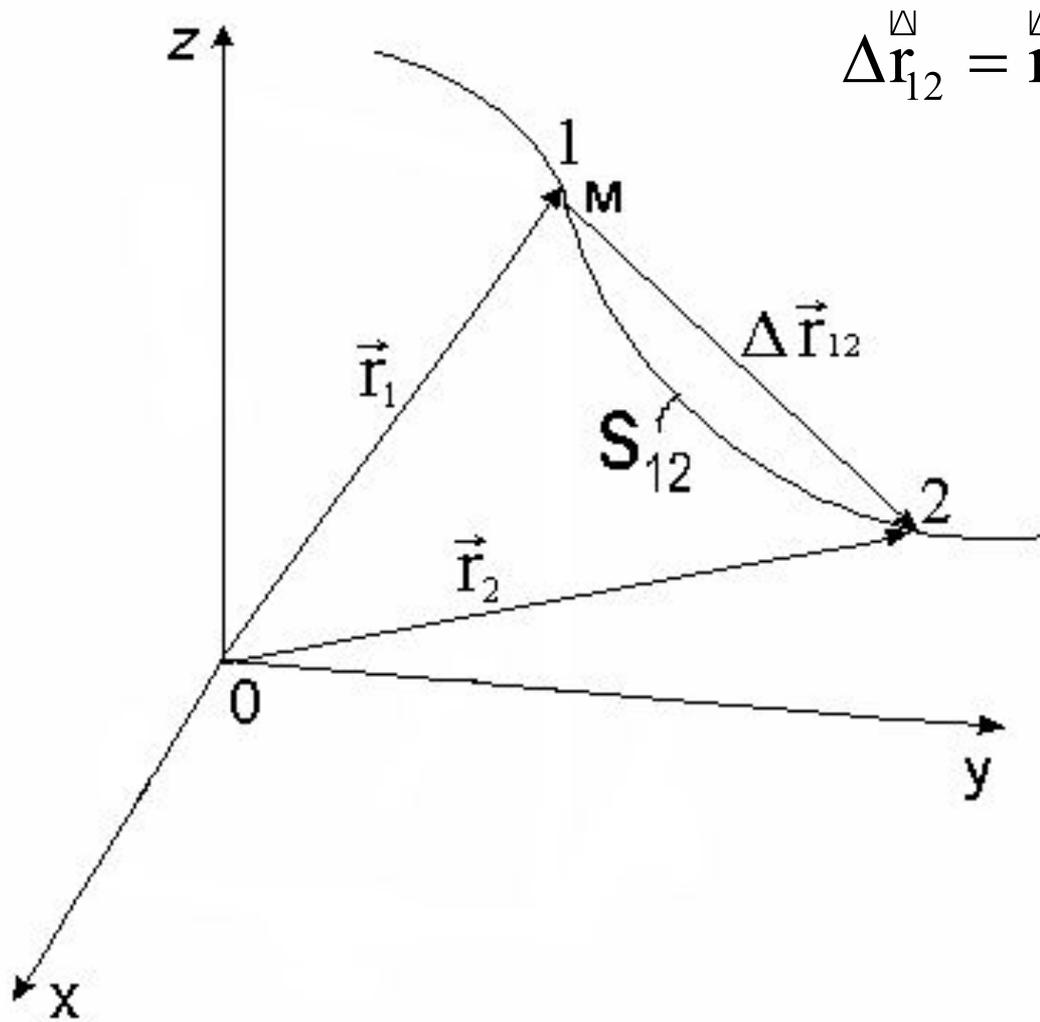
$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

Движение материальной точки задано, если известна зависимость координат точки от времени, т.е.

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad \text{или} \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

Кинематические уравнения движения материальной точки, или закон движения точки.

В процессе движения конец радиуса-вектора, связанный с точкой, описывает в пространстве кривую, называемую траекторией движения материальной точки.



$$\Delta \vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Перемещением материальной точки называют вектор, проведённый из начальной точки в конечную точку траектории:

$$\Delta \overset{\curvearrowright}{\mathbf{r}}_{12} = \overset{\curvearrowright}{\mathbf{r}}_2 - \overset{\curvearrowright}{\mathbf{r}}_1 = \overset{\curvearrowright}{\mathbf{r}}(t_2) - \overset{\curvearrowright}{\mathbf{r}}(t_1)$$

$$\Delta \vec{\mathbf{r}}_{12} = \Delta x_{12} \cdot \vec{\mathbf{i}} + \Delta y_{12} \cdot \vec{\mathbf{j}} + \Delta z_{12} \cdot \vec{\mathbf{k}}$$

$$|\Delta \vec{\mathbf{r}}_{12}| = \sqrt{\Delta x_{12}^2 + \Delta y_{12}^2 + \Delta z_{12}^2}$$

Путь материальной точки  $S_{12}$  – это длина траектории.

