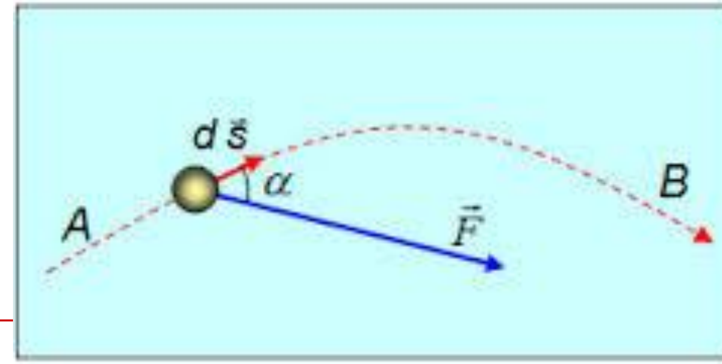
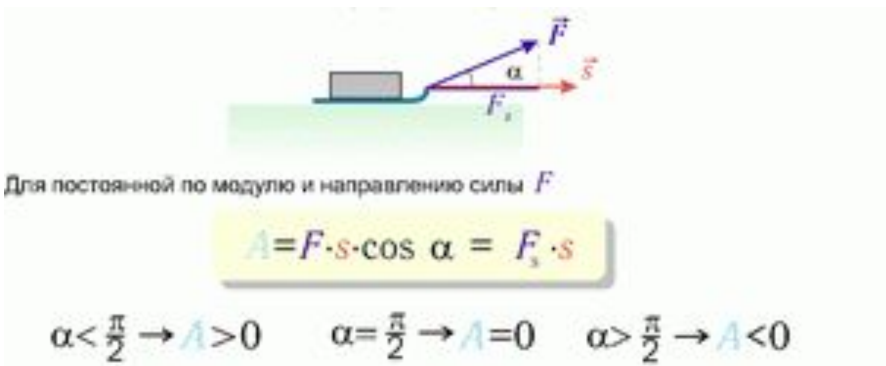
ТЕМА III. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ
§1. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

1. РАБОТА СИЛЫ



Физическая величина, равная скалярному произведению действующей на тело силы $\vec{F}$, на совершённое под действием этой силы элементарное перемещение $d\vec{S}$, называется **работой силы:**

$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{S}, \qquad dA = F\,dS\cos\alpha, \qquad [A] = 1\,Н\cdot 1\,м = 1\,Дж \ (Джоуль).$$



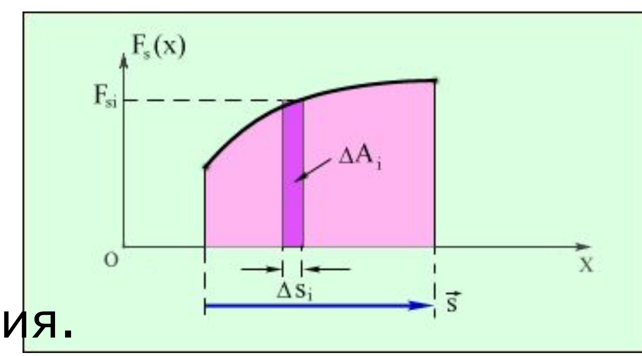
Если на конечном перемещении $\vec{S}$ величина и направление силы, действующей на тело, не меняется, то выражение для работы принимает более простой вид:

$$A = \vec{F}\cdot\vec{S} = FS\cos\alpha = F_s S.$$

В случае переменной силы работа вычисляется как интеграл вдоль траектории:

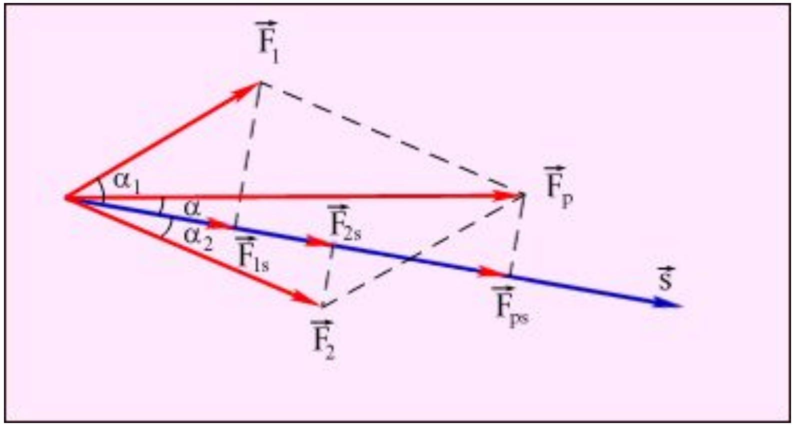
$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}\,d\vec{S}.$$

Поскольку работа – это интеграл, то её величина численно равна площади под графиком проекции силы в зависимости от перемещения.



2. РАБОТА СУММЫ СИЛ

В случае, если тело движется под действием нескольких сил, работу суммы сил можно вычислить двумя способами:



1. Определить равнодействующую силу, а затем вычислить её работу:

$$\vec{F}_p = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i, \quad A_{12} = \int_1^2 \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \right) d\vec{S}.$$

2. Определить работу каждой силы, а затем просуммировать результаты:

$$A_i = \int_1^2 \vec{F}_i d\vec{S}, \quad A_{12} = \sum_{i=1}^{N} A_i. \qquad A_{12} = \sum_{i=1}^{N} \int_1^2 \vec{F}_i d\vec{S} = \int_1^2 \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \right) d\vec{S}.$$

Работа равнодействующей силы равна сумме работ всех сил.

3. МОЩНОСТЬ

Работа, совершаемая
в единицу времени
называется **мощностью.**

Средняя мощность:

$$P_c = N_c = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

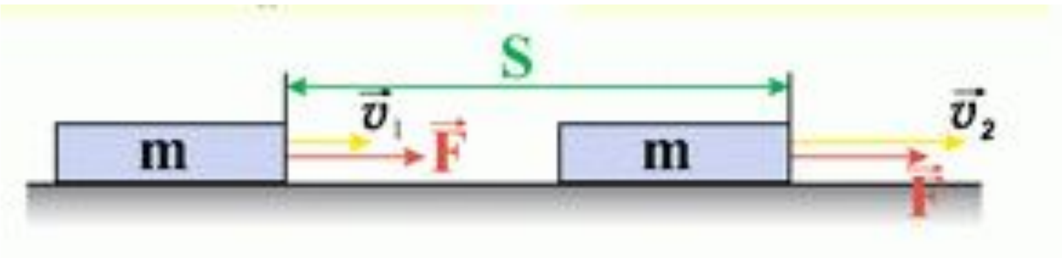
Мгновенная мощность:

$$P \equiv \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{S}}{dt} = \vec{F}\vec{V} = FV\cos\alpha.$$

$$dA = \vec{F}\vec{V}dt \Rightarrow \quad A = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\vec{V}dt.$$

$$[Вт] = 1\frac{Дж}{с} = 1 \qquad .$$

4. ТЕОРЕМА О КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ



Напишем равнение движения для одной частицы (тела):

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}.$$

$\vec{F}$ – равнодействующая сил, действующих на частицу.

Умножим уравнение движения на перемещение частицы $d\vec{S} = \vec{V}dt$:

$$m\frac{d\vec{V}}{dt}\vec{V}dt = \vec{F}d\vec{S} \Rightarrow \quad m\vec{V}d\vec{V} = \vec{F}d\vec{S}, \quad \vec{V}d\vec{V} = d\left(\frac{V^2}{2}\right) \Rightarrow \quad d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = \vec{F}d\vec{S}.$$

Проинтегрируем полученное соотношение вдоль траектории от т.1 до т.2:

$$\int_1^2 d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = \int_1^2 \vec{F}d\vec{S}.$$

Величина $K = \dfrac{mV^2}{2}$ называется кинетической энергией частицы (тела).

Приращение кинетической энергии частицы равно работе равнодействующей сил, действующих на эту частицу:

$$K_2 - K_1 = A_{12}.$$

Это утверждение называют **теоремой о кинетической энергии.**

5. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ И ИМПУЛЬС ТЕЛА

Из теоремы о кинетической энергии $K_2 - K_1 = A_{12}$ $(\Delta K = A)$ следует, что кинетическая энергия выражается в тех же единицах что и работа, то есть в Джоулях.

