

Алгебра логики

Информатика и ИКТ

9 класс



Логика

Способность к развитому **абстрактному мышлению**, которая, формируется **логикой**, и есть то, что отделяет нас от животных. Термин **“логика”** происходит от греческого слова **logos** – то есть “мысль”, “разум”, “слово”.

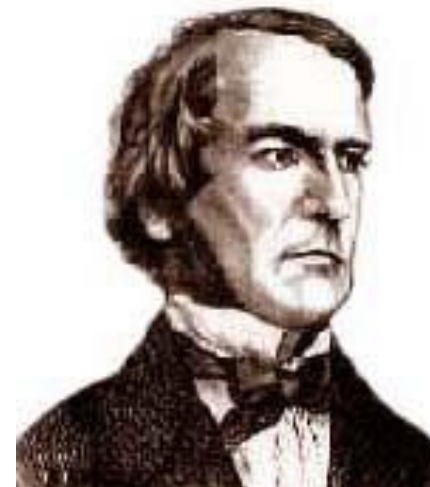
Логика – это наука о формах и способах мышления. Основными формами мышления являются понятие, высказывание и умозаключение.

Логика



Аристотель (384-322 до н.э.).
Основоположник формальной логики
(понятие, суждение, умозаключение).

Джордж Буль (1815-1864). Создал
новую область науки - Математическую
логику (Булеву алгебру или Алгебру
высказываний).

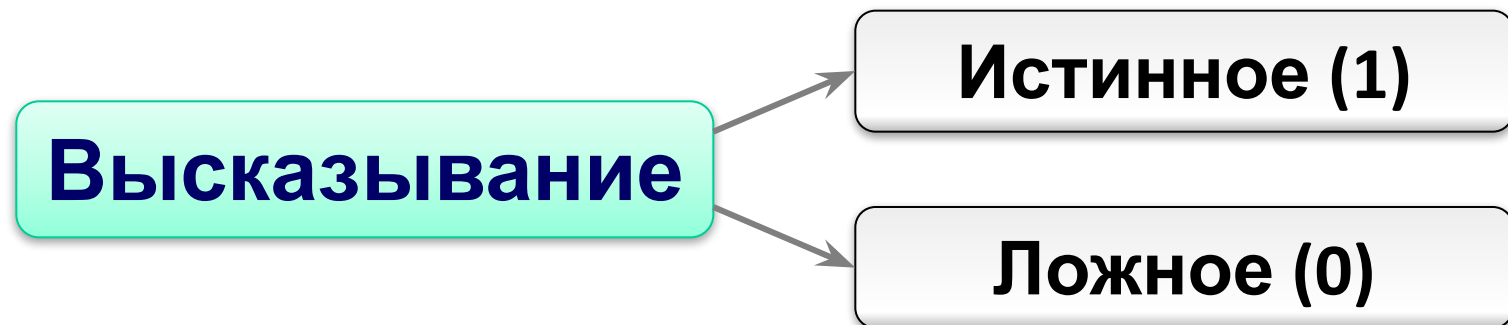


Клод Шеннон (1916-2001). Его
исследования позволили применить
алгебру логики в вычислительной технике

Высказывание

Высказывание – предложение на любом языке, содержание которого можно однозначно определить как **истинное** или **ложное**.

Высказывание может быть *истинным* или *ложным*



Высказывание

В русском языке высказывания выражаются повествовательными предложениями:

***Земля вращается вокруг Солнца.
Москва - столица.***

Но не всякое повествовательное предложение является высказыванием

Побудительные и вопросительные предложения высказываниями не являются.

***Без стука не входить!
Откройте учебники.
Ты выучил стихотворение?***

Примеры высказываний

- Москва больше Санкт-Петербурга
- Все мальчики любят играть в футбол
- “Лед - твердое состояние воды” (истинное высказывание)
- “Париж - столица Англии” (ложное высказывание)
- “Все рыбы умеют плавать” (общее)
- “Некоторые медведи - бурые” (частное)
- “Буква А - гласная” (единичное)
- “Кошка является домашним животным.” (?)
- “Некоторые ученики нашего класса двоечники.” (?)
- “Сейчас идет урок рисования” (?)

Высказывание

Объясните, почему следующие предложения не являются высказываниями.

- 1) Какого цвета этот дом?
- 2) Число **X** не превосходит единицы.
- 3) $4\mathbf{X} + 3$.
- 4) Посмотрите в окно.
- 5) Пейте томатный сок!
- 6) Эта тема скучна.
- 7) Рикки Мартин - самый популярный певец.
- 8) Вы были в театре?

Высказывание или нет

- ✓ Зимой идет дождь.
- ✓ Снегири живут в Крыму.

Кто к нам пришел?

- ✓ У треугольника 5 сторон.

Как пройти в библиотеку?

Переведите число в десятичную систему.

