

Дисциплина **МАТЕМАТИКА**

Лектор: **Юлия Абдулловна Ахкамова**,
доцент кафедры математики
и методики обучения математике
ЮУрГГПУ

akhkamovayua@cspu.ru

Разделы математики

- 1. Линейная и векторная алгебра
- 2. Аналитическая геометрия
- 3. Функции. Дифференциальное исчисление.
- -----
- 4. Интегральное исчисление.
- 5. Дифференциальные уравнения. Ряды.
- 6. Теория вероятностей и математическая статистика.

ППИ, 1 курс

- 1 семестр:

1 лекция (2 ч);

практ.занятий (6 ч и зачет).

Контрольная работа, зачет

- 2 семестр:

3 лекции (6 ч);

3 практ. занятий (6 ч);

консультаций (3 ч).

Экзамен (6 ч)

Балльно-рейтинговая система

1 курс

- Он-лайн 1 лекции 5 баллов (max $1*5=5$);
- 3 лаб. занятия по 5 баллов(max $3*5=15$);

Контрольная работа №1 задачи 1,3а,б,в,8 (max 60);

Защита-обсуждение занятий или кр (электронного варианта) max 10 баллов);

Зачетная работа до 20 баллов .

60 баллов и выше «Зачтено»,



МАТЕМАТИКА Раздел 1. ЛИНЕЙНАЯ и ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Лекция № 1.

***Матрицы. Действия над
матрицами. Определители и
их свойства.***

ЛИТЕРАТУРА (ППИ)

- Худякова М.М., Фалькова О.Н,
Основы высшей математики.

Данко П.Е., Попов А.Г и др. Высшая математика в упражнениях и задачах, части I,II.

-
- Баврин И.И. Высшая математика.
 - Шолохович Ф.А. Высшая математика в кратком изложении.

Учебные вопросы.

- **1. Линейные операции над матрицами.
Произведение и транспонирование матриц.**
- 2. Вычисление ранга матрицы путем
приведения её к треугольному виду.**
- 3. Метод Гаусса систем линейных
алгебраических уравнений.**
- **4. Построение выпуклого многоугольника.**

Введение в дисциплину

- **Линейная алгебра** – раздел алгебры, изучающий линейные и векторные пространства. Исторически первым разделом линейной алгебры была теория линейных уравнений.
- Именно в связи с решением систем линейных уравнений возникли понятия *матрицы* и *определителя*.



1 Учебный вопрос.

Линейные операции над матрицами.

(Правило сложения , вычитания матриц. Правило умножения матрицы на число.)

Произведение и транспонирование матриц.

Определение . Числовой матрицей размерности $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел состоящая из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \boxtimes & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \boxtimes & a_{2n} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \boxtimes & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числа a_{ij} называются элементами матрицы A ,
 i – номер строки, j – номер столбца, на пересечении
которых стоит элемент a_{ij} .

Принятые обозначения матрицы:

Прописные буквы латинского алфавита A, B, C, ...

$A_{m \times n}$, если хотят указать размерность матрицы.

Пример.

$$A_{2 \times 5} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 6,47 & 0 & \sqrt{3} \\ 80 & 1 & 2 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

Матрица может состоять из одного столбца или из одной строки, и даже из одного элемента.

Определение . Матрицы A и B называются **равными матрицами**, если они одинаковой размерности и все их соответствующие элементы a_{ij} и b_{ij} равны, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$.

Замечание. Равными могут быть только матрицы одинаковой размерности.

Определение. Матрица называется квадратной матрицей, если число её строк равно числу её столбцов, т.е. $m=n$.

Определение. Главной диагональю квадратной матрицы называется линия, вдоль которой расположены элементы $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$.

Определение. Матрица называется нулевой матрицей, если все её элементы равны нулю.

Определение. Квадратная матрица называется **диагональной матрицей**, если на главной диагонали расположены числа, отличные от нуля, вне главной диагонали - нули.