Кинетическая энергия частицы может быть выражена через его импульс:

$$W_k = K = \frac{mV^2}{2} \Rightarrow \qquad K = \frac{m^2V^2}{2m}, \qquad p = mV \Rightarrow \qquad K = \frac{p^2}{2m}.$$

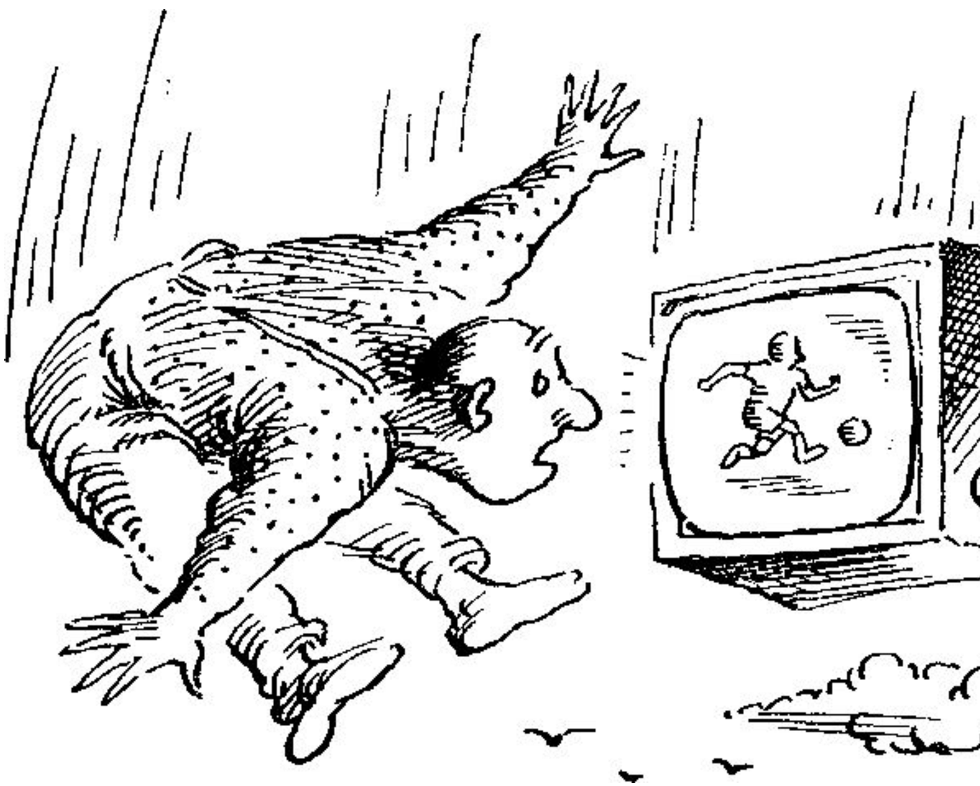
Импульс частицы также можно выразить через её кинетическую энергию:

$$p^2 = 2mK \Rightarrow p = \sqrt{2mK};$$

§2. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

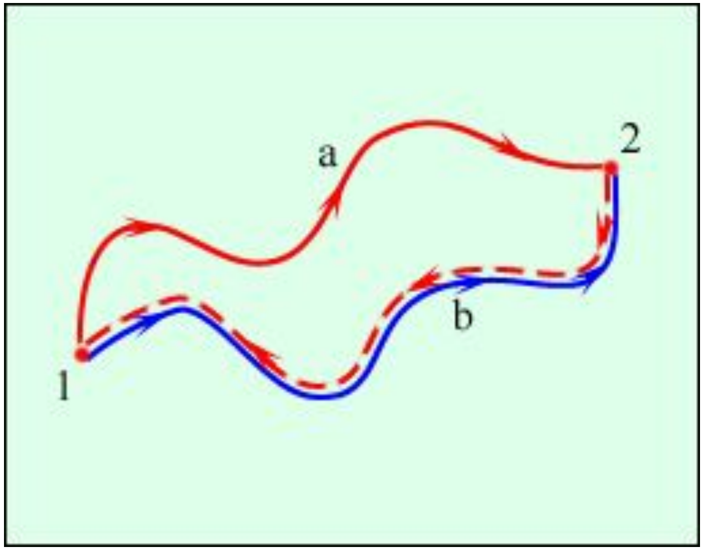
1. СИЛОВОЕ ПОЛЕ

Силовое поле (физическое поле) – форма материи.
Представляет собой некоторую область пространства,
в которой физические объекты испытывают силовое воздействие.



2. КОНСЕРВАТИВНЫЕ СИЛЫ

Если работа, совершаемая над частицей силами поля, зависит лишь от начального и конечного положения частицы (не зависит от траектории частицы), то такие силовые поля называются **консервативными полями** $A_{12a} = A_{12b}.$



Из независимости работы консервативных сил от пути вытекает, что работа таких сил на замкнутом пути равна нулю:

$$A_{12a} = -A_{21b} \Rightarrow \quad A_{12} + A_{21} = 0;$$

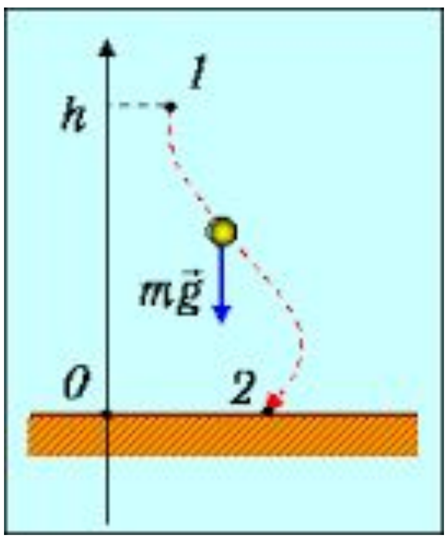
Консервативными являются **однородные и центральные** силовые поля.

Силовое поле называется **однородным,** если во всех точках поля силы, действующие на частицу одинаковы по модулю и направлению $\vec{F} = const.$

Силовое поле называется **центральным,** если сила, действующая на частицу в любой точке поля, направлена на одну точку (силовой центр), а модуль силы зависит от расстояния до этого центра $\vec{F} = F_r(r)\vec{e}_r.$

3. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

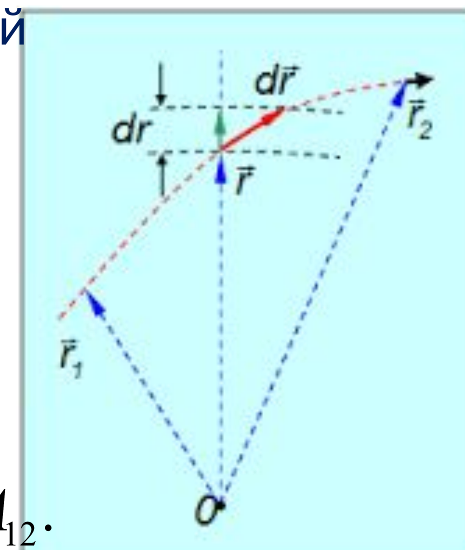
В случае, когда работа сил поля не зависит от пути, а зависит лишь от начального и конечного положения частицы (консервативные силы), каждой точке поля можно сопоставить некоторую функцию $\Pi(x, y, z)$ такую, что разность значений этой функции в начальной и конечной точках траектории, будет определять работу сил поля при переходе частицы из начальной точки в конечную: $A_{12} = \Pi_1 - \Pi_2$.



Функция $\Pi(x, y, z)$ измеряется в тех же единицах, что и работа силы, то есть Джоулях.

Её называют потенциальной энергией частицы во внешнем поле сил.

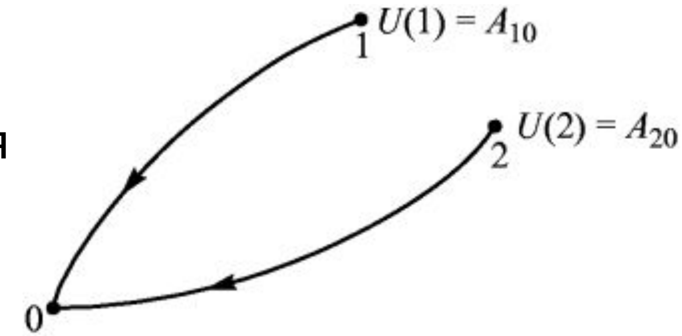
Потенциальной энергией частицы в консервативном силовом поле называется такая функция координат частицы, убыль которой равна работе сил поля над этой частицей при её перемещении из начальной точки траектории в конечную: $\Pi_1 - \Pi_2 = A_{12} \Rightarrow -(\Pi_2 - \Pi_1) = A_{12} \Rightarrow -\Delta\Pi = A_{12}$.



