

Логика предикатов первого
порядка

Основы логики предикатов

- Класс задач, решаемых с использованием логики высказываний, очень ограничен. Например, из посылок следующего классического примера – «Все люди смертны» и «Сократ – человек» – интуитивно следует заключение «Сократ смертен».
- Однако в рамках логики высказываний решить эту задачу не удастся. Объясняется это тем, что утверждение в логике высказываний это неделимый объект (атом), а приведенный пример требует анализа внутренней структуры предложения. Логика предикатов первого порядка позволяет выразить большее разнообразие утверждений благодаря тому, что в нее добавлены термы, предикаты и кванторы.

- Если проанализировать приведенные выше три утверждения, то можно обнаружить, что рассуждения здесь ведутся на некоторой предметной области (множестве людей). «Сократ» является объектом этой предметной области. Кроме того, в первом утверждении есть неявное указание на принадлежность к этой предметной области («если некто принадлежит к множеству людей, значит, он смертен»). Такое неконкретизированное указание объекта предметной области соответствует понятию «переменная», а явное указание «Сократ» – понятию «константа». Принадлежность объекта к предметной области можно задать в виде «логической функции» или предиката. Например, предикат ЧЕЛОВЕК(x) указывает на то, что если x является человеком, то высказывание ЧЕЛОВЕК(x) является истинным, и, соответственно, предикат СМЕРТЕН(x) указывает на то, что x смертен. Здесь формы записи ЧЕЛОВЕК и СМЕРТЕН называются предикатными символами. Выражение «все люди» служит примером квантификации, такая запись символически может быть представлена как $\forall$ и называется квантором всеобщности (общности). Запись ($\forall x$) читается как «для всех x », «для всякого x », «для каждого x ».

Тогда приведенные три высказывания
можно формально записать
следующим образом:

$$(\forall x)(\text{ЧЕЛОВЕК}(x) \rightarrow \text{СМЕРТЕН}(x))$$
$$\text{ЧЕЛОВЕК}(\text{Сократ})$$
$$\text{СМЕРТЕН}(\text{Сократ})$$

Кроме квантора всеобщности, в логике
предикатов используется квантор
существования, символически
записываемый в виде $(\exists x)$, что
означает «существует x », «для
некоторых x », «по крайней мере, для
одного x ».

- Константы и переменные образуют более общее понятие – терм, который определяется следующим образом:
- константа – это терм;
- переменная – это терм;
- если f – n -местный функциональный символ и $t_1, t_2, \dots, t_n$ – термы, то $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ – терм; других термов нет.
- Синонимом для сложного терма вида $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ будет «функция». Функция есть отображение списка констант в константу. Предикат – это тоже отображение списка констант, но не в константу, а в элемент множества $\{И, Л\}$.
- Основными символьными конструкциями логики предикатов являются константы, переменные, термы, предикатные символы, логические связки, кванторы. После определения терма можно дать понятие атома и формулы в логике предикатов. Если P – n -местный предикатный символ и $t_1, t_2, \dots, t_n$ – термы, то $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$ – атом. Понятие формулы рекурсивно определяется следующим образом:
- атом – это формула;
- если G и H – формулы, то $(\sim G)$, $(G \wedge H)$, $(G \vee H)$, $(G \rightarrow H)$ и $(G \leftrightarrow H)$ – формулы.
- если G – формула и x – переменная, то $(\forall x)G$, $(\exists x)G$ – формулы.
- других формул нет.

Символизация естественного языка средствами логики предикатов

- Пусть $R(x)$ обозначает « x есть рациональное число», а $Q(x)$ – « x есть действительное число», тогда предложение «каждое рациональное число есть число действительное» можно переформулировать в такое: «для любого x , если x есть рациональное число, то x есть действительное число» – и символически представить в следующем виде:
 $(\forall x)(R(x) \rightarrow Q(x))$.
- Смысл этого предложения сводится к тому, что множество рациональных чисел является подмножеством множества действительных чисел, что записывается как $R \subseteq Q$. Такая запись является типичной для высказываний «всякое нечто есть то-то».