Определение. Диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят единицы, а остальные элементы – нули, называется **единичной матрицей**.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

Сложение и вычитание матриц

Сложение и вычитание матриц *определено только для матриц одинаковой размерности.*

Определение. Суммой (разностью) матриц $A_{m \times n}$ и $B_{m \times n}$ одинаковой размерности является матрица $C_{m \times n}$ той же размерности, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме (разности) соответствующих элементов этих матриц

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$(c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}).$$

Пример. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Найти $C = A + B$.

Решение

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$



Свойства сложения

1. $A+B=B+A$

2. $(A+B)+C=A+(B+C)$

3. $A+O=A$, где O – нулевая матрица такой же размерности, как и матрица A .



Умножение матрицы на число

- Это матрица, полученная умножением соответствующих элементов на данное число

Транспонирование матриц

Определение. Матрицу A^T называют транспонированной матрицей к данной матрице A , если элементы каждой строки матрицы A стали элементами столбцами матрицы A^T под тем же номером.

Умножение матриц

Определение. Произведением матрицы $A_{m \times n}$ на матрицу $B_{n \times k}$ называется матрица

$C_{m \times k} = A \cdot B$, имеющая m строк и k столбцов, у которой элемент c_{ij} равен сумме произведений элементов i -й строки матрицы A и j -го столбца матрицы B .

Замечание:

Произведение матриц существует только для согласованных матриц, т.е. когда первый множитель имеет число столбцов, равное числу строк второго множителя.

Пример умножения матриц



- Замечание: в общем случае $AB \neq BA$.

Учебный вопрос.

Определители второго и третьего порядков, их вычисление .

(Правило вычисления определителя II порядка.

Правило треугольников вычисления определителя III порядка .)


$$|A| = |a_{ij}| = \det A = \det(a_{ij}) = D.$$

$$|A| = a_{11}.$$

■ Замечание: в общем случае $AB \neq BA$.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Если порядок матрицы равен трем ($n=3$), то определителем третьего порядка назовем число, вычисленное по формуле:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ &- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11} \end{aligned}$$

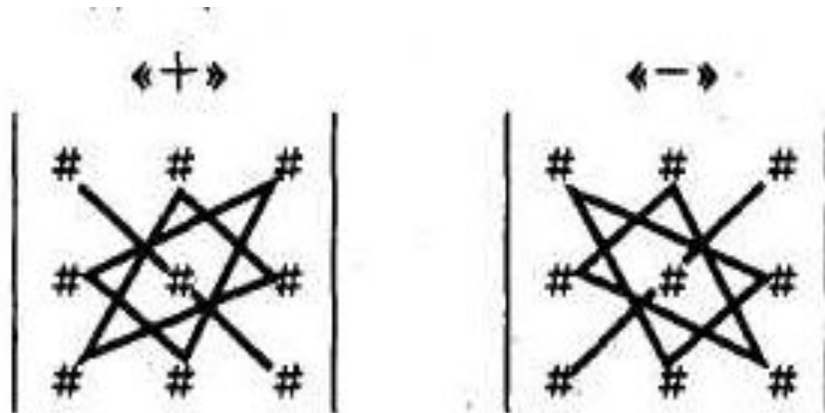
1 способ) Данную формулу можно запомнить приписав к определителю первые два столбца.

Со знаком плюс берутся произведения элементов стоящих на главной диагонали и на диагоналях, параллельных к ней, со знаком минус – произведения элементов на побочной диагонали и диагоналей, параллельных к ней.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Или, 2 способ) используем правило треугольников:



В этой схеме плюс означает, что произведения указанных элементов берутся со своими знаками, а минус – с противоположными.

**Пример. Вычислить определитель приписыванием
первых двух столбцов**

Решение.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 - 2 + 0 - 4 - 0 - 0 = -4$$

- 
- Замечание: в общем случае $AB \neq BA$.

Пример. Для определителя $|A|$ укажем некоторые миноры и алгебраические дополнения:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

■ Замечание: в общем случае $AB \neq BA$.

■ Замечание: в общем случае $AB \neq BA$.

- 
- Учебный вопрос
Свойства определителя.

Свойства определителей. (д3)

1. При транспонировании матрицы ее определитель не изменяется: $|A| = |A^T|$
2. При перестановке двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак на противоположный.
3. Определитель с двумя равными или пропорциональными строками (или столбцами) равен нулю.
4. Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.
5. Определитель с нулевой строкой (или столбцом) равен нулю.