4. НЕОДНОЗНАЧНОСТЬ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ

Физический смысл имеет не сама потенциальная энергия, а её убыль, равная работе сил поля над частицей при перемещении этой частицы из начальной точки траектории в конечную: $\Pi_1 - \Pi_2 = A_{12}.$

Для расчёта потенциальной энергии частицы в конкретной точке поля необходимо выбрать ту точку поля, в которой потенциальная энергия частицы принимается равной нулю. Пусть

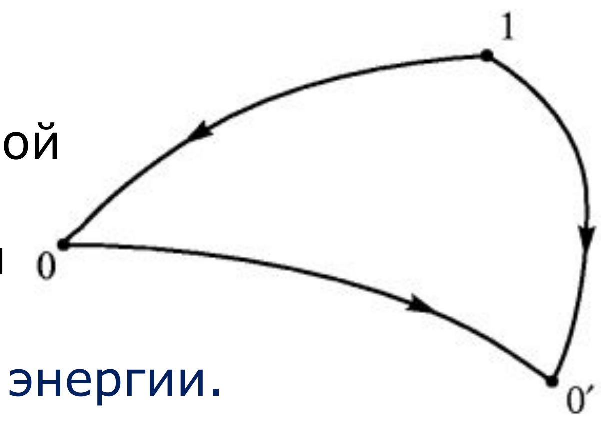


$$\Pi_2 = 0 \Rightarrow \Pi_1 = U(1) = A_{10},\; \Pi(x,y,z) = A_0.$$

Потенциальная энергия частицы в данной точке поля равна работе, которую совершают силы поля над частицей при её перемещении из данной точки поля в ту точку, для которой потенциальная энергия принята равной нулю.

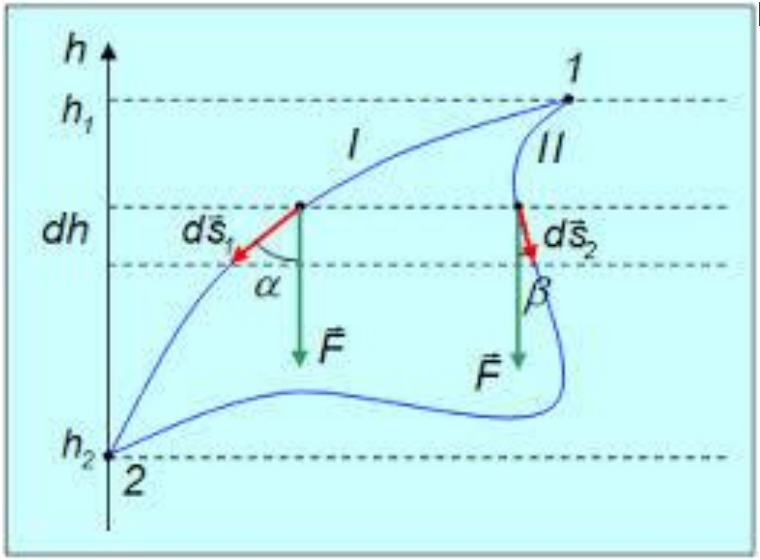
$$A_0 = \int_{x,y,z}^{x_0,y_0,z_0} \vec{F}\, d\vec{S}.$$

Ясно, что величина потенциальной энергии частицы в данной точке зависит от выбора точки с нулем потенциальной энергии.



В этом состоит **неоднозначность** потенциальной энергии.

5. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ЧАСТИЦЫ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ



Сила тяжести в каждой точке имеет одинаковый модуль и направление – вниз.

$$\vec{F} = m\vec{g} \Rightarrow A_{12} = \int_1^2 m\vec{g}d\vec{S} = \int_1^2 mg\cos\alpha\, dS,$$

$$\cos\alpha\, dS = -dh \Rightarrow \quad A_{12} = -mg\int_1^2 dh \Rightarrow$$

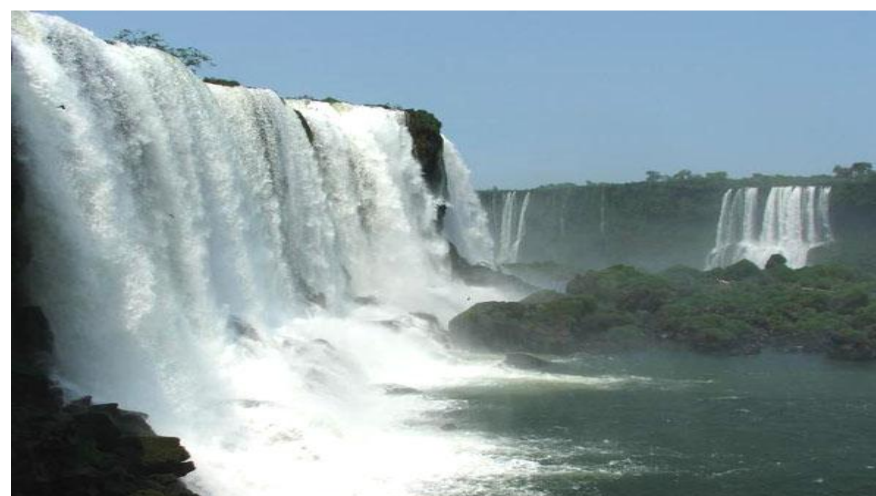
$$A_{12} = -mg(h_2 - h_1) = mg(h_1 - h_2).$$

Сравнивая полученное выражение с определением потенциальной энергии

$\Pi_1 - \Pi_2 = A_{12}$, получаем выражение

для потенциальной энергии частицы в поле силы тяжести $\Pi = mgh$,

h отсчитывается от нулевым уровня.



6. ПОТЕНЦИАЛЬНОСТЬ ОДНОРОДНЫХ СИЛОВЫХ ПОЛЕЙ

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r}; \qquad \vec{F} = const \Rightarrow A_{12} = \vec{F} \int_1^2 d\vec{r};$$

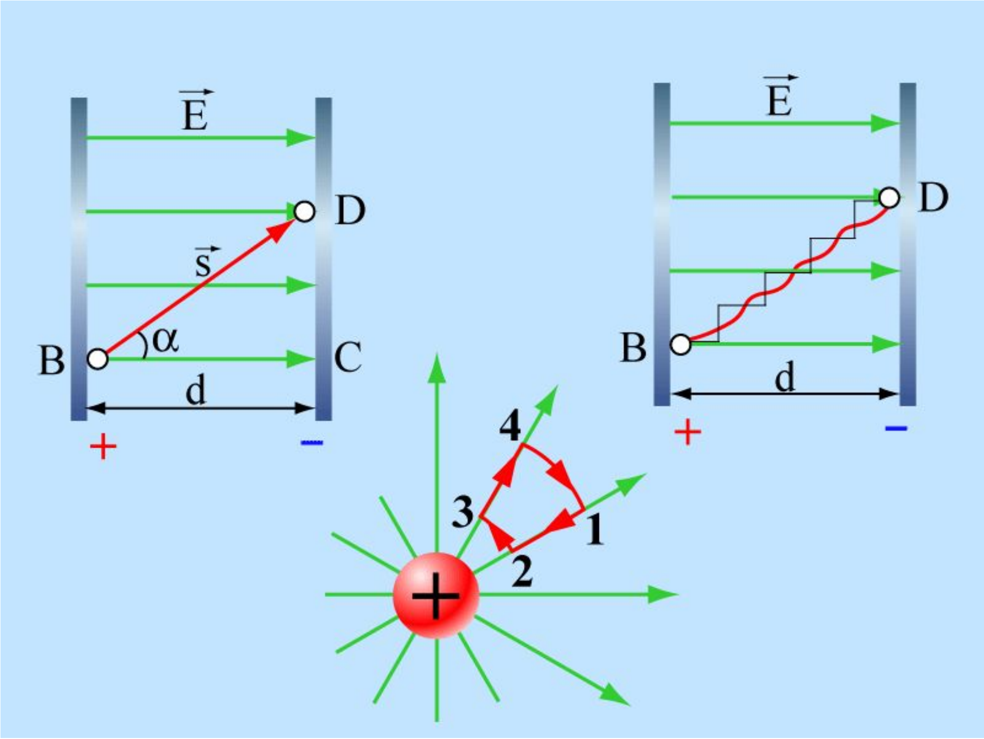
$$\int_1^2 d\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \Rightarrow A_{12} = \vec{F}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1);$$

