



ТЕПЛОМАССООБМЕН

Лекция 3. Условия однозначности.

**Теплопроводность плоской стенки
при стационарном тепловом режиме**

УСЛОВИЯ ОДНОЗНАЧНОСТИ

Дифференциальное уравнение теплопроводности (ДУТ) выведено из общих законов физики и, следовательно, описывает процессы теплопроводности в любых условиях, т.е. описывает бесчисленное множество явлений.

Для выделения из этого множества какого-то конкретного процесса к ДУТ необходимо присоединить математическое описание всех особенностей именно данного рассматриваемого процесса.

Эти частные особенности называются **условиями однозначности**, которые включают в себя:

- 1] **геометрические условия** (форма и размеры тела, в котором протекает процесс);
- 1] **физические условия** (свойства тела и окружающей среды: c , λ , ρ , ... ; закон распределения внутренних источников теплоты);
- 1] **краевые условия**
 - **начальные (временные) условия** (распределение температур в теле в начальный момент времени);
 - **граничные условия**, характеризующие взаимодействие тела с окружающей средой (условия на границах тело-среда)

НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Необходимы при рассмотрении нестационарных процессов и состоят в описании закона распределения температуры (т.е. температурного поля) внутри тела в начальный момент времени ($\tau=0$).

В общем случае

$$t_{\tau=0} = f(x, y, z).$$

При равномерном начальном распределении температуры в теле **НУ** упрощаются

$$t = t_0 = \text{const.}$$

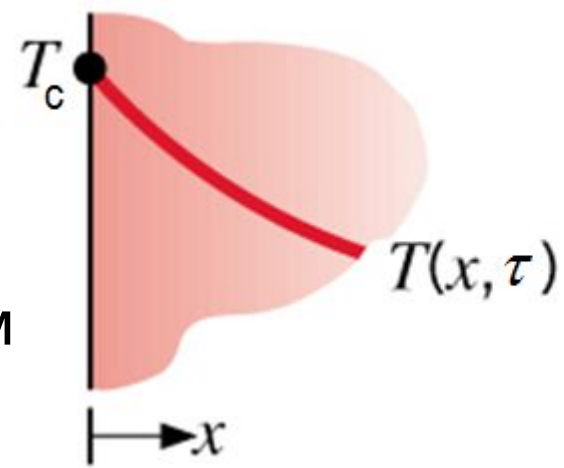
Пример:

слиток металла, разогретый в кузнечном горне до определенной температуры t_0 (на глаз – по цвету), мгновенно погружается в холодную воду, и с этого момента начинается процесс охлаждения (закалка).

ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ первого рода (ГУ I рода)

Задаётся распределение температуры на поверхности тела для каждого момента времени

$$t_c = f(x, y, z, \tau).$$



В частном случае, когда температура на поверхности тела является постоянной на протяжении всего процесса, условие упрощается

$$t_c = \text{const.}$$

Пример:

тело **нагревается** конденсирующимся паром или **охлаждается** кипящей жидкостью. Температура поверхности тела в любой момент времени может быть принята равной температуре насыщения пара/жидкости ($t_s = \text{const}$ при $p = \text{const}$).

Граничное условие второго рода (ГУ II рода)

Задаётся величина плотности теплового потока для каждой точки поверхности тела в любой момент времени:

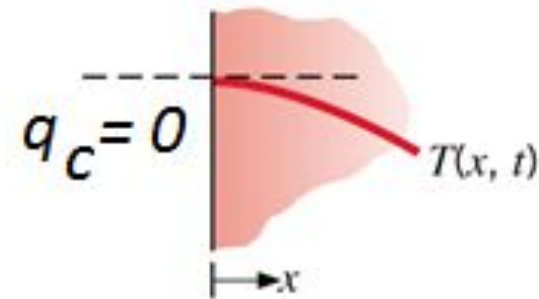
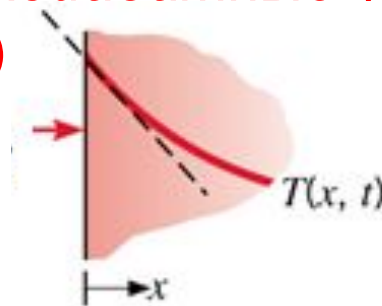
$$q_c = f(x, y, z, \tau) = -\lambda_c \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_c.$$