- рассмотрим утверждение «некоторые действительные числа являются рациональными». Формула, правильно отражающая это предложение, будет иметь вид:

$$(\exists x)(Q(x) \wedge R(x)).$$

- Это означает, что пересечение двух множеств действительных и рациональных чисел не является пустым $R \cap Q \neq \emptyset$. Типичная ошибка заключается в том, что, исходя из правильности формализации предложений типа «всякое нечто есть то-то» в виде

$$(\forall x)(R(x) \rightarrow Q(x)),$$

- делается ошибочное предположение в правильности формализации предложения типа «некоторое нечто есть то-то» формулой

$$(\exists x)(Q(x) \rightarrow R(x)).$$

- И еще одно предложение ошибочно – «не каждое действительное число есть число рациональное», что может быть прочтено как «не верно, что каждое действительное число является рациональным», формальная запись которого выглядит так:

$$\sim((\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x))).$$

- Переформулировав это предложение еще и как «существуют числа, которые являются действительными, но не являются рациональными», можно это же предложение представить и в виде такой формулы:

$$(\exists x)(Q(x) \wedge \sim R(x)).$$

- Формулы логики предикатов могут быть интерпретированы, т. е. им может быть приписано истинностное значение.
- Однако наличие термов требует присвоения и им значения из предметной области. Таким образом, интерпретация формулы F логики предикатов состоит из непустой предметной области D и задания значений из данной предметной области всем константам, переменным и функциям, встречающимся в формуле F ;
- каждому предикату, определенному на D , приписывается либо И, либо Л. Правила интерпретации для неквантифицированных и квантифицированных формул будут следующие: если истинностные значения формул G и H заданы, то истинностные значения формул $(\sim G)$, $(G \wedge H)$, $(G \vee H)$, $(G \rightarrow H)$ и $(G \leftrightarrow H)$ определяются по таблицам истинности

- формула $(\forall x)G$ получит значение И, если значение И получит формула G для каждого x из области D , в противном случае формула G получит значение Л;
- формула $(\exists x)G$ получит значение И, если формула G получит значение И хотя бы для одного x из области D , в противном случае формула G получит значение Л.

- Рассмотрим следующий пример: пусть дана формула $(\forall x) (\exists y)(P(x, a) \rightarrow Q(f(y)))$, в следующей интерпретации: область $D = \{1, 2\}$, константа $a = 1$ – функция f принимает следующие значения:

$f(1)$	$f(2)$
2	1

оценка для предикатов
следующая:

$P(1, 1)$	$P(1, 2)$	$P(2, 1)$	$P(2, 2)$	$Q(1)$	$Q(2)$
И	Л	И	Л	И	Л

- Пусть $x = 1$, $y = 1$, определим истинностное значение формулы $P(x, a) \rightarrow Q(f(y))$ при данных значениях x и y .
 $P(x, a) \rightarrow Q(f(y)) = P(1, a) \rightarrow Q(f(1)) = P(1, 1) \rightarrow Q(2) = И \rightarrow Л = Л$.
- Положим $y = 2$. $P(x, a) \rightarrow Q(f(y)) = P(1, a) \rightarrow Q(f(2)) = P(1, 1) \rightarrow Q(1) = И \rightarrow И = И$, т.е. для $x = 1$ существует такой y (а именно $y = 2$), что формула $P(1, a) \rightarrow Q(f(y))$ принимает значение И.
- Пусть теперь $x = 2$, $y = 1$, определим истинностное значение формулы $P(x, a) \rightarrow Q(f(y))$ при данных значениях x и y .
- $P(x, a) \rightarrow Q(f(y)) = P(2, a) \rightarrow Q(f(1)) = P(2, 1) \rightarrow Q(2) = И \rightarrow Л = Л$. Положим $y = 2$.
- $P(x, a) \rightarrow Q(f(y)) = P(2, a) \rightarrow Q(f(2)) = P(2, 1) \rightarrow Q(1) = И \rightarrow И = И$. Таким образом, и для $x = 2$ существует такой y (а именно $y = 2$), что формула $P(2, a) \rightarrow Q(f(y))$ принимает значение И. Так как для всех x из области D существует такое значение y , что формула $P(x, a) \rightarrow Q(f(y))$ истинна, то формула $(\forall x) (\exists y)(P(x, a) \rightarrow Q(f(y)))$ истинна в указанной интерпретации.