$$A_{12} = \vec{F}\vec{r}_2 - \vec{F}\vec{r}_1;$$

$$A_{12} = -\Delta \Pi; \quad -\Delta \Pi = \Pi_1 - \Pi_2;$$

$$\Pi_1 = -\vec{F}\vec{r}_1; \qquad \Pi_2 = -\vec{F}\vec{r}_2;$$

$$\Pi(\vec{r}) = -\vec{F}\vec{r};$$



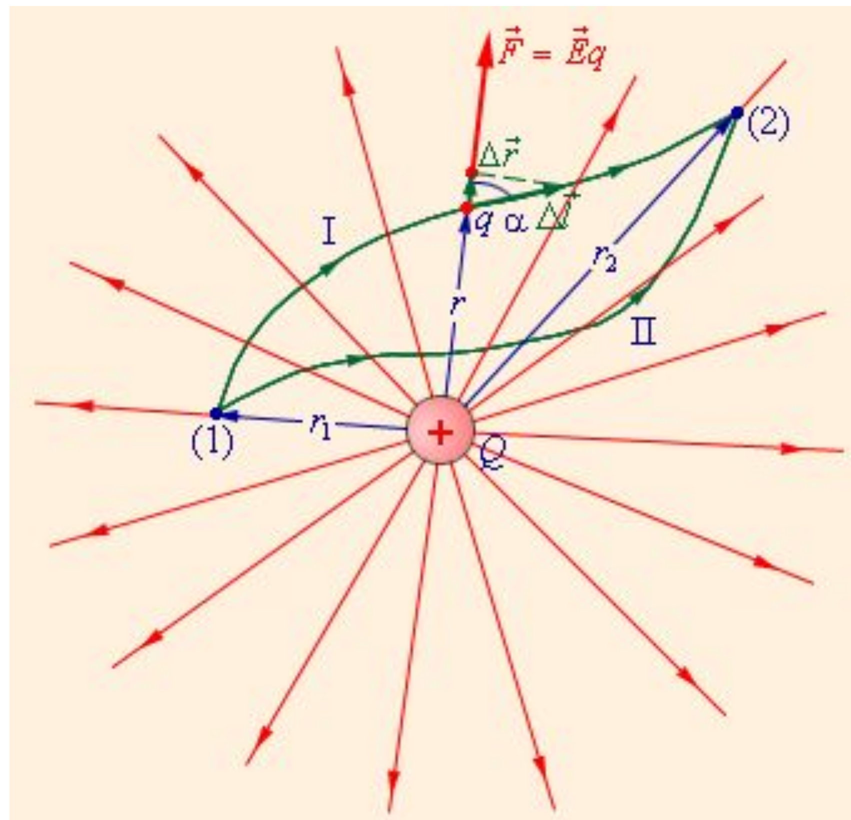
7. ПОТЕНЦИАЛЬНОСТЬ ЦЕНТРАЛЬНЫХ СИЛОВЫХ ПОЛЕЙ

Силовое поле называется центральным, если сила, действующая в этом поле на пробную частицу имеет вид:

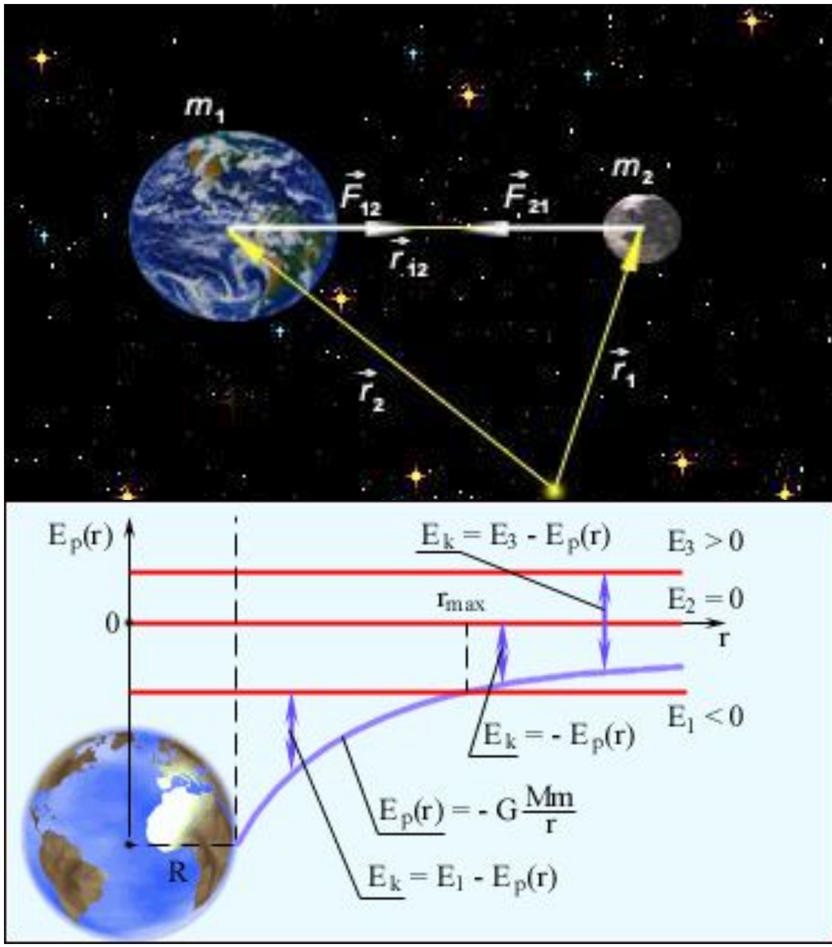
$$\vec{F}(\vec{r}) = F_r(r)\vec{e}_r = F(r)\frac{\vec{r}}{r};$$

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \int_1^2 F_r \frac{\vec{r}}{r}d\vec{r} \Rightarrow$$

$$\vec{r}d\vec{r} = rdr \Rightarrow A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} F_r(r)dr.$$



8. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ



$$m_1 = M; \quad m_2 = m; \quad \vec{r}_{12} = \vec{r};$$

$$\vec{F}_{21} = \vec{F}(\vec{r}) = -\gamma \frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r};$$

$$F_r(r) = -\gamma \frac{mM}{r^2}\frac{r}{r} = -\gamma \frac{mM}{r^2};$$

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} F_r(r)dr = -\gamma mM \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \Rightarrow$$

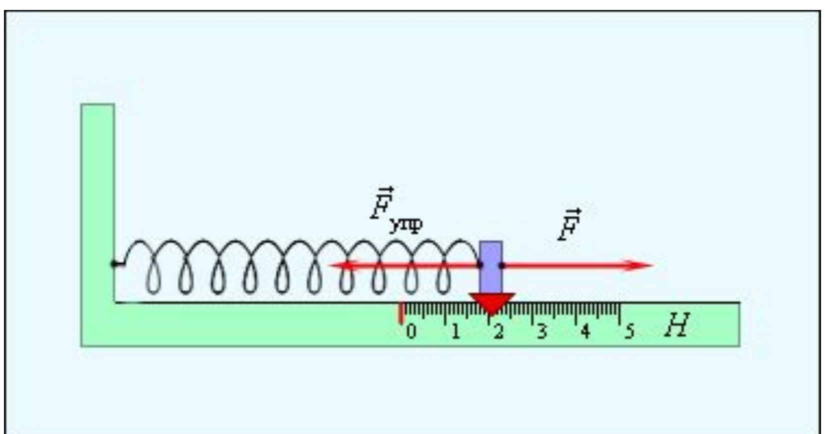
$$\Pi_1 - \Pi_2 = -\gamma mM \left(-\frac{1}{r}\right)_{r_1}^{r_2} = -\gamma mM \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \Rightarrow \Pi(r) = -\gamma \frac{mM}{r}.$$

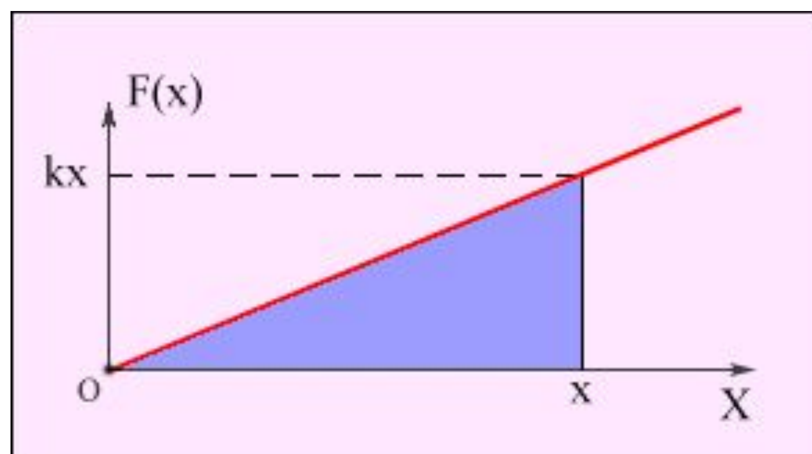
9. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ПРУЖИНЫ

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx; \quad F_x = -kx \Rightarrow$$