В частном случае, когда плотность теплового потока на *всей поверхности* тела постоянна на протяжении *всего процесса*

Адиабатные условия

(идеальная изоляция)

$$q_c = -\lambda_c \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_c = const$$



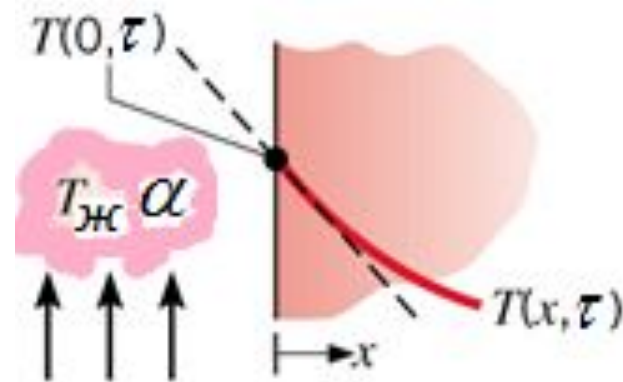
Пример: электрообогрев тела поверхностным нагревателем;

Граничное условие третьего рода (ГУ III рода)

Задаются: температура окружающей среды и закон конвективного теплообмена между телом и средой (коэффициент теплоотдачи α)

$$q_{\text{жс}} = \alpha_c (t_{\text{ж}} - t_{\text{с}}) = -\lambda_{\text{т}} \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)_c$$

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)_c = -\frac{\alpha}{\lambda_{\text{т}}} (t_{\text{ж}} - t_{\text{с}})$$



Индексы: "с" – поверхность тела ($x=0$), "т" – тело, "ж" – жидкость.

Данное условие является частным выражением **закона сохранения энергии** для поверхности тела: количество теплоты, которое подводится к поверхности тела от жидкости в процессе теплоотдачи, равняется количеству теплоты, отводимому теплопроводностью от поверхности внутрь тела.

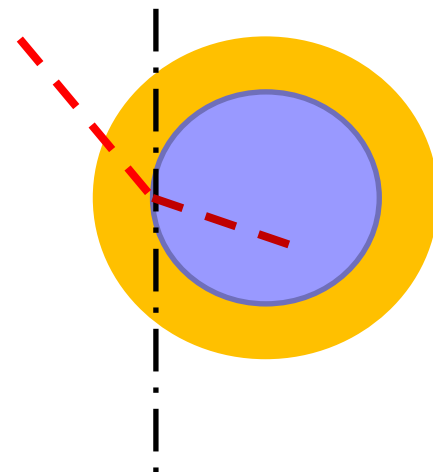
Обычно принимают $\alpha \approx \text{const}$ на всей поверхности.

Граничное условие четвёртого рода (ГУ IV рода; сопряжённая задача)

Применяется для расчёта теплового взаимодействия между телами или телом и средой в случаях, когда ГУ 1-3 рода сформулировать не удаётся.

При идеальном тепловом контакте должны соблюдаться условия равенства температур и плотностей тепловых потоков на границе раздела

$$\begin{aligned} t_{1,г} &= t_{2,г} \\ \lambda_1 \left(\frac{\partial t_1}{\partial n} \right)_г &= \lambda_2 \left(\frac{\partial t_2}{\partial n} \right)_г + q_v \\ \lambda_1 \left(\frac{\partial t_1}{\partial n} \right)_г &= \lambda_2 \left(\frac{\partial t_2}{\partial n} \right)_г \quad (q_v = 0) \end{aligned}$$



Индексы: "г" – граница раздела тел ($n=0$), "1" и "2" – номера тел.