- Понятие логического следствия формул, определенное для формул логики высказываний, справедливо и в логике предикатов; справедливы здесь и отношения между общезначимостью, противоречивостью и логическим следствием, заданные в виде ТЕОРЕМ 1 и 2. В общем случае язык логики высказываний является подмножеством языка логики предикатов первого порядка. Формула логики высказываний может рассматриваться как формула логики предикатов без кванторов, функций и переменных.
- Формула логики предикатов имеет в общем случае бесконечное число областей интерпретации или предметных областей и, как следствие, бесконечное число интерпретаций, а значит, невозможно доказать противоречивость или общезначимость формулы перебором всех ее интерпретаций.

- Необходимо определить процедуру проверки противоречивости формул логики предикатов. Для решения этой задачи введены еще две нормальные формы: предваренная и сколемовская стандартная, помимо конъюнктивной и дизъюнктивной. Введение нормальных форм позволяет упростить алгоритмы поиска противоречивости формул логики предикатов.

- Предваренной (префиксной) нормальной формой называется формула, состоящая из префикса и матрицы, здесь префикс – это конечная последовательность кванторных комплексов, а матрица – это формула, не содержащая кванторных комплексов, т.е. формула имеет следующий вид:
- $(Q_1x_1) (Q_2x_2) \dots (Q_nx_n) M,$
- где Q_i есть $\forall$ или $\exists$ для $i = 1, 2, \dots, n$.

- рассмотрим дополнительные пары эквивалентных формул, содержащих кванторы (пусть F и H – это формулы, содержащие переменную x , G есть формула, которая не содержит переменной x , а Q – это $\forall$ или $\exists$):
- 12) $(Qx)F(x) \wedge G = (Qx)(F(x) \wedge G)$;
- $(Qx)F(x) \vee G = (Qx)(F(x) \vee G)$;
- 13) $\sim((\forall x) F(x)) = (\exists x)(\sim F(x))$;
- $\sim((\exists x)F(x)) = (\forall x)(\sim F(x))$.
- 14) $(\forall x)F(x) \wedge (\forall x)H(x) = (\forall x)(F(x) \wedge H(x))$;
- $(\exists x)F(x) \vee (\exists x)H(x) = (\exists x)(F(x) \vee H(x))$.
- Переменная в формулах логики предикатов может быть переименована. На использовании этого приема основаны обобщающие законы (п. 14) следующие правила преобразования:
- 15. $(Q_1x)F(x) \vee (Q_2x)H(x) = (Q_1x)F(x) \vee (Q_2z)H(z) = (Q_1x)(Q_2z)(F(x) \vee H(z))$,
- $(Q_3x)F(x) \wedge (Q_4x)H(x) = (Q_3x)F(x) \wedge (Q_4z)H(z) = (Q_3x)(Q_4z)(F(x) \wedge H(z))$.

- Любая формула логики предикатов допускает эквивалентную предваренную нормальную форму. Эскиз процедуры преобразования приведен ниже.
- Шаг 1. Исключить логические связи эквиваленции и импликации.
- Шаг 2. Используя законы двойного отрицания, де Моргана и законы под номером двенадцать, пронести знак отрицания внутрь формулы.
- Шаг 3. Если необходимо, то переименовать переменные.
- Шаг 4. Используя остальные законы, вынести кванторы в начало формулы.

