



Раздел 2: Колебания и волны

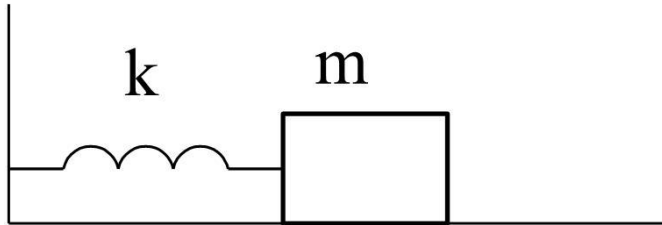
Тема 8. Динамика колебаний

Тема 8. Динамика колебаний



1. Дифференциальное уравнение колебаний. Математический и физический маятники.
2. Свободные затухающие колебания.
3. Вынужденные колебания. Резонанс.

1 учебный вопрос: Уравнение гармонического осциллятора.



$$ma = -kx$$

$$\ddot{m}x + kx = 0$$

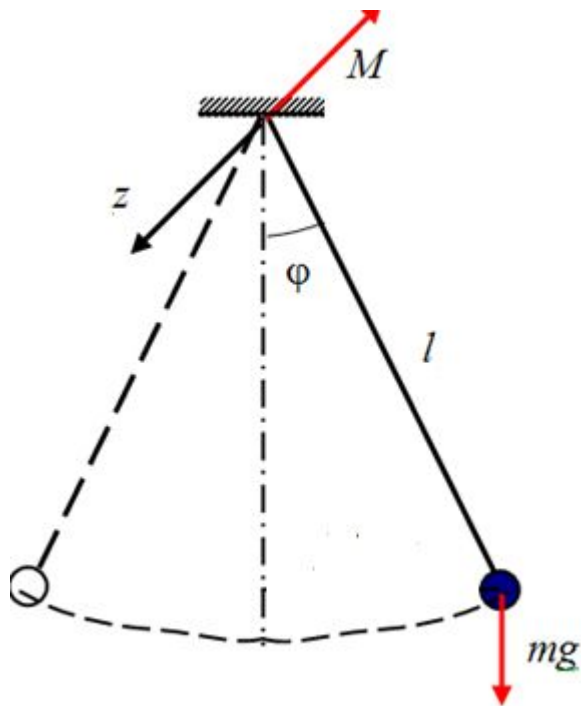
$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ где ω_0 — собственная частота колебаний (1)
дифференциальное уравнение гармонических колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \text{ — циклическая частота}$$

Решение: $x = A \cos(\omega_0 t + \alpha)$

Математический маятник

Математическим маятником называют идеализированную систему, состоящую из невесомой и нерастяжимой нити, на которой подвешено тело с сосредоточенной в одной точке массой, совершающее колебательное движение под действием силы тяжести.



$$M = J\varepsilon$$

$$\varepsilon = d^2\varphi/dt^2$$

$$J = ml^2$$

$$M = -mgl \sin \varphi$$

$$ml^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl \sin \varphi$$

$$ml^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl \sin\varphi$$

$$\sin\varphi \approx \varphi$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\varphi = 0 \quad (2) \quad \text{сравниваем с} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

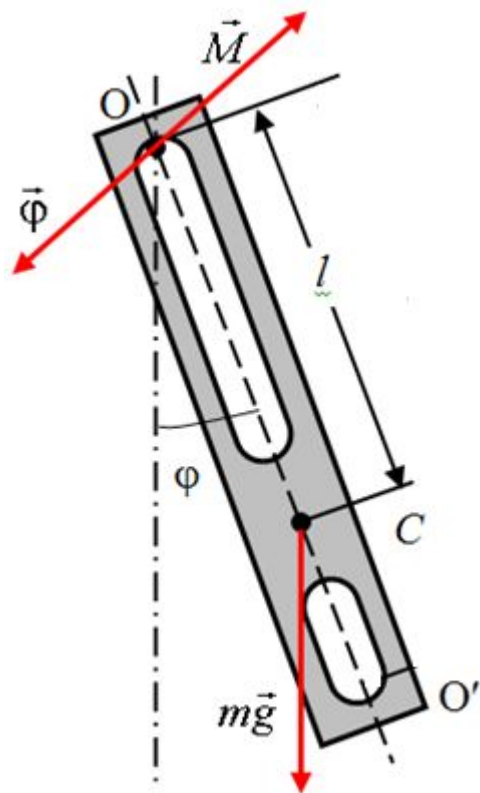
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (3)$$