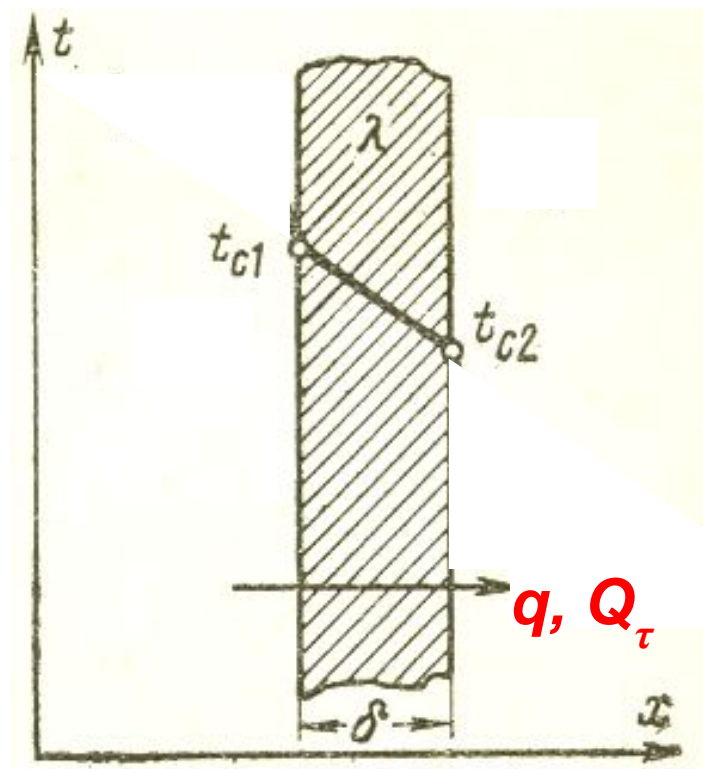
Сопряжённая задача сводится к нахождению температурных полей по обе стороны от границы раздела.

Стационарная теплопроводность плоской стенки (пластины) при ГУ I рода и $q_v = 0$

Рассматривается безграничная однородная плоская стенка с известными свойствами ($\lambda = \text{const}$), площадью поверхности F и толщиной $\delta \ll$ высоты и ширины пластины.

На наружных поверхностях стенки поддерживаются постоянные температуры t_{c1} и t_{c2} . В этих условиях температура изменяется только по толщине пластины – одномерная задача (1D-problem)

Определить температурное поле в стенке, плотность теплового потока и количество теплоты, переносимой через стенку теплопроводностью.



Дифференциальное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t + \frac{q_v}{c\rho}$$

Уравнение Фурье ($q_v = 0$)

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t$$

Уравнение Пуассона (стационарная задача)

$$a \nabla^2 t + \frac{q_v}{c\rho} = 0$$

Уравнение Лапласа (стационарная задача, $q_v = 0$, $a = \text{const}$)

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a \nabla^2 t &= 0 \\ \nabla^2 t &= 0 \end{aligned} \quad \frac{d^2 t}{dx^2} = 0$$

Математическая формулировка задачи

Стационарная теплопроводность плоской пластины в отсутствие внутренних источников тепла описывается **одномерным** $[t = f(x)]$ уравнением Лапласа