- Сколемовской стандартной формой называется формула, находящаяся в предваренной форме, у которой матрица приведена к конъюнктивной нормальной форме. Получить сколемовскую стандартную форму из произвольной формулы логики предикатов можно, используя следующую процедуру.
- Шаг 1. Привести данную формулу к предваренной нормальной форме.
- Шаг 2. Привести матрицу к конъюнктивной нормальной форме.
- Шаг 3. Если квантора существования в префиксе нет, то полученная формула и есть сколемовская стандартная форма, в противном случае выбирается самый левый кванторный комплекс существования в префиксе ($\exists x$).
- Шаг 4. Если никакой квантор всеобщности не стоит в префиксе левее выбранного квантора существования, то, выбрав новую константу a , отличную от других констант, входящих в матрицу, заменим все x в матрице на константу a , вычеркнем кванторный комплекс существования ($\exists x$) из префикса. Перейти на шаг 3.
- Шаг 5. Если в префиксе левее выбранного кванторного комплекса существования ($\exists x$) стоят кванторные комплексы всеобщности ($\forall y_1$) ... ($\forall y_m$), т.е. выбранный квантор существования находится в области действия кванторов всеобщности, что означает наличие зависимости x от $y_1, \dots, y_m$, тогда, выбрав новый m -местный функциональный символ f , отличный от других функциональных символов, входящих в матрицу, заменим все x в матрице на функцию $f(y_1, \dots, y_m)$, вычеркнем кванторный комплекс существования ($\exists x$) из префикса. Перейти на шаг 3.

- Рассмотрим пример, пусть необходимо получить сколемовскую стандартную форму формулы
- $(\forall x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\forall z)(\exists v)((\forall w)Q(z, w) \rightarrow (\exists w)R(z, v, w)) =$
- $= \sim((\forall x)(\exists y)P(x, y)) \vee (\forall z)(\exists v)((\forall w)Q(z, w) \rightarrow (\exists w)R(z, v, w)) =$
- $= \sim((\forall x)(\exists y)P(x, y)) \vee (\forall z)(\exists v)(\sim((\forall w)Q(z, w)) \vee (\exists w)R(z, v, w)) =$
- $= ((\exists x)(\forall y)\sim P(x, y)) \vee (\forall z)(\exists v)(\sim((\forall w)Q(z, w)) \vee (\exists w)R(z, v, w)) =$
- $= (\exists x)(\forall y)(\sim P(x, y)) \vee (\forall z)(\exists v)((\exists w)(\sim Q(z, w)) \vee (\exists w)R(z, v, w)) =$
- $= (\exists x)(\forall y)(\sim P(x, y)) \vee (\forall z)(\exists v)(\exists w)(\sim Q(z, w) \vee R(z, v, w)) =$
- $= (\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists v)(\exists w)(\sim P(x, y) \vee \sim Q(z, w) \vee R(z, v, w)) =$
- $\{x = a, v = f(y, z), w = g(y, z)\} =$
- $= (\forall y)(\forall z)(\sim P(a, y) \vee \sim Q(z, g(y, z)) \vee R(z, f(y, z), g(y, z)))$.

- Сколемовская стандартная форма – это предваренная форма, префикс которой содержит только кванторы всеобщности. Поэтому удобно префикс опустить, считая, что каждая переменная в матрице управляется квантором всеобщности, а так как конъюнктивная форма – это конъюнкция дизъюнктов, то сколемовскую стандартную форму можно представить в виде множества дизъюнктов.
- Сколемовская стандартная форма – это множество дизъюнктов.
- Например, стандартная форма $(\forall y)(\forall z)(\sim P(a, y) \vee \sim Q(z, g(y, z)) \vee R(z, f(y, z), g(y, z)))$ может быть представлена множеством $S = \{\sim P(a, y) \vee \sim Q(z, g(y, z)) \vee R(z, f(y, z), g(y, z))\}.$

Выводы в логических моделях первого порядка

- Формула логики предикатов противоречива в том случае, когда противоречиво множество дизъюнктов, представляющих стандартную форму этой формулы, а противоречиво множество дизъюнктов тогда, когда оно ложно при всех интерпретациях во всех предметных областях.
- Черч и Тьюринг: Не существует общего универсального метода, позволяющего определить общезначимость или противоречивость формулы логики предикатов первого порядка.
- Однако существуют алгоритмы, подтверждающие общезначимость или противоречивость формулы, если формула действительно общезначима или противоречива. Для необщезначимых или непротиворечивых формул алгоритмы в общем случае свою работу не заканчивают.

