

Транспортные задачи

**Построение исходного опорного
плана перевозок**

Транспортная задача

определение оптимального плана перевозок груза

из m пунктов отправления A_1, A_2, \dots, A_m

в n пунктов назначения B_1, B_2, \dots, B_n .

определение минимального значения целевой функции стоимости перевозок

Всякое неотрицательное решение систем линейных уравнений, называется **планом транспортной задачи**.

План, при котором целевая функция принимает свое минимальное значение, называется **оптимальным планом транспортной задачи**.

Если **общая потребность в грузе** в пунктах назначения **равна запасу груза** в пунктах отправления, то модель такой транспортной задачи называется **закрытой**, если данное условие не выполняется, то модель транспортной задачи называется **открытой**.

Транспортная таблица

ПО	ПН				Запасы
	B_1	B_2	...	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
...
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2	...	b_n	$\sum a_i$ $\sum b_j$

Математическая формулировка транспортной задачи сводится к минимизации линейной функции

$$S = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

Для определения исходного опорного решения транспортной задачи существует несколько способов, наиболее популярными являются:

- * Метод северо-западного угла
- * Метод минимального элемента
- * Метод аппроксимации Фогеля

Задача

Найти тремя методами опорный план транспортной задачи, в которой запасы на трех складах равны 210, 170, 65 ед. продукции, потребности четырёх магазинов равны 125, 90, 130, 100 ед. продукции, тарифы перевозок в рублях за единицу продукции следующие:

5 8 1 2

2 5 4 9

9 2 3 1

Транспортная задача
Построение исходного опорного плана
Метод северо-западного угла

Пункты отправления, A_i	Пункты потребления, B_j				Запасы, ед. продукции
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	125 5	85 8	1	2	210/85/0
A_2	2	5 5	130 4	35 9	170/165/35/0
A_3	9	2	3	65 1	65/0
Потребность, ед. продукции	125/0	90/5/0	130/0	100/65/0	445 445

Согласно данному плану перевозок, общая стоимость перевозок всего груза составляет:

$$S_1 = 125 \cdot 5 + 85 \cdot 8 + 5 \cdot 5 + 130 \cdot 4 + 35 \cdot 9 + 65 \cdot 1 = \mathbf{2230} \text{ (руб.)}$$

Транспортная задача
Построение исходного опорного плана
Метод минимального элемента

Пункты отправления, A_i	Пункты потребления, B_j				Запасы, ед. продукции			
	B_1	B_2	B_3	B_4				
A_1	5	45	8	130	1	35	2	210/80/45 /0
A_2	125	2	45	5	4	9		170/45 /0
A_3	9		2		3	65	1	65 /0
Потребность, ед. продукции	125 /0		90/45/0		130 /0		100/35 /0	445
								445

Согласно данному плану перевозок, общая стоимость перевозок всего груза составляет:

$$S_2 = 125 * 2 + 45 * 8 + 45 * 5 + 130 * 1 + 35 * 2 + 65 * 1 = 1100 \text{ (руб.)}$$

Транспортная задача

Построение исходного опорного плана

Метод аппроксимации Фогеля

	B_1	B_2	B_3	B_4	запасы	Разности по строкам					
A_1	5	8	110	100	210 / 110 / 0	1	1	1	7	-	-
A_2	125	25	20		170 / 45 / 25 / 0	2	1	1	1	1	0
A_3	9	65			65 / 0	1	1	-	-	-	-
потребности	125 / 0	90 / 25 / 0	130 / 20 / 0	100 / 0	<p>Согласно данному плану перевозок, общая стоимость перевозок всего груза составляет:</p> $S_3 = 125 * 2 + 25 * 5 + 65 * 2 + 110 * 1 + 20 * 4 + 100 * 2 = 895 \text{ (руб.)}$						
Разности по столбцам	3	3	2	1							
	-	3	2	1							
	-	3	3	7							
	-	3	3	-							
	-	0	0	-							
	-	0	-	-							