Период колебаний математического маятника зависит только от ускорения свободного падения и от длины маятника и не зависит от его массы.

$$\text{Решение:} \quad \varphi = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (4)$$

Физический маятник

Физическим маятником называется любое твердое тело, способное под действием силы тяжести совершать колебания вокруг неподвижной оси, не совпадающей с его центром инерции.



По аналогии с математическим маятником:

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mgl \sin \varphi$$

В случае малых колебаний

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0 \qquad \omega_0^2 = \frac{mgl}{J_0} \qquad (5)$$

Решение дифференциального уравнения колебаний физического маятника (5) имеет вид

$$\varphi = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{J_0}{mgl}} \quad (6)$$

$$J_0 = J_C + ml^2$$

Сравним физический маятник с математическим маятником

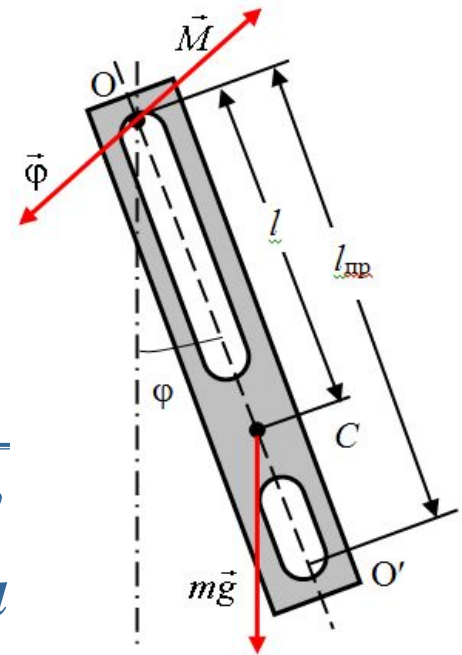
Приведенной длиной физического маятника называется длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_0}{mgl}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_{пр}}{g}}$$

$$l_{пр} = \frac{J_0}{ml} \quad (7)$$

Точка O' на прямой, соединяющей точку подвеса с центром инерции, лежащая на расстоянии приведенной длины от оси вращения, называется центром качания физического маятника.



2 учебный вопрос: Свободные затухающие колебания



$$F_{\text{опр}} = -rv = -r \frac{dx}{dt}$$

*r – коэффициент
сопротивления среды*

Уравнение второго закона Ньютона:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_{\text{упр}} + F_{\text{сопр}} \Rightarrow m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0} \quad (8)$$

$$2\beta = \frac{r}{m} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

ДУ затухающих колебаний

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

- ДУ затухающих колебаний

β - коэф.затухания; ω_0 - частота собственных колебаний без трения.

Решение:

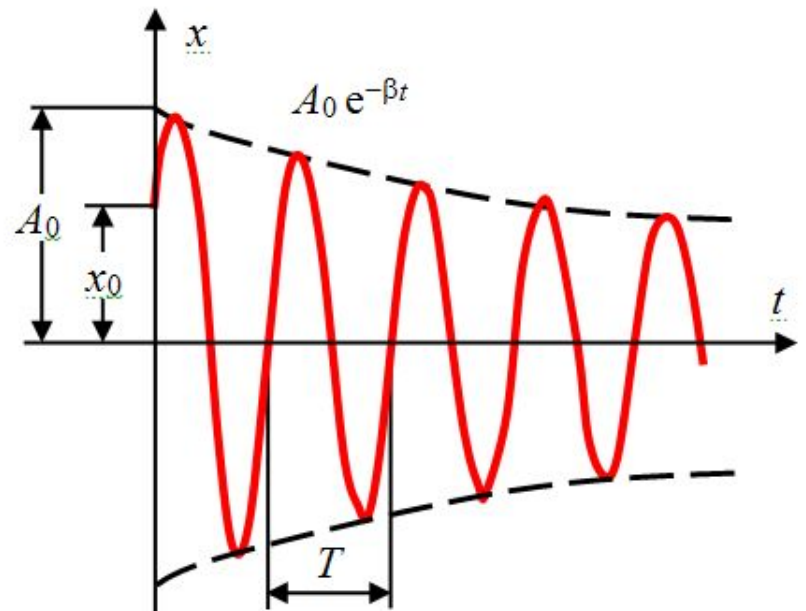
$$x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi)$$

