Элементы линейной алгебры

Матрицы

Матрицей размера m×n называется
прямоугольная таблица чисел,
состоящая из m строк и n столбцов.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & a_{ij} & ..... \\ a_{m1} & a_{m2} & ..... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числа a_{ij} – элементы матрицы:
i – номер строки
j – номер столбца.

Обозначения матриц:
A, B, C … или (a_{ij}), (b_{ij}), (c_{ij}) ...

Виды матриц. Квадратная матрица (m=n)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\dots\dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Виды матриц. Диагональная матрица

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & .... & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & .... & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & .... & 0 \\ .... & .... & ..... & .... & .... \\ 0 & 0 & 0 & .... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Виды матриц. Единичная и нулевая матрицы

Единичная

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots. & 0 \\ 0 & 1 & \dots. & 0 \\ \dots. & \dots. & \dots.. & \dots.. \\ 0 & 0 & \dots.. & 1 \end{pmatrix}$$

Нулевая

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots. & 0 \\ \dots. & \dots. & \dots. \\ 0 & \dots. & 0 \end{pmatrix}$$

Виды матриц. Ступенчатая матрица, матрица-столбец и матрица-строка

Ступенчатая

$$C = \begin{pmatrix} \underline{\otimes} & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \underline{\otimes} & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \underline{\otimes} \end{pmatrix}$$

Матрица-столбец (m×1)

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots . \\ a_m \end{pmatrix}$$

Матрица-строка (1×n)

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots . & a_n \end{pmatrix}$$

Равенство матриц

Две матрицы
A= (a_{ij}) и B=(b_{ij})
называются **равными**,
если

1) Размеры матриц совпадают

2) Соответствующие элементы матриц равны:
$$a_{ij}=b_{ij},$$
$i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$.

Сумма матриц

Суммой матриц A=(a_{ij}) и B=(b_{ij}) одинакового размера m×n называется матрица C=(c_{ij}) размера m×n, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B

$$\boxed{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\ , \quad (\, i = \overline{1\,,m}\, ;\; j = \overline{1\,,n}\,)}$$

Пример.

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+4 & 3+5 \\ -1+2 & 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Разность матриц

Разностью матриц A=(a_{ij}) и B=(b_{ij}) одинакового размера m×n называется матрица C=(c_{ij}) размера m×n, каждый элемент которой равен разности соответствующих элементов матриц A и B

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}\,, \quad (\, i = \overline{1\,,m}\,;\; j = \overline{1\,,n}\,)$$

Пример.

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-4 & 3-5 \\ -1-2 & 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Произведение матрицы на число

Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ на число λ называется матрица того же размера, элементы которой равны λa_{ij}.

$$\lambda = 3\,; \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot 3 = 3 \cdot A = 3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Умножение матриц

Произведением матрицы A=(a_{ij}) (размера m×p) **на матрицу** B=(b_{ij}) (размера p×n) называется матрица C=(c_{ij}) (размера m×n), элементы которой вычисляются по формулам:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ip} \cdot b_{pj}$$

$$i = \overline{1, m}\,; \quad j = \overline{1, n}.$$

Умножение матриц

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{ip} \cdot b_{pj}}$$

$$i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}.$$

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} \; \cdots & a_{ip} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & b_{1j} & \cdots \\ \cdots & \cdots & b_{2j} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ \cdots & \cdots & b_{pj} & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & & \cdots \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \cdots & \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots \\ \cdots & \cdots & & \cdots \end{pmatrix}$$

Транспонирование матрицы

Матрица A^T называется
транспонированной к матрице A, если в ней поменяли местами строки и столбцы.

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow \underset{n\times m}{A^T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Определитель матрицы

Определитель – это число, характеризующее квадратную матрицу.

1. $|A| = |a_{11}| = a_{11}$

2. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

3. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$

$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$

Определитель матрицы

Минором M_{ij} некоторого элемента a_{ij} определителя называется определитель, полученный из исходного вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow \quad M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель матрицы

Алгебраическим дополнением некоторого элемента определителя называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^S$, где S – сумма номеров строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.

$$A_{ij} = (-1)^S M_{ij}, \qquad S = i + j$$

Теорема Лапласа. Определитель равен сумме произведений всех элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

Обратная матрица

Пусть дана невырожденная (det A≠0)
квадратная матрица порядка n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots. & a_{2n} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots.. & \ldots.. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots.. & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрица A^{-1} называется обратной
к матрице А, если выполняются равенства

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E,$$

Е – единичная матрица.

Обратная матрица

Теорема.
Всякая невырожденная матрица
имеет единственную обратную матрицу.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij},

| A | – определитель матрицы A.

Системы линейных уравнений

Системой m линейных уравнений с n неизвестными называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

где a_{ij} и b_i — числа, x_i – неизвестные.