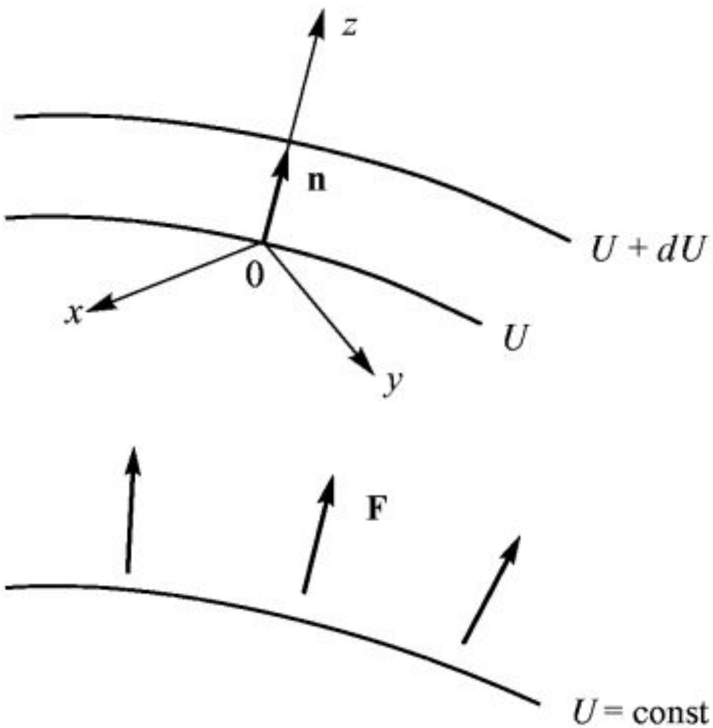
$$\Pi_1 - \Pi_2 = -k \int_{x_1}^{x_2} x dx = -k \left(\frac{x^2}{2} \right)_{x_1}^{x_2} \Rightarrow$$

$$\Pi_1 - \Pi_2 = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2} \Rightarrow \Pi(x) = \frac{kx^2}{2}.$$





11. СВЯЗЬ МЕЖДУ СИЛОЙ И ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ



$$A_{12} = \Pi_1 - \Pi_2 \Rightarrow A_{12} = -(\Pi_2 - \Pi_1) \Rightarrow$$

$$A_{12} = -d\Pi \Rightarrow d\Pi = - \quad .$$

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz;$$

$$d\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz \quad .$$

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} dx - \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy - \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz \Rightarrow$$

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; \qquad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; \qquad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

12. СИЛА – ГРАДИЕНТ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ

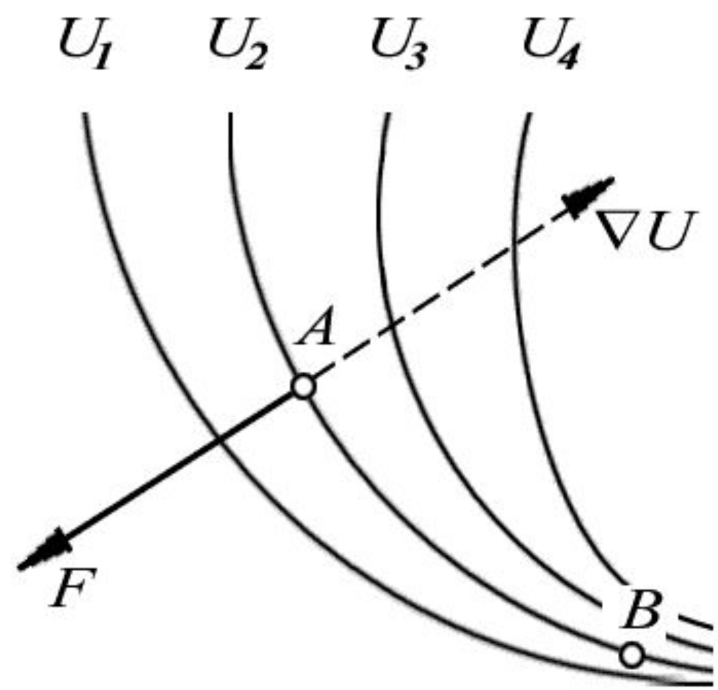
$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}; \quad F_x = -\frac{\partial П}{\partial x}; \; F_y = -\frac{\partial П}{\partial y}; \; F_z = -\frac{\partial П}{\partial z} \Rightarrow$$

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial П}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial П}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial П}{\partial z}\vec{k}\right) = -grad \quad .$$

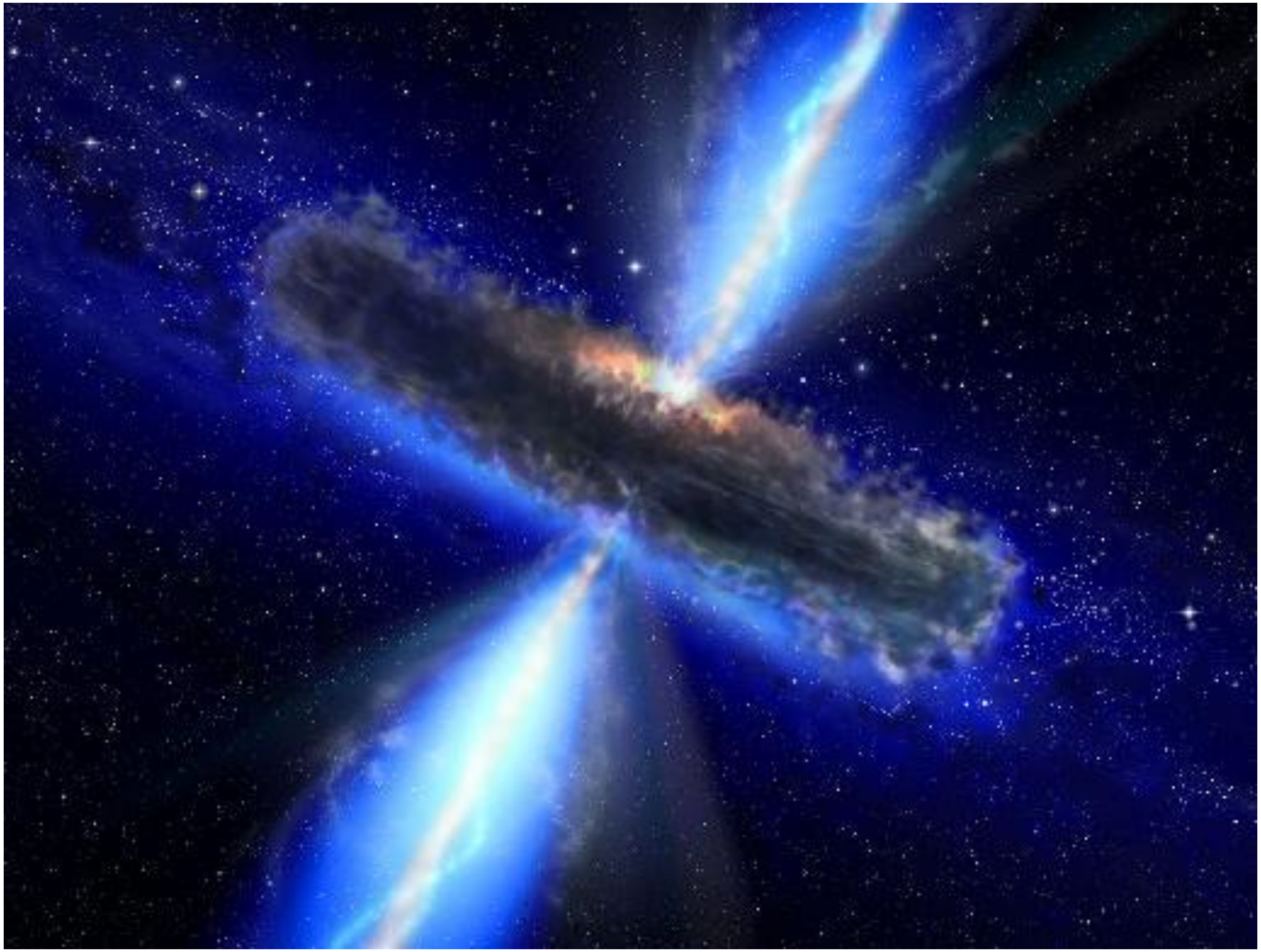
$$grad\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k} = \nabla\varphi.$$

∇ - оператор набла.