(9)

при $\beta < \omega_0$

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ - частота затухающих колебаний

$$T = 2\pi / \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$



Характеристики затухания системы

1. Время релаксации (времени затухания) τ - время, за которое амплитуда уменьшается в $e = 2,72$ раз.

$$A(t) = A_0 e^{\beta t} \Rightarrow e^{\beta \tau} = e \Rightarrow \tau = \frac{1}{\beta}$$

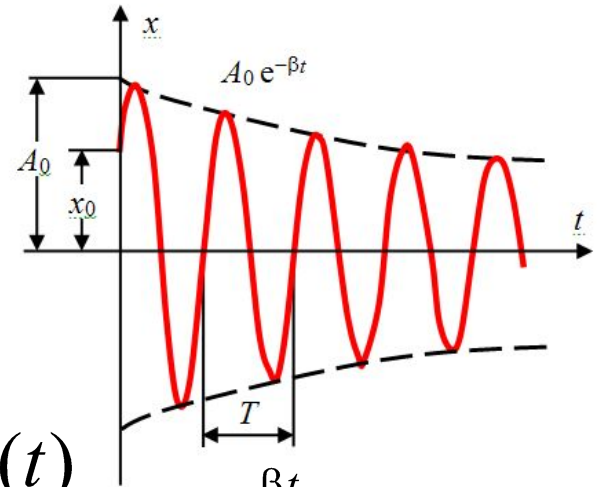
2. Коэффициент затухания β

3. Декремент затухания

$$\sigma = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}$$

4. Логарифмический декремент затухания

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T$$



5. Добротность колебательной системы - число полных колебаний, совершаемых системой за время затухания τ , умноженное на π :

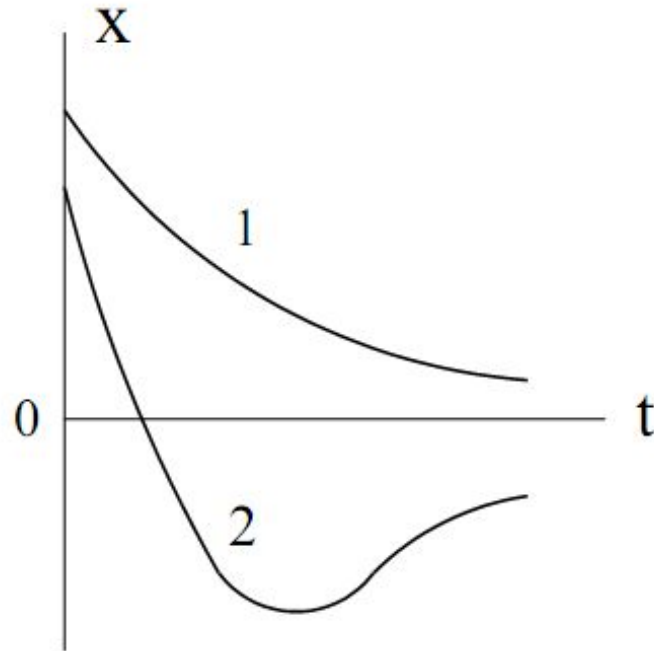
$$Q = \pi \frac{\tau}{T} \qquad Q = \frac{\pi}{\lambda}$$

Энергетический смысл добротности:

$$Q = 2\pi \frac{\text{Запас энергии в колебательной системе}}{\text{Потеря энергии за 1 период колебаний}}.$$

Добротность характеризует относительную убыль энергии колебательной системы из-за наличия трения на интервале времени, равном одному периоду колебаний.