- Так как рассмотрение всех возможных интерпретаций формулы логики предикатов в общем случае невозможно, Эрбраном была найдена специальная универсальная область интерпретации. Стандартная форма формулы противоречива тогда и только тогда, когда форма ложна при всех интерпретациях в этой области. Называют эту область эрбрановским универсумом, и определяется она для множества дизъюнктов S следующим образом:
- множество констант нулевого уровня H_0 состоит из констант, встречающихся в S ;
- если S не содержит констант, тогда H_0 содержит одну произвольно выбранную константу, допустим, $H_0 = \{c\}$;
- множество констант i -го уровня ($i = 1, 2, \dots, \infty$) определяется как объединение констант уровня $i - 1$ и множества всех термов $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$, где f – все функциональные символы, встречающиеся в S , а $t_1, t_2, \dots, t_n$ – константы уровня $i - 1$; множество H_∞ есть эрбрановский универсум множества дизъюнктов S .

- Элементы эрбрановского универсума – это абстрактные объекты, не имеющие конкретной интерпретации. Если во множестве S отсутствуют функции, то эрбрановский универсум всегда конечен и состоит из множества констант. Если же множество S содержит хотя бы одну функцию, то универсум всегда бесконечен.
- Рассмотрим несколько примеров. Пусть множество дизъюнктов $S = \{P(x, y) \vee \sim Q(x, z, u), \sim P(u, y) \vee R(y) \vee Q(x, y, u), S(x)\}$, тогда $H^\infty = \{c\}$.
- Для множество дизъюнктов
- $S = \{Q(a, g(y)), P(x, y)\}$, универсум $H^\infty = \{a, g(a), g(g(a)), g(g(g(a))), \dots\}$.
- Если множество дизъюнктов
- $S = \{\sim P(a, y) \vee \sim Q(z, g(y, z)) \vee R(z, f(y, z), g(y, z))\}$, то
- $H^\infty = \{a, g(a, a), f(a, a), g(a, g(a, a)), g(g(a, a), a), g(g(a, a), g(a, a)), g(a, f(a, a)), g(f(a, a), a), g(f(a, a), f(a, a)), f(a, g(a, a)), f(g(a, a), a), f(g(a, a), g(a, a)), \dots\}$.

- Эрбрановской интерпретацией, или Н-интерпретацией для множества дизъюнктов S , называется интерпретация, удовлетворяющая следующим условиям: предметной областью является эрбрановский универсум;
- интерпретация отображает все константы из S в соответствующую эрбрановскую константу;
- если f – n -местный функциональный символ и $h_1, h_2, \dots, h_n$ – константы эрбрановского универсума, то в эрбрановской интерпретации через f обозначается функция, отображающая $(h_1, h_2, \dots, h_n)$ в $f(h_1, h_2, \dots, h_n)$.
- В общем случае эрбрановских интерпретаций на множестве S может быть бесконечно много, так как интерпретации предикатов и функций могут быть выбраны произвольно.

- Пусть множество дизъюнктов
- $S = \{P(x, y) \vee \sim Q(x, z, u), \sim P(u, y) \vee R(y) \vee Q(x, y, u), S(x)\},$
- эрбрановский универсум для этого множества дизъюнктов – $H^\infty = \{c\}.$
- Некоторые интерпретации приведены ниже:
- $I_1 = \{P(c, c), Q(c, c, c), R(c), S(c)\},$
- $I_3 = \{P(c, c), \sim Q(c, c, c), R(c), S(c)\},$
- $I_2 = \{\sim P(c, c), Q(c, c, c), R(c), S(c)\},$
- $I_4 = \{P(c, c), Q(c, c, c), \sim R(c), S(c)\}.$
- Так как здесь имеются четыре атома $P(c, c), Q(c, c, c), R(c), S(c),$ то всего существуют $2^4 = 16$ эрбрановских интерпретаций.