Элементарное перемещение за бесконечно малый промежуток времени  $dt$  ( $\Delta t \rightarrow 0$ ) обозначается  $d\vec{r}$ . Элементарное перемещение направлено по касательной к траектории.

Путь, пройденной точкой за время  $dt$ , называется элементарным путем:  $dS$ .

$$\Delta \vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \quad |\vec{dr}| = dS \quad S_{12} = \int_1^2 dS = \int_1^2 |\vec{dr}|$$

Скорость – векторная физическая величина, характеризующая быстроту изменения положения тела в пространстве, равная перемещению тела за единицу времени. Различают среднюю и мгновенную скорости.

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}_{12}}{\Delta t_{12}} \quad - \text{ средняя скорость;}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad - \text{ мгновенная скорость;}$$

$$\langle |\vec{v}| \rangle = \frac{S_{12}}{\Delta t_{12}} \quad - \text{ среднее значение модуля скорости.}$$

Вектор средней скорости направлен так же, как и вектор перемещения. Вектор мгновенной скорости направлен по касательной к траектории движения так же, как вектор элементарного перемещения.

Модуль мгновенной скорости равен производной пути по времени:

$$v = \frac{dS}{dt}$$

В декартовой системе координат скорость можно представить через её проекции на оси:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k},$$

$$\text{где } v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

$$\text{Модуль скорости: } |\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Ускорение — векторная физическая величина, характеризующая быстроту изменения скорости с течением времени, равная приращению скорости за единицу времени. Различают среднее и мгновенное ускорения.

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}_{12}}{\Delta t_{12}} \quad - \text{ среднее ускорение,}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad - \text{ мгновенное ускорение.}$$

Вектор ускорения может быть представлен через его проекции на координатные оси:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

где:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \end{array} \right.$$

Модуль ускорения:  $|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

## Основная задача кинематики

Основная задача кинематики заключается в нахождении закона движения материальной точки.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \rightarrow \quad d\vec{v} = \vec{a} \cdot dt \quad \rightarrow \quad \int_{v_0}^v d\vec{v} = \int_{t_0}^t \vec{a} \cdot dt$$

$$\vec{v} - v_0 = \int_{t_0}^t \vec{a} \cdot dt \quad \rightarrow \quad \vec{v} = v_0 + \int_{t_0}^t \vec{a} \cdot dt$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \rightarrow \quad d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt \quad \rightarrow \quad d\vec{r} = \left( \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t \vec{a} \cdot dt \right) \cdot dt$$

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_{t_0}^t \left( \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t \vec{a} \cdot dt \right) \cdot dt$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \int_{t_0}^t \left( \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t \vec{a} \cdot dt \right) \cdot dt$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t \left( \mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{a} \cdot dt \right) \cdot dt$$

К вычислению этого интеграла сводится основная задача кинематики.

Рассмотрим частные случаи.  
Будем полагать  $t_0=0$ .

# 1. Равномерное прямолинейное движение.

$$\vec{a} = 0$$

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}_0 + \int_0^t \left( \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a} \cdot dt \right) \cdot dt = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}_0 \cdot dt = \\ &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot \int_0^t dt = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t\end{aligned}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$$

$$x = x_0 + v_{0x} t$$

## 2. Равнопеременное движение.

$$\vec{a} = \text{const} \neq 0$$

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}_0 + \int_0^t \left( \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a} \cdot dt \right) \cdot dt = \vec{r}_0 + \int_0^t (\vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t) \cdot dt = \\ &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \int_0^t dt + \vec{a} \cdot \int_0^t t \cdot dt = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{\vec{a} \cdot t^2}{2}\end{aligned}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{\vec{a} \cdot t^2}{2}$$

$$x = x_0 + v_{0x} \cdot t + \frac{a_x \cdot t^2}{2}$$