$$\frac{d^2 t}{dx^2} = 0. \quad (1)$$

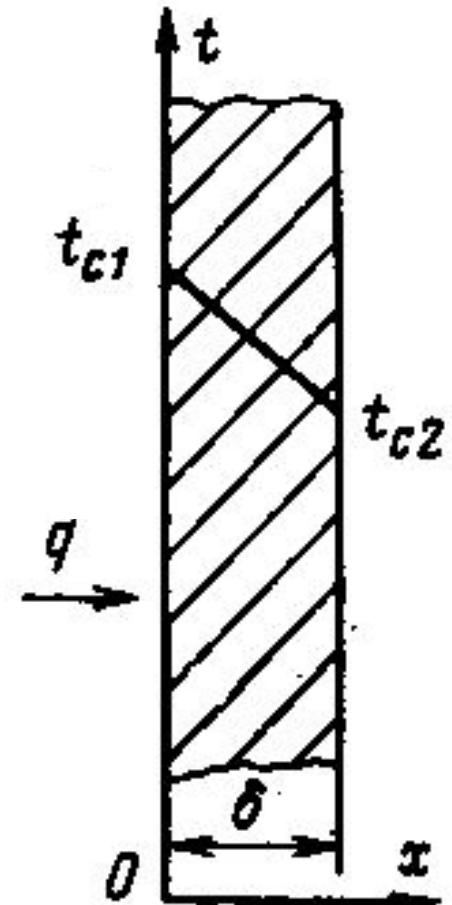
Граничные условия I рода (для обеих поверхностей пластины):

– при $x = 0$

$$t|_{x=0} = t(0) = t_{c1} \quad (2)$$

– при $x = \delta$

$$t|_{x=\delta} = t(\delta) = t_{c2} \quad (3)$$



Решение задачи

Уравнение (1) и условия (2) и (3) дают полную математическую формулировку рассматриваемой задачи, решение которой – распределение (поле) температур в стенке – находится путём двойного интегрирования ур-я (1).

Первое интегрирование даёт

$$\frac{dt}{dx} = C_1, \quad (4)$$

где C_1 – *постоянная интегрирования*.

Второе интегрирование даёт общее решение

$$t = C_1 x + C_2, \quad (5)$$

что соответствует **линейному закону** изменения температуры по толщине стенки (вдоль оси Ox).

Последовательно применяя к (5) граничные условия (2) и (3), находим постоянные интегрирования

$$t_{c1} = C_1 0 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = t_{c1},$$

$$t_{c2} = C_1 \delta + t_{c1} \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{t_{c1} - t_{c2}}{\delta}.$$

Подстановка значений постоянных интегрирования в *общее* решение (5) приводит к *частному* решению уравнения (1), удовлетворяющему граничным условиям (2) и (3)

$$t = t_{c1} - \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\delta} x = t_{c1} - \Delta t \frac{x}{\delta}. \quad (6)$$

Выражение (6) является уравнением стационарного температурного поля в плоской стенке при ГУ I рода.

Величину $\Delta t = (t_{c1} - t_{c2})$ называют **температурным напором** (движущей силой теплопроводности; разностью потенциалов переноса тепла).

Плотность теплового потока в стенке находится по закону Фурье с учётом общего решения (4), связывающего производную температуры с константой C_1

$$\frac{dt}{dx} = C_1 = -\frac{t_{c1} - t_{c2}}{\delta},$$
$$q = -\lambda \frac{dt}{dx} = \frac{\lambda}{\delta} (t_{c1} - t_{c2}) = \frac{\lambda}{\delta} \Delta t. \quad (7)$$

Из уравнения для плотности теплового потока (7) следует, что

$$\frac{(t_{c1} - t_{c2})}{\delta} = \frac{\Delta t}{\delta} = \frac{q}{\lambda} \Rightarrow \Delta t = q \frac{\delta}{\lambda} = q R_{\text{тпр}}$$

Подставляя это выражение в уравнение температурного поля (6) получаем

$$t = t_{c1} - \frac{q}{\lambda} x,$$

что при прочих равных условиях температура падает по толщине стенки *тем круче*, чем *выше* плотность теплового потока *q* и/или *ниже* коэффициент теплопроводности *λ*.

Полное количество теплоты, переданное через стенку с площадью поперечного сечения *F* за время *τ*, составит

$$Q_{\tau} = q F \tau = \frac{\lambda}{\delta} (t_{c1} - t_{c2}) F \tau = \frac{\lambda}{\delta} \Delta t F \tau.$$

Уравнение температурного поля пластины в безразмерном виде

$$t = t_{c1} - \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\delta} x = t_{c1} - \Delta t \frac{x}{\delta}. \quad (6)$$

В уравнении (6) $\Delta t = (t_{c1} - t_{c2})$ – **полный** температурный напор или *максимальная избыточная температура* относительно наименьшей температуры пластины t_{c2} .