- Для множества дизъюнктов $S = \{Q(a, g(y)), P(x, y)\}$ эрбрановский универсум бесконечен $H^\infty = \{a, g(a), g(g(a)), g(g(g(a))), \dots\}$, и, соответственно, эрбрановских интерпретаций будет бесконечное множество, четыре из них приведены ниже:
- $I_1 = \{P(a, a), Q(a, a), P(a, g(a)), Q(a, g(a)), P(g(a), a), Q(g(a), a), P(g(a), g(a)), Q(g(a), g(a)), \dots\}$,
- $I_2 = \{\sim P(a, a), Q(a, a), \sim P(a, g(a)), Q(a, g(a)), \sim P(g(a), a), Q(g(a), a), \sim P(g(a), g(a)), \dots\}$,
- $I_3 = \{P(a, a), \sim Q(a, a), P(a, g(a)), \sim Q(a, g(a)), P(g(a), a), \sim Q(g(a), a), P(g(a), g(a)), \dots\}$,
- $I_4 = \{\sim P(a, a), \sim Q(a, a), \sim P(a, g(a)), \sim Q(a, g(a)), \sim P(g(a), a), \sim Q(g(a), a), \sim P(g(a), g(a)), \dots\}$.
- Доказано, что множество дизъюнктов S невыполнимо тогда и только тогда, когда оно ложно при всех своих эрбрановских интерпретациях.

- Для проверки выполнимости множества дизъюнктов необходимо рассматривать только эрбрановские интерпретации.
- Выражение – это терм, множество термов, множество атомов, множество дизъюнктов. Если выражение не содержит переменных, то оно называется основным.
- Основной пример дизъюнкта C множества дизъюнктов S есть дизъюнкт, полученный заменой переменных в C на константы эрбрановского универсума S . Пусть множество дизъюнктов $S = \{Q(a, g(y)), P(x, y)\}$, дизъюнкт $C = P(x, y)$, эрбрановский универсум $H^\infty = \{a, g(a), g(g(a)), g(g(g(a))), \dots\}$, тогда основной пример $C' = P(g(a), a)$.
- Основной пример выполняется в данной интерпретации тогда и только тогда, когда в этом основном примере существует основная литера, которая есть и в данной интерпретации.

- Пусть множество дизъюнктов $S = \{Q(a, g(y)), P(x, y)\}$, дизъюнкт $C = P(x, y)$, основной пример $C' = P(g(a), a)$, шесть интерпретаций:
- $I_1 = \{P(a, a), Q(a, a), P(a, g(a)), Q(a, g(a)), P(g(a), a), Q(g(a), a), P(g(a), g(a)), Q(g(a), g(a)), \dots\}$,
- $I_2 = \{\sim P(a, a), Q(a, a), \sim P(a, g(a)), Q(a, g(a)), \sim P(g(a), a), Q(g(a), a), \sim P(g(a), g(a)), \dots\}$,
- $I_3 = \{P(a, a), \sim Q(a, a), P(a, g(a)), \sim Q(a, g(a)), P(g(a), a), \sim Q(g(a), a), P(g(a), g(a)), \dots\}$,
- $I_4 = \{\sim P(a, a), \sim Q(a, a), \sim P(a, g(a)), \sim Q(a, g(a)), \sim P(g(a), a), \sim Q(g(a), a), \sim P(g(a), g(a)), \dots\}$,
- $I_5 = \{\sim P(a, a), Q(a, a), P(a, g(a)), Q(a, g(a)), P(g(a), a), Q(g(a), a), P(g(a), g(a)), \dots\}$,
- $I_6 = \{\sim P(a, a), \sim Q(a, a), P(a, g(a)), Q(a, g(a)), P(g(a), a), Q(g(a), a), P(g(a), g(a)), \dots\}$,
- тогда основной пример C' выполняется в интерпретации I_1, I_3, I_5, I_6 и опровергается в I_2, I_4 .