- 
- Алгоритм вычисления определителя методом приведения его к треугольному виду.



6. Определитель не изменится, если к элементам одной строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число (не равное нулю).

7. Определитель диагональной матрицы равен произведению элементов на главной диагонали.

С помощью свойств 6-7 определитель можно привести к треугольному виду и легко вычислить. (долгий процесс)

8. Определитель, все элементы i -ой строки (столбца) которого представляют сумму двух слагаемых, равна сумме двух определителей, все элементы которых, кроме i -ой строки (столбца), те же, что и в исходном, а в i -ой строке (столбце) первого определителя стоят первые слагаемые, в i -ой строке (столбце) второго определителя – вторые.

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- Учебный вопрос .

**Разложение определителя по
элементам строки или столбца
матрицы (теорема Лапласа).**



Определение. Определителем матрицы n -го порядка называется число, которое сопоставляется квадратной матрице n -го порядка, получаемое по определенному правилу (Теорема Лапласа).

Теорема Лапласа.

Определитель матрицы n -го порядка равен сумме произведений элементов какой-либо строки (или столбца) на их алгебраические дополнения.

- 
- Замечание: в общем случае $AB \neq BA$.

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & 3 & -2 \\ -7 & 8 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -1 \cdot A_{11} + 3 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13} + 2 \cdot A_{14} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 8 & 2 & 7 \\ -5 & 3 & -2 \\ 8 & 4 & 5 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & -2 \\ -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -5 & 8 & 7 \\ 4 & -5 & -2 \\ -7 & 8 & 5 \end{vmatrix} -$$

$$- 2 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 8 & 2 \\ 4 & -5 & 3 \\ -7 & 8 & 4 \end{vmatrix} =$$



$$\begin{aligned}
 &= -(120 - 32 - 140 - 168 + 64 + 50) - \\
 &- 3 \cdot (-75 + 28 + 112 + 147 - 40 - 40) \\
 &+ 125 + 112 + 224 - 245 - 80 - 160 - \\
 &- 2 \cdot (100 - 168 + 64 - 70 + 120 - 128) = \\
 &= 106 - 3 \cdot 132 - 24 - 2 \cdot (-82) = \\
 &= 106 - 396 + 140 = -150;
 \end{aligned}$$

Алгоритм вычисления определителя методом эффективного понижения порядка.

- 1) Выбрать «ряд» определителя (строку или столбец), содержащий нуль (используя свойства определителей можем получить нуль).
- 2) Вычислить алгебраические дополнения элементов этого «ряда».
- 3) Применить теорему Лапласа для вычисления данного определителя.



Раздел 1. ЛИНЕЙНАЯ и ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

***Обратная матрица. Ранг
матрицы. Основные сведения о
СЛУ. Методы решения СЛУ.***

ЛИТЕРАТУРА (ППИ)

- Данко П.Е., Попов А.Г и др. Высшая математика в упражнениях и задачах, части I,II.

-
- Баврин И.И. Высшая математика.
 - Шолохович Ф.А. Высшая математика в кратком изложении.



Учебный вопрос .

Алгоритм отыскания обратной матрицы

Определение. Квадратная матрица называется вырожденной матрицей, если её определитель равен нулю.

Квадратная матрица A называется невырожденной матрицей, если $|A| \neq 0$.

Определение. Матрица A^{-1} называется обратной матрицей к матрице A , если $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Теорема об обратной матрице

Если квадратная матрица A невырожденная, то существует обратная матрица и находим ее по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A^*)^T$$

■ Формула для обратной матрицы 3-его порядка:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

- Алгоритм составления обратной матрицы:

- 1)

- 2)

- **Пример. Найти матрицу, обратную данной**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

■ Воспользуемся формулой

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

- 
- Замечание: в общем случае $AB \neq BA$.


$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -10;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 17; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -17;$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -9;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 6.$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{34} \begin{pmatrix} -6 & -2 & -10 \\ 17 & -17 & 0 \\ 7 & -9 & 6 \end{pmatrix}.$$