Построение исходного опорного плана

3 –мя методами дает следующие значения стоимости перевозок всего груза:

$$S1 = 125*5 + 85*8 + 5*5 + 130*4 + 35*9 + 65*1 = \mathbf{2230} \text{ (руб.)}$$

$$S2 = 125*2 + 45*8 + 45*5 + 130*1 + 35*2 + 65*1 = \mathbf{1100} \text{ (руб.)}$$

$$S3 = 125*2 + 25*5 + 65*2 + 110*1 + 20*4 + 100*2 = \mathbf{895} \text{ (руб.)}$$

Транспортные задачи

**Решение транспортной задачи методом
потенциалов**

Решение транспортной задачи по начальному опорному плану (метод минимального элемента)

Проверим оптимальность опорного плана

Пункты отправления, A_i	Пункты потребления, B_j				Запасы, ед. продукции
	B_1 $V_1=5$	B_2 $V_2=8$	B_3 $V_3=1$	B_4 $V_4=2$	
$U_1=0$ A_1	$E_{11}=0$ 5	45 8	130 1	35 2	210
$U_2=-3$ A_2	125 2	45 5	$E_{23}=6$ 4	$E_{24}=10$ 9	170
$U_3=-1$ A_3	$E_{31}=5$ 9	<u>$E_{32}=-5$</u> 2	$E_{33}=3$ 3	65 1	65
Потребность, ед. продукции	125	90	130	100	445

$E_{11} = C_{11} - U_1 - V_1 = 5 - 0 - 5 = 0$
 $E_{23} = C_{23} - U_2 - V_3 = 4 - (-3) - 1 = 6$
 $E_{24} = C_{24} - U_2 - V_4 = 9 - (-3) - 2 = 10$
 $E_{31} = C_{31} - U_3 - V_1 = 9 - (-1) - 5 = 5$
 $E_{32} = C_{32} - U_3 - V_2 = 8 - (-1) - 8 = -5$
 $E_{33} = C_{33} - U_3 - V_3 = 3 - (-1) - 1 = 3$

Опорный план не является оптимальным, так как существуют отрицательные оценки (E_{32})

Решение транспортной задачи по начальному опорному плану (метод минимального элемента)

Построение цикла

Пункты отправления, A_i	Пункты потребления, B_j				Запасы, ед. продукции			
	B_1	B_2	B_3	B_4				
A_1	5	45 -	8	130	1	80 +	2	210
A_2	125	2	45	5	4	9	170	
A_3	9	45 +	2	3	1	65		
Потребность, ед. продукции	125	90	130	100	445			

Из строки A_1 выписываем минимальный элемент $a_{12} = 45$ в B_2 как начальный базисный элемент. В остальных клетках цикла $A_1 B_2$ ставим знаки $-$ и $+$ соответственно.

Пустой клетке ставим $+$ и далее в следующие углы цикла ставим $-$, $+$ соответственно, пока углы цикла не заполнены.

Решение транспортной задачи по начальному опорному плану (метод минимального элемента)

Проверка на оптимальность

Пункты отправления, A_i	Пункты потребления, B_j				Запасы, ед. продукции
	B_1 $V_1=0$	B_2 $V_2=3$	B_3 $V_3=1$	B_4 $V_4=2$	
$U_1=0$ A_1	$E_{11}=5$ 5	$E_{32}=5$ 8	130 1	80 2	210
$U_2=2$ A_2	125 2	45 5	$E_{23}=1$ 4	$E_{24}=5$ 9	170
$U_3=-1$ A_3	$E_{31}=10$ 9	45 2	$E_{33}=3$ 3	20 1	65
Потребность, ед. продукции	125	90	130	100	445

Найдем предварительные потенциалы.

Опорный план оптимален, так как все оценки не отрицательные.

Минимальные затраты составят:

$$F(x) = 1 \cdot 130 + 2 \cdot 80 + 5 \cdot 125 + 5 \cdot 45 + 2 \cdot 45 + 20 = 875$$