- Дизъюнкт выполняется в данной интерпретации тогда и только тогда, когда каждый основной пример выполняется в данной интерпретации.
- Дизъюнкт опровергается в данной интерпретации тогда и только тогда, когда существует хотя бы один основной пример данного дизъюнкта, который не выполняется в данной интерпретации.
- Вернемся к предыдущему примеру, дизъюнкт $C = P(x, y)$ выполняется в интерпретации I1, I3 и опровергается в I2, I4, I5, I6.
- Множество дизъюнктов невыполнимо тогда и только тогда, когда для каждой интерпретации существует хотя бы один основной пример дизъюнкта, невыполнимый в данной интерпретации.

- Пусть $S = \{P(x) \vee \sim Q(x), \sim P(x), Q(x)\}$, на данном множестве дизъюнктов существуют четыре интерпретации:
- $I_1 = \{P(c), Q(c)\}$,
- $I_2 = \{\sim P(c), Q(c)\}$,
- $I_3 = \{P(c), \sim Q(c)\}$,
- $I_4 = \{\sim P(c), \sim Q(c)\}$.
- В интерпретации I_1 опровергается дизъюнкт $\sim P(x)$; дизъюнкт $P(x) \vee \sim Q(x)$ опровергается в интерпретации I_2 ; интерпретация I_3 опровергает дизъюнкт $Q(x)$; этот же дизъюнкт $Q(x)$ опровергается в интерпретации I_4 . Рассматриваемое множество дизъюнктов невыполнимо, потому что оно опровергается во всех интерпретациях.
- Теорема Эрбрана. Множество дизъюнктов невыполнимо тогда и только тогда, когда существует конечное невыполнимое множество основных примеров дизъюнктов указанного множества.

- Рассмотрим предыдущий пример, $S = \{P(x) \vee \sim Q(x), \sim P(x), Q(x)\}$, приведенное множество дизъюнктов невыполнимо потому, что существует следующее невыполнимое множество основных примеров:
- $S' = \{P(c) \vee \sim Q(c), \sim P(c), Q(c)\}$.
- На основе теоремы Эрбрана может быть создана компьютерная процедура, генерирующая множества основных примеров и проверяющая их невыполнимость. Одним из первых, кто осуществил это, был П. Гилмор. Он в 1960 году написал компьютерную программу, которая порождает множества основных примеров, полученных заменой переменных во множестве дизъюнктов на константы эрбрановского универсума. Так как множество основных примеров – это конъюнкция дизъюнктов, не содержащих переменных (по сути, это высказывания), то можно воспользоваться любым из восьми способов проверки противоречивости данного множества при условии, что множество основных примеров конечно.

- Процедуры поиска опровержения, основанные на теореме Эрбрана, имеют один существенный недостаток – они требуют генерации множеств $S'_1, S'_2, \dots, S'_n, \dots$ основных примеров рассматриваемого множества дизъюнктов S . Очень часто размерность множеств основных примеров растет экспоненциально, по этой причине такие процедуры не имеют практического применения на современных компьютерах. И только с появлением метода резолюций, разработанного Дж. Робинсоном, были найдены эффективные компьютерные процедуры доказательства невыполнимости множества дизъюнктов. Идея метода Робинсона состоит в том, чтобы работать напрямую с дизъюнктами, входящими в рассматриваемое множество, не порождая основных примеров

- Реализация метода резолюций требует применения операции унификации. Но прежде чем объяснить эту операцию, дадим определение понятия подстановки.
- Подстановка – это конечное множество вида $\{v_1 = t_1, v_2 = t_2, \dots, v_n = t_n\}$, где v_j – это переменная, а t_j – это терм, отличный от v_j , причем все v_j отличны друг от друга.
- Унифицировать два или более выражений – значит найти такую подстановку, которая делает выражения одинаковыми (тождественными). Такая подстановка называется унификатором.