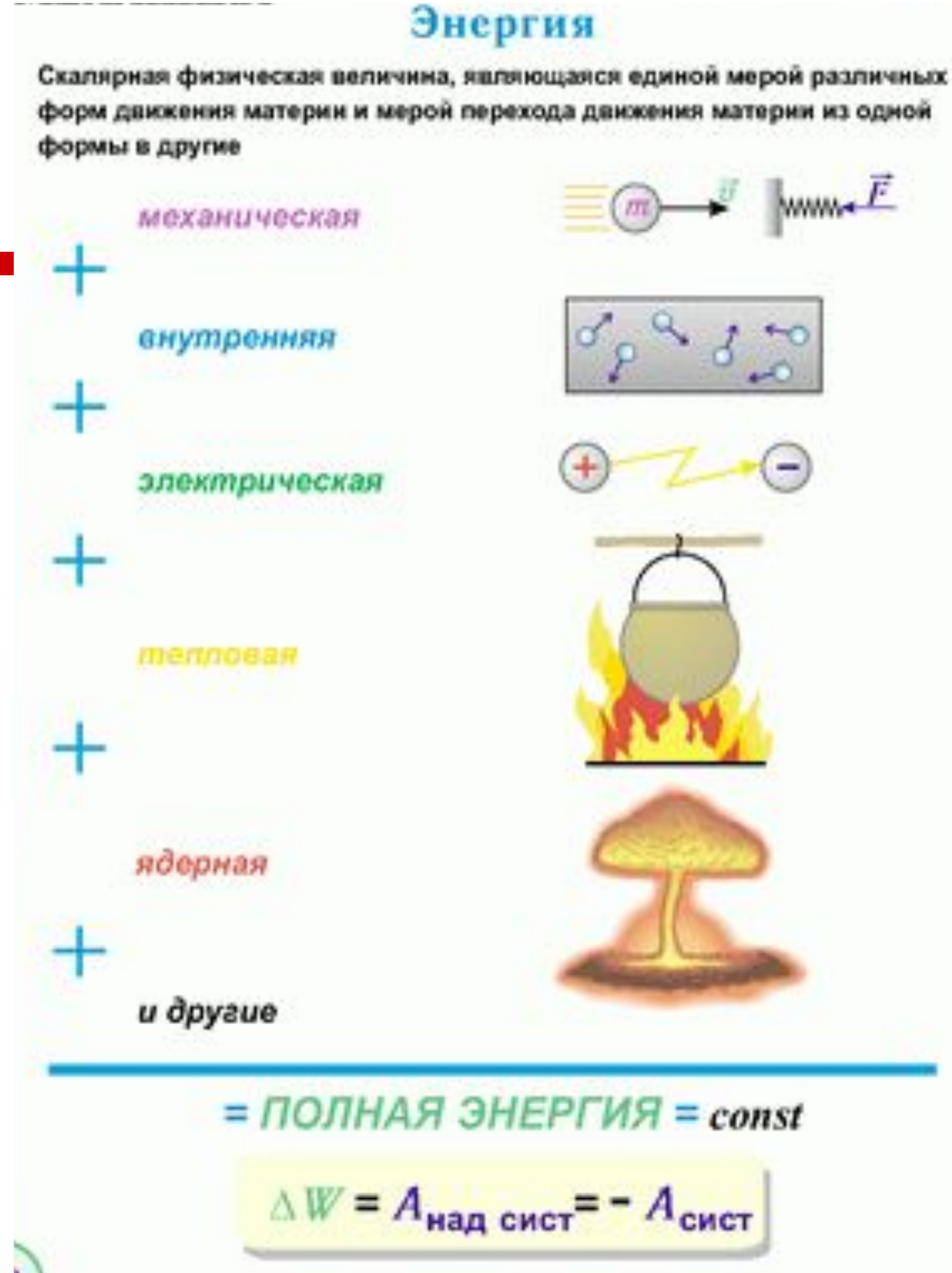
$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$



§3. ПОЛНАЯ МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ



1. ЭНЕРГИЯ

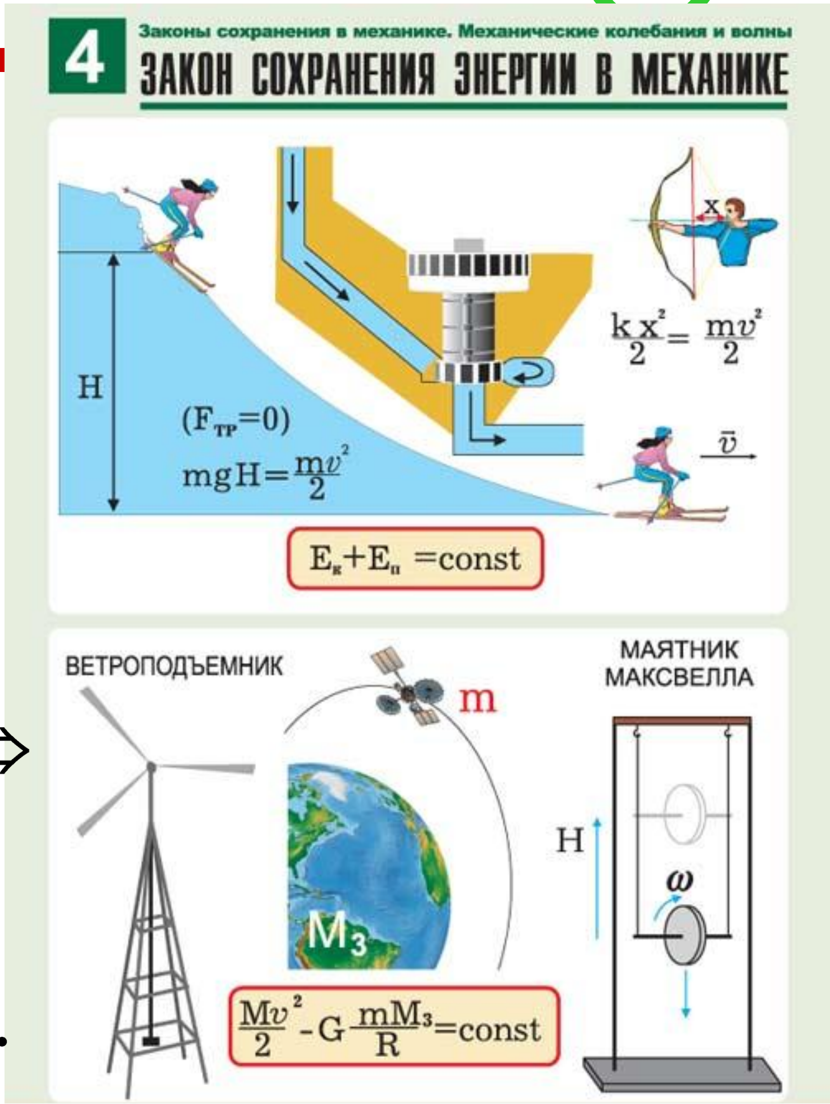

Энергия
Скалярная физическая величина, являющаяся единой мерой различных форм движения материи и мерой перехода движения материи из одной формы в другие
механическая
+
внутренняя
+
электрическая
+
тепловая
+
ядерная
+
и другие
= ПОЛНАЯ ЭНЕРГИЯ = const
$\Delta W = A_{над\ сист} = - A_{сист}$

2. ПОЛНАЯ МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ЧАСТИЦЫ

$$E = \Pi + \quad .$$

$$W = T + U.$$

3. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ (I)



Если на частицу действуют только консервативные силы, то ее механическая энергия остается постоянной (является интегралом движения).