Апериодический процесс



При $\beta > \omega_0$ частота ω' становится чисто мнимой

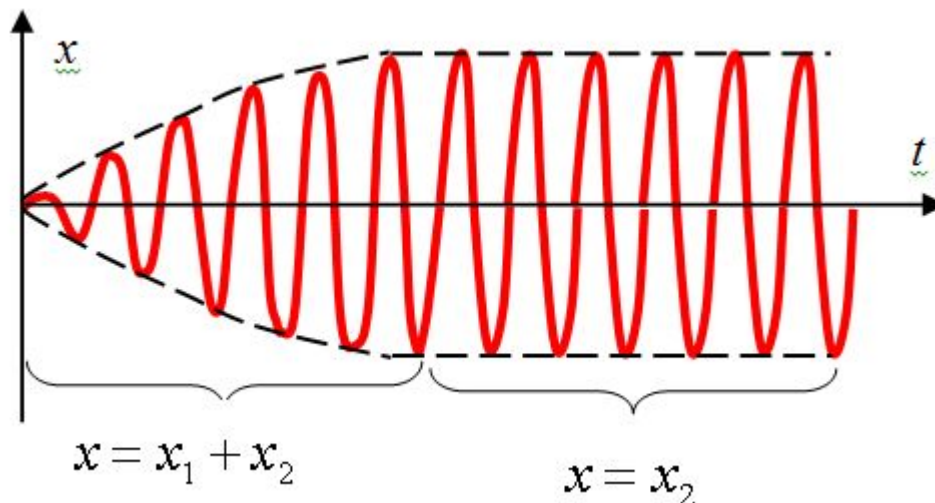
3 учебный вопрос: Вынужденные колебания. Резонанс.

Пусть колебательная система подвергается действию внешней вынуждающей силы:

$$F = F_0 \sin \omega t$$

Второй закон Ньютона: $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} + F_0 \sin \omega t$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \sin \omega t; \quad f_0 = \frac{F_0}{m} \quad (10)$$



Решение: $x_2 = A(\omega) \sin(\omega t - \alpha)$

(11)

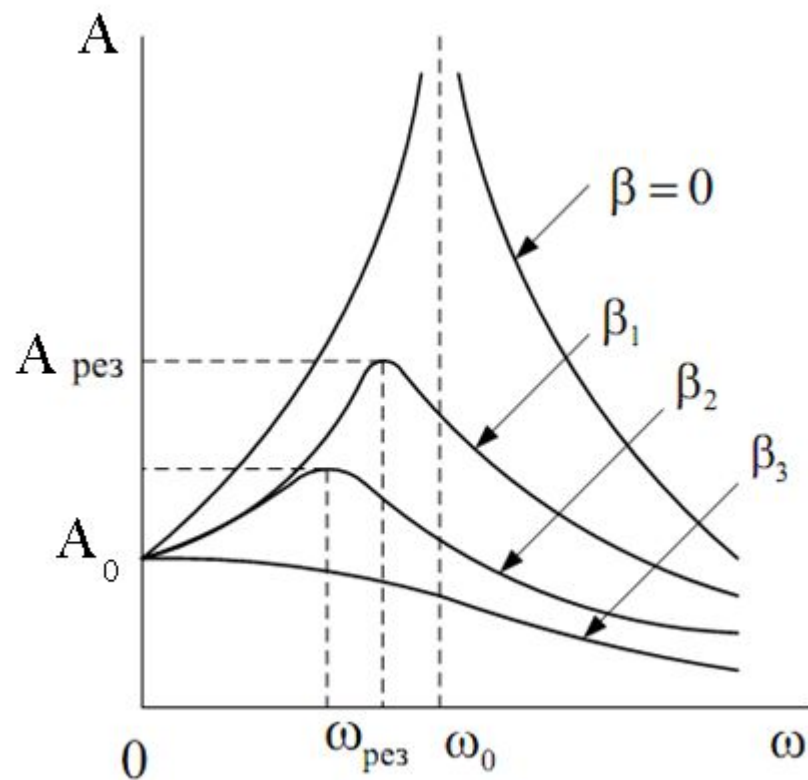
$$A = \frac{f_0}{\sqrt{4\beta^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$\omega \approx \omega_0$ - резонанс

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

$$A_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$



резонансная
кривая