Аналогичным образом можно определить **локальный температурный напор** $(t - t_{c2})$ при текущей координате x , отношение которого к Δt даёт **безразмерную температуру**

$$\Theta \equiv \frac{t - t_{c2}}{t_{c1} - t_{c2}}.$$

Входящее в (6) отношение текущей координаты x к толщине пластины представляет собой **безразмерную координату** $X \equiv x/\delta$.

С учётом этого уравнение температурного поля легко привести к виду

$$\Theta = 1 - X.$$

Вывод безразмерного уравнения. Уравнение (6)

стационарного температурного поля в плоской стенке:

$$K = t_{c1} - \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\delta} x = t_{c1} - \Delta t \frac{x}{\delta} = t_{c1} - (t_{c1} - t_{c2})$$

$$K - t_{c1} = -(t_{c1} - t_{c2})$$

$$K - t = -(t_{c1} - t_{c2})$$

$$\frac{t_{c1} - t}{t_{c1} - t_{c2}} = X$$

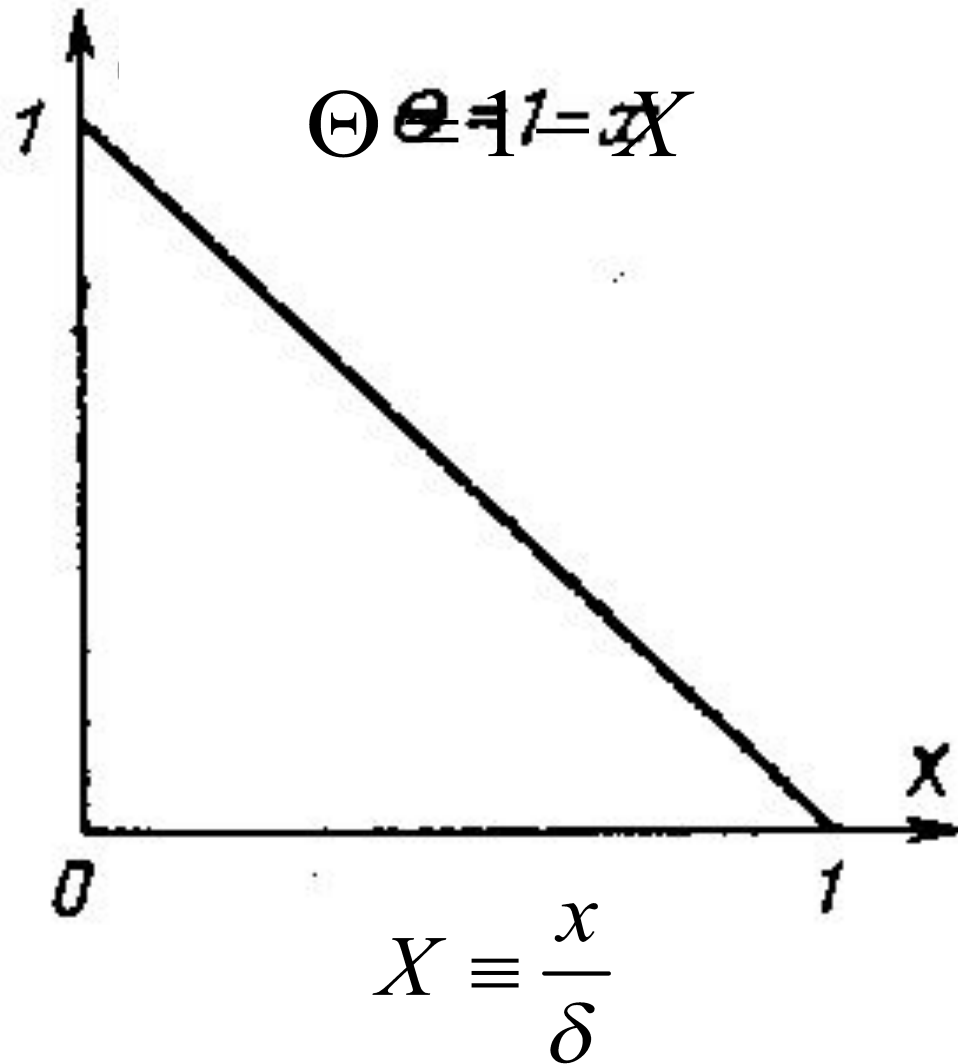
$$\Theta \equiv \frac{t - t_{c2}}{t_{c1} - t_{c2}}.$$