$$K_2 - K_1 = A; \quad П_1 - П_2 = A_к.$$

$$A = A_к \Rightarrow K_2 - K_1 = П_1 - П_2 \Rightarrow$$

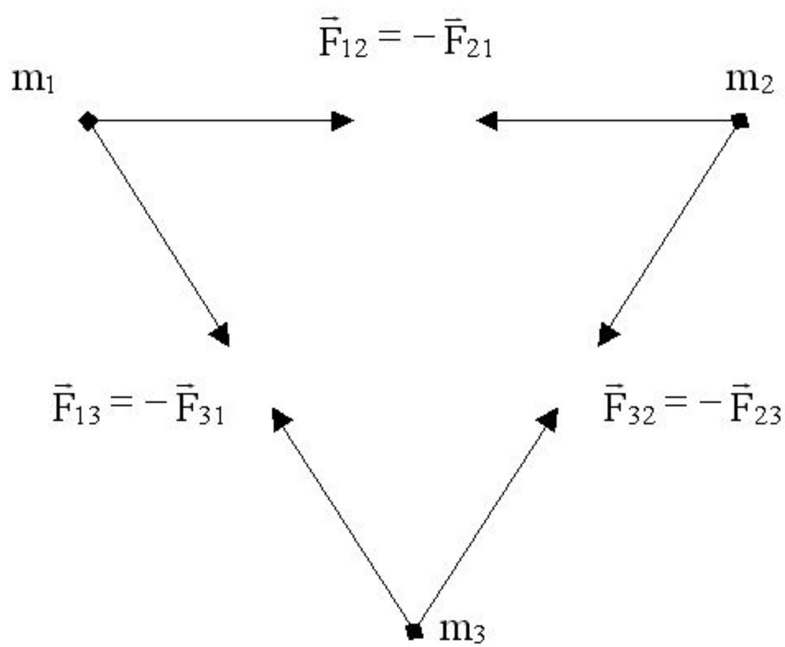
$$K_2 + П_2 = П_1 + K_1 \Rightarrow$$

$$E_1 = E_2 \Rightarrow E = K + П = const.$$

4. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ

$$\Pi = \Pi_{ext} + \Pi_{\text{int}}. \quad \Pi_{\text{int}} = \frac{1}{2}\left(\Pi_{12} + \Pi_{13} + \Pi_{21} + \Pi_{23} + \Pi_{31} + \Pi_{32}\right).$$

$$\Pi_{ext} = \sum_{i=1}^{N} \Pi_i; \qquad \Pi_{\text{int}} = \frac{1}{2}\sum_{i \neq j}^{N} \Pi_{ij} = \sum_{i<j}^{N} \Pi_{ij}.$$



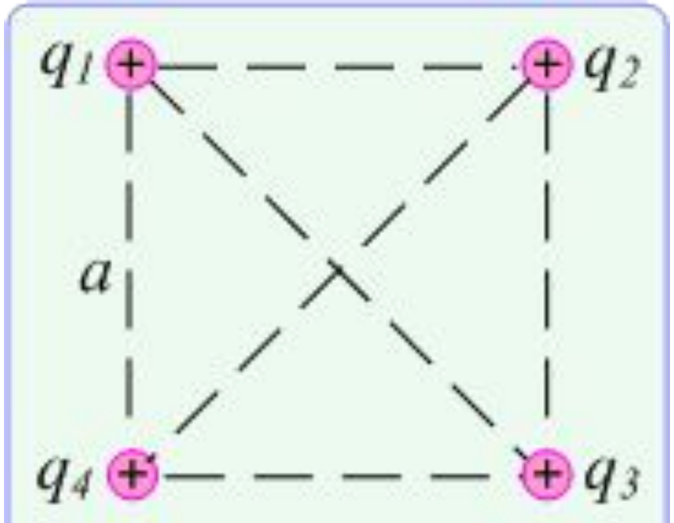


Рис. 53.2

5. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ (II)

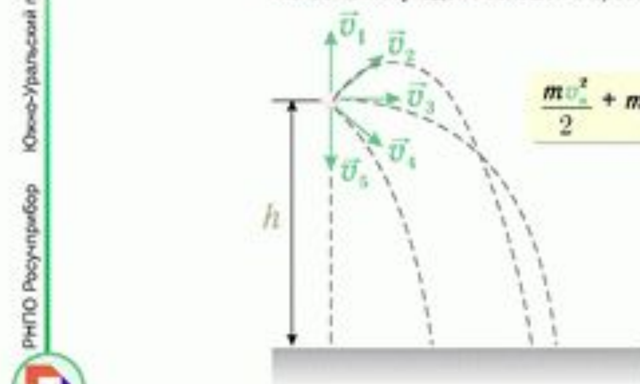
Полная механическая энергия системы тел, на которые действуют только консервативные силы, остается постоянной.

$$E = \sum_{i=1}^{N} K_i + \sum_{i=1}^{N} П_i + \sum_{i<j}^{N} П_{ij} = const.$$

6. НЕКОНСЕРВАТИВНЫЕ СИЛЫ И МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

$$A_{нк} = \Delta W = \Delta E;$$

$$A_{нк} = E_2 - E_1.$$



МЕХАНИКА — ФИЗИКА 61

Закон сохранения энергии

Если на тело или систему тел действуют силы, часть которых является консервативными, а часть - неконсервативными , то работа равнодействующей силы равна

$A = A_{конс} + A_{нк} = \Delta W_к$

$A_{конс} = -\Delta W_п$

$A_{нк} = \Delta W_к + \Delta W_п$

Если в замкнутой системе $F_{нк} = 0$, то $A_{нк} = 0$, тогда для такой системы

$\Delta W_к + \Delta W_п = 0$

$W_к + W_п = const$

УПРАЖНЕНИЕ

5 тел массой m брошены с высоты h со скоростями $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = v_5$.

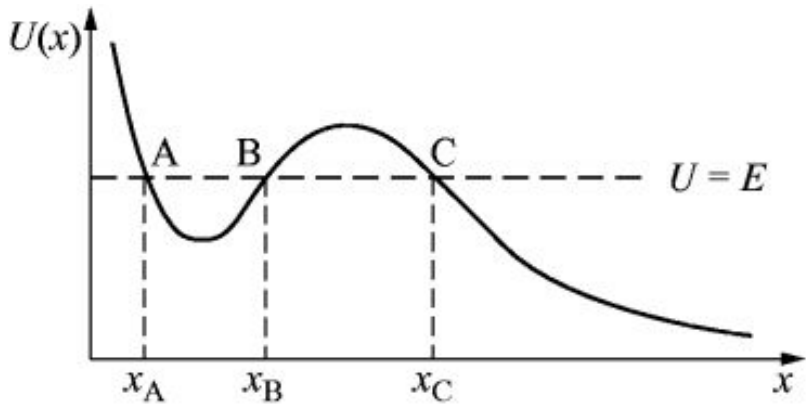
Какое из них упадет с большей скоростью ?

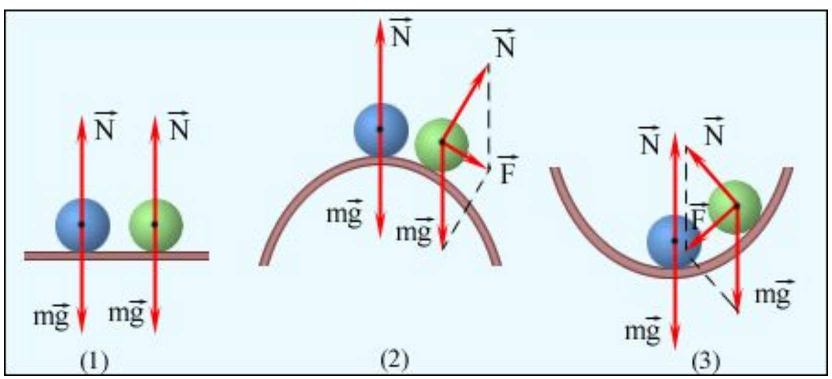
$\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_4$, $\vec{v}_5$, h

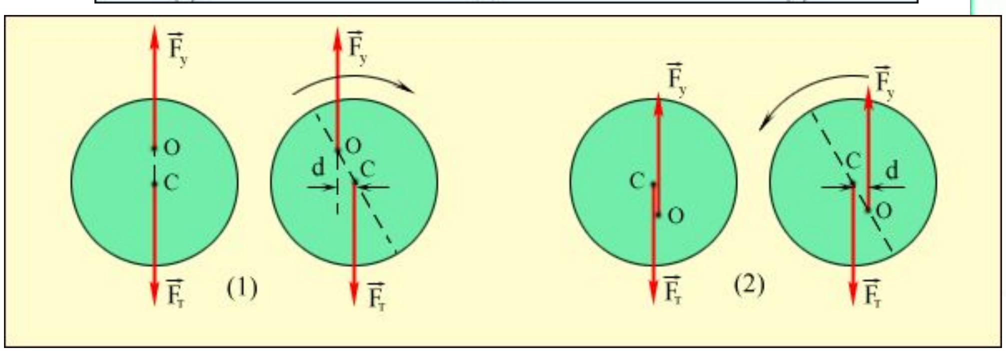
$$\frac{mv_o^2}{2} + mgh = \frac{mv_i^2}{2}$$

РНПО Росучприбор Южно-Уральский государственный университет

7. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЯМА И ПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ БАРЬЕР