- Рассмотрим два выражения $P(x, a, f(a, g(y)))$ и $P(h(v), z, f(z, u))$.
- Они не тождественны, однако, если применить к ним операцию унификации с подстановкой $\{x = h(v), z = a, u = g(y)\}$, то получим два тождественных выражения $P(h(v), a, f(a, g(y)))$.
- В логическом исчислении удобно работать с дизъюнктами, не содержащими повторяющихся литер. Устранение повторения в результирующем дизъюнкте выполняют с помощью операции склейки. Если две или более литер с одинаковым знаком в дизъюнкте C имеют общий унификатор $\{v_1 = t_1, v_2 = t_2, \dots, v_n = t_n\}$, то дизъюнкт, полученный из C заменой одновременно всех вхождений переменных v_i на термы t_i , называется склейкой дизъюнкта C .
- Применение операции унификации и склейки позволяет использовать метод резолюций в логике предикатов первого порядка.

- Унификация производится при следующих условиях :
- 1. Если термы константы, то они унифицируемы тогда и только тогда , когда они совпадают.
- 2. Если в первом дизъюнкте терм переменная, а во втором константа, то они унифицируемы, при этом вместо переменной подставляется константа
- 3. Если терм в первом дизъюнкте переменная и во втором дизъюнкте терм тоже переменная, то они унифицируемы. При этом переменные заменяется на какую-либо переменную и все их вхождения тоже заменяются на эту переменную.
- 4. Если в первом дизъюнкте терм переменная, а во втором - употребление функции, то они унифицируемы, при этом вместо переменной подставляется употребление функции.
- 5. Унифицируются между собой термы, стоящие на одинаковых местах в одинаковых предикатах.

- Пусть $C1$ и $C2$ – дизъюнкты, не имеющие общих переменных. Если в дизъюнкте $C1$ существует литера $L1$, а в дизъюнкте $C2$ существует литера $\sim L2$, и литеры $L1$ и $\sim L2$ унифицируемы, то, вычеркнув литеры $L1$ и $\sim L2$ из $C1$ и $C2$ соответственно, построим дизъюнкцию оставшихся дизъюнктов, которая называется бинарной резольвентой дизъюнктов
- $C1$ и $C2$.
- Рассмотрим пример: пусть $C1 = P(x, g(b)) \vee \sim Q(x)$ и $C2 = \sim P(a, g(x)) \vee R(z)$. Сначала переименуем переменную x в первом дизъюнкте:
- $C1 = P(y, g(b)) \vee \sim Q(y)$. Выберем в дизъюнкте $C1$ литеру $L1 = P(y, g(b))$ и литеру $L2 = \sim P(a, g(x))$ в $C2$. Литеры $L1$ и $\sim L2$ имеют общий унификатор $\{y = a, x = b\}$, тогда бинарная резольвента имеет следующий вид: $\sim Q(a) \vee R(z)$.

- Резольвентой дизъюнктов $C1$ и $C2$ является одна из следующих резольвент:
- бинарная резольвента $C1$ и $C2$;
- бинарная резольвента $C1$ и склейки $C2$;
- бинарная резольвента $C2$ и склейки $C1$;
- бинарная резольвента склейки $C1$ и склейки $C2$.
- Пусть $C1 = \sim P(x, y) \vee \sim P(f(z), z) \vee \sim Q(x, y)$ и $C2 = P(f(g(a)), g(a)) \vee R(a)$. Склейка $C1$ имеет следующий вид: $\sim P(f(z), z) \vee \sim Q(f(z), z)$.
- Бинарная резольвента склейки $C1$ и $C2$ равна $\sim Q(f(g(a)), g(a)) \vee R(a)$.