$$\frac{t_{c1} - t}{t_{c1} - t_{c2}} + \frac{t - t_{c2}}{t_{c1} - t_{c2}} = \frac{t_{c1} - t_{c2}}{t_{c1} - t_{c2}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{t_{c1} - t}{t_{c1} - t_{c2}} = 1 - \Theta$$

$$1 - \Theta = X \quad \Rightarrow \quad \Theta = 1 - X$$

Графическое представление распределения температуры в безразмерном виде

$$\Theta \equiv \frac{t - t_{c2}}{t_{c1} - t_{c2}}$$



Учет зависимости λ от температуры

Предполагаем, что зависимость к-та теплопроводности от температуры линейна

$$\lambda(t) = \lambda_0(1 + bt)$$

Тогда закон Фурье принимает вид (стационарная 1D задача)

$$q = -\lambda_0(1 + bt) \frac{dt}{dx}, \quad (a)$$

Разделим переменные и проинтегрируем (a) по x в пределах от 0 до δ и по температуре от t_{c1} до t_{c2}

$$\int_0^\delta q dx = - \int_{t_{c1}}^{t_{c2}} \lambda_0(1 + bt) dt$$
$$q\delta = \lambda_0(t_{c1} - t_{c2}) + \lambda_0 b \frac{(t_{c1}^2 - t_{c2}^2)}{2} = \lambda_0 \underbrace{\left[1 + b \frac{(t_{c1} + t_{c2})}{2} \right]}_{\lambda_{cp}} (t_{c1} - t_{c2})$$

Среднеинтегральное значение λ
в рассматриваемом интервале
температур (теорема о среднем)

$$\lambda_{cp} = \frac{1}{t_{c1} - t_{c2}} \int_{t_{c1}}^{t_{c2}} \lambda(t) dt$$

Т. обр.,

$$q = \frac{\lambda_{cp}}{\delta} (t_{c1} - t_{c2}) = \frac{\lambda_{cp}}{\delta} \Delta t,$$

т.е. плотность теплового потока можно вычислять в предположении $\lambda = \text{const}$, принимая его равным **среднеинтегральному** значению в рассматриваемом интервале температур

$$\lambda = \lambda_{cp} = \lambda_0 \left[1 + b \frac{(t_{c1} + t_{c2})}{2} \right] = \lambda_0 (1 + b t_{cp.арифм})$$

Интегрируя выражение **(а)** в пределах от **0** до текущей координаты **x** и от **t_{c1}** до текущей температуры **t**, можно получить выражение для температурного поля при **λ(t)**

$$t = \sqrt{\left(\frac{1}{b} + t_{c1}\right)^2 - \frac{2qx}{\lambda_0 b}} - \frac{1}{b} = \sqrt{\left(\frac{1}{b} + t_{c1}\right)^2 - \frac{2\lambda_{cp}}{b\lambda_0} \frac{x}{\delta} \Delta t} - \frac{1}{b},$$

которое показывает, что температура в стенке изменяется **не линейно, а по степенной зависимости** $t(x) \sim (A - Bx)^{1/2} - C$.

Распределение температуры в пластине при постоянном и переменном λ