Потенциальная энергия частицы и сила

Зависимость потенциальной энергии $W_п$ частицы от координаты x

Частица с энергией W_0 может находится в точках с координатами от x_1 до ∞

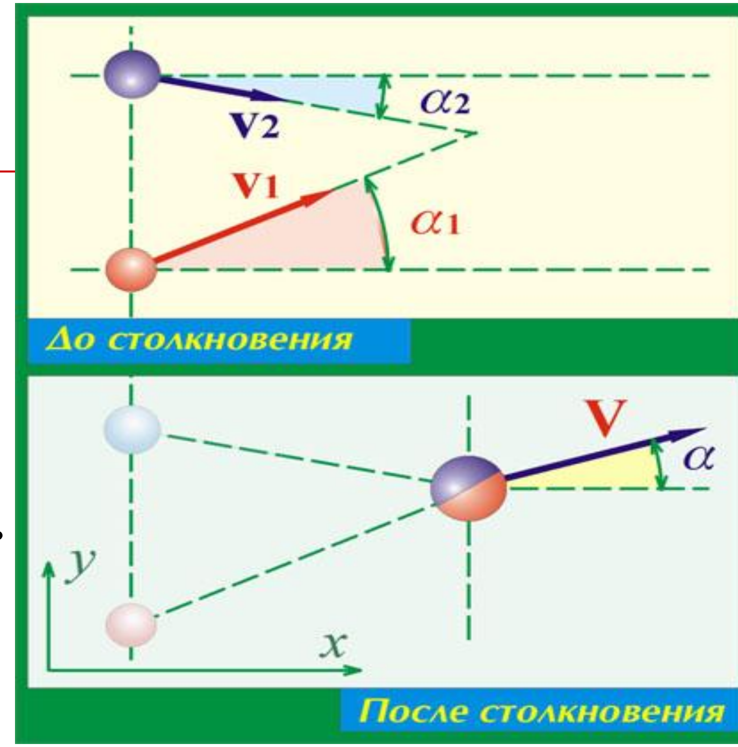
$$W_0 = W_п + W_к$$

$$F_x = -\frac{dW_п}{dx}$$

Точки, где $F_x = 0$, представляют собой положения равновесия

$F_x = 0$		$F_x > 0$	$F_x < 0$
	равновесие		
$x = x_2$	устойчивое	$x_1 \leqslant x \leqslant x_2$	$x_2 \leqslant x \leqslant x_3$
$x = x_3$	неустойчивое	$x_3 \leqslant x \leqslant x_4$	$x_4 \leqslant x \leqslant x_5$
$x = x_4$	устойчивое		
$x \geqslant x_5$	безразличное		

8. АБСОЛЮТНО НЕУПРУГИЙ УДАР



Абсолютно неупругим называется такой удар, при котором возникают только пластические деформации.

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = (m_1 + m_2)\vec{V}; \; \alpha_1 + \alpha_2 = \beta.$$

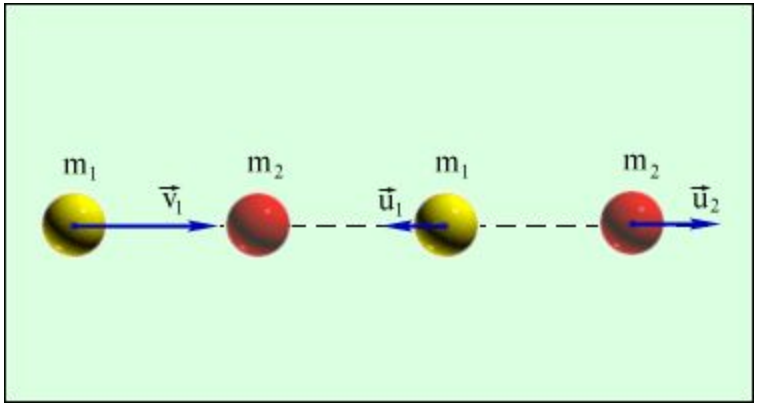
$$(m_1 + m_2)^2 \vec{V}^2 = (m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2)^2 \Rightarrow$$

$$(m_1 + m_2)^2 V^2 = m_1^2 V_1^2 + 2m_1 m_2 V_1 V_2 \cos\beta + m_2^2 V_2^2;$$

$$\sqrt{m_1^2 V_1^2 + 2m_1 m_2 V_1 V_2 \cos\beta + m_2^2 V_2^2}\cos\alpha = m_1 V_1 \cos\alpha_1 + m_2 V_2 \cos\alpha_2.$$

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)V^2}{2} + Q.$$

9. АБСОЛЮТНО УПРУГИЙ ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УДАР



$$m_1V_{1x}+m_2V_{2x}=m_1U_{1x}+m_2U_{2x};$$

$$\frac{m_1V_{1x}^2}{2}+\frac{m_2V_{2x}^2}{2}=\frac{m_1U_{1x}^2}{2}+\frac{m_2U_{2x}^2}{2}.$$

$$m_1\left(V_{1x}-U_{1x}\right)\left(V_{1x}+U_{1x}\right)=m_2\left(U_{2x}-V_{2x}\right)\left(U_{2x}+V_{2x}\right);$$

$$m_1\left(V_{1x}-U_{1x}\right)=m_2\left(U_{2x}-V_{2x}\right).$$

$$V_{1x}+U_{1x}=V_{2x}+U_{2x}\Rightarrow U_{2x}=U_{1x}+V_{1x}-V_{2x}\Rightarrow$$

$$m_1V_{1x}-m_1U_{1x}=m_2U_{1x}+m_2(V_{1x}-V_{2x})\Rightarrow$$

$$U_{1x}=\frac{2m_2V_{2x}+\left(m_1-m_2\right)V_{1x}}{m_1+m_2};\ U_{2x}=\frac{2m_1V_{1x}+\left(m_2-m_1\right)V_{2x}}{m_1+m_2}.$$

10. ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УДАР (ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ)

$$U_{1x} = \frac{2m_2V_{2x} + (m_1 - m_2)V_{1x}}{m_1 + m_2}; \qquad U_{2x} = \frac{2m_1V_{1x} + (m_2 - m_1)V_{2x}}{m_1 + m_2}.$$

$$U_{1x} \neq U_{2x}; \quad U_{1x} = U_{2x} \Rightarrow V_{1x} = V_{2x}.$$

$$m_1 = m_2 \Rightarrow U_{1x} = V_{2x}; U_{2x} = V_{1x}.$$

$$V_{2x} = 0 \Rightarrow U_{1x} = 0; \qquad U_{2x} = V_{1x}.$$

$$m_2 \gg m_1 \Rightarrow U_{2x} = V_{2x};$$

$$U_{1x} = 2V_{2x} - V_{1x}.$$

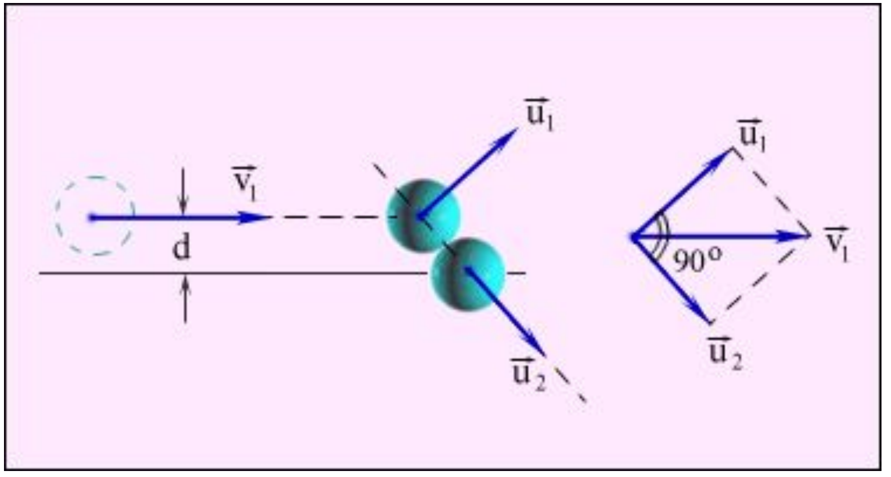
$$V_{2x} = 0 \Rightarrow U_{1x} = -V_{1x}.$$

11. НЕЦЕНТРАЛЬНЫЙ УПРУГИЙ УДАР

$$m_1 = m_2 = m; \qquad V_2 = 0.$$

$$m\vec{V}_1 = m\vec{U}_1 + m\vec{U}_2 \Rightarrow \vec{V}_1 = \vec{U}_1 + \vec{U}_2 \Rightarrow \vec{V}_1^{\,2} = \left(\vec{U}_1 + \vec{U}_2\right)^2 \Rightarrow$$

$$V_1^2 = U_1^2 + 2U_1U_2\cos\alpha + U_2^2.$$



$$\frac{mV_1^2}{2} = \frac{mU_1^2}{2} + \frac{mU_2^2}{2} \Rightarrow$$

$$V_1^2 = U_1^2 + U_2^2 \Rightarrow$$

$$2U_1U_2\cos\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^{\circ}.$$