Решением системы уравнений называется ***такой набор чисел*** $x_1, x_2 .. x_n$, при котором ***каждое уравнение*** системы обращается ***в тождество***

Матричный вид системы

Обозначения:

Матрица коэффициентов при неизвестных

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & ..... & ..... \\ a_{m1} & a_{m2} & ..... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Столбец свободных членов

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .... \\ b_n \end{pmatrix},$$

Столбец неизвестных

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_n \end{pmatrix},$$

Матричные уравнения

Матричная запись системы:

$$A \cdot X = B$$

Пусть m=n
Пусть detA≠0

A^{-1} — существует

Тогда

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E} \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Правило Крамера

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Пусть m=n

Пусть detA = Δ ≠ 0

Обозначим

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \underline{b_1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \underline{b_2} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \cdots & \ldots & \cdots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \underline{b_n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

J – столбец

Правило Крамера

Решение системы

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

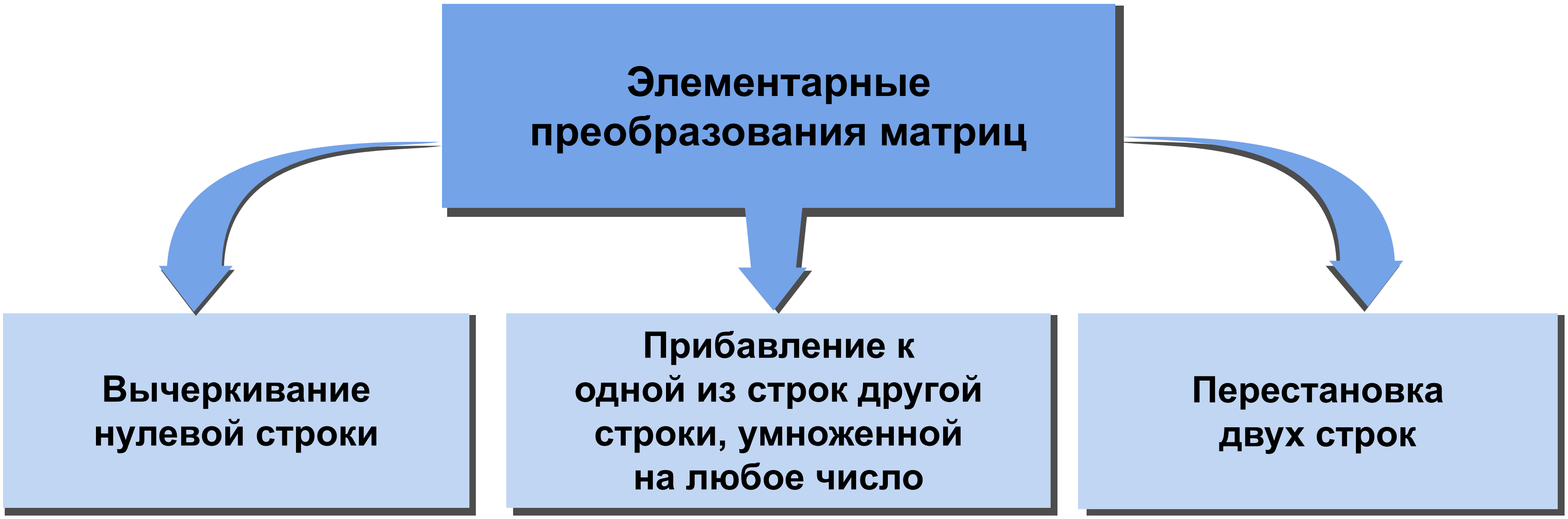
Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу А

Минор M_k *матрицы* **А** *называется ее* ***базисным минором****, если он отличен от нуля, а все миноры матрицы* **А** *более высокого порядка* $k+1$, $k+2$, …, t *равны нулю.*

Рангом матрицы r(A)
называется порядок его базисного минора.

Элементарные преобразования матриц



Элементарные преобразования матриц

Теорема 1.

Любую матрицу с помощью элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду.

Теорема 2.

При элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется.

Ранг ступенчатой матрицы равен числу (ненулевых) строк.

Метод Гаусса

Метод ***последовательного исключения неизвестных*** – наиболее ***распространенный метод*** решения систем линейных уравнений.

Суть метод Гаусса:

а) из всех уравнений системы кроме первого исключается неизвестное x_1;

б) из всех уравнений системы кроме первого и второго исключается неизвестное x_2;

в) из всех уравнений системы кроме первого, второго и третьего исключается неизвестное x_3 и т.д.

Метод Гаусса

Рассмотрим систему

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
$$

С помощью элементарных преобразований приводим ее к равносильной системе ступенчатого вида:

$$
\begin{cases}
c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1 \\
\qquad\quad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad\quad c_{kr}x_r + \ldots + c_{kn}x_n = d_k
\end{cases}
$$

Метод Гаусса

Возможен один из следующих случаев:

1) система не имеет решений
(система несовместна);

2) система имеет
единственное решение;

3) система имеет бесчисленное
множество решений.

Теорема Кронекера-Капелли

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots. & a_{2n} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots.. & \ldots.. \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots.. & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots. & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots. & a_{2n} & b_2 \\ \ldots. & \ldots. & \ldots.. & \ldots.. & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots.. & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Теорема Кронекера-Капелли

Теорема.

Система линейных уравнений ***совместна*** тогда и только тогда, когда

$$r(A) = r(\widetilde{A})$$