Запишите домашнее задание

Алгебра логики

Алгебра логики возникла в середине XIX века в трудах английского математика **Джорджа Буля**. Ее создание представляло собой попытку решать традиционные логические задачи алгебраическими методами.

Алгебра логики – это раздел математики, изучающий высказывания, их логические значения (истинность или ложность) и логические операций над ними.

Алгебра логики

- ✓ Алгебра логики позволяет определять истинность или ложность составных высказываний, не вникая в их содержание.
- ✓ Любое простое высказывание может принимать значение 0 (ложь) или 1 (истина).
- ✓ Простое высказывание называют **логическими переменными** и обозначают заглавной латинской буквой – А, В, С и т.д.

Простые и сложные высказывания

Высказывания могут быть **простыми** или **сложными**.

Сложные высказывания состоят из простых высказываний, соединенных **логическими связками**:

и

или

Неверно, что...

Если..., то...

В следующих высказываниях выделите простые высказывания, обозначив каждое из них буквой. Запишите с помощью букв и знаков логических операций каждое составное высказывание.

- 1) Число 376 чётное и трёхзначное.
- 2) Зимой дети катаются на коньках или на лыжах.
- 3) Новый год мы встретим на даче или на Красной площади.
- 4) Неверно, что Солнце движется вокруг Земли.
- 5) Земля имеет форму шара, который из космоса кажется голубым.
- 6) На уроке математики старшеклассники отвечали на вопросы учителя, а также писали самостоятельную работу.

Конъюнкция

Конъюнкция - логическое умножение (союз и), при котором составное высказывание истинно тогда и только тогда, когда истинны все входящие в него простые высказывания.

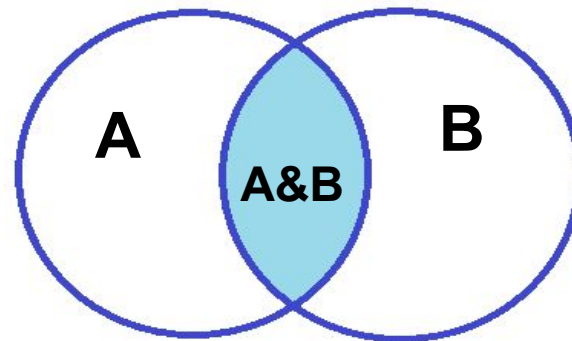
Таблица истинности

A	B	A ∧ B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Обозначение

$x \wedge y$ $x \& y$ $x \cdot y$

Графическое представление



Дизъюнкция

Дизъюнкция - логическое сложение (союз или), при котором составное высказывание ложно тогда, когда ложны все входящие в него простые высказывания.

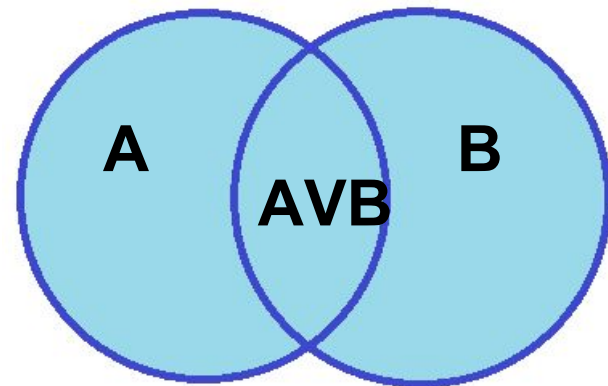
Таблица истинности

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Обозначение

$$x \vee y \quad x + y \quad x | y$$

Графическое представление



Отрицание

Инверсия - (отрицание) делает истинное высказывание ложным, а ложное истинным.

Таблица истинности

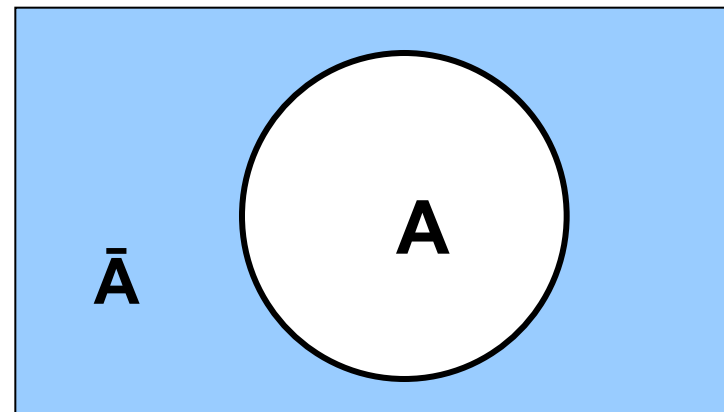
A	\bar{A}
0	1
1	0

Обозначение

\bar{x}

$\neg x$

Графическое представление



Импликация

Импликация - (логическое следование - если..., то...). Ложно тогда и только тогда, когда из истинного высказывания следует ложное.

Таблица истинности

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Задание

Даны два простых высказывания:

$$A = \{2 \cdot 2 = 4\},$$

$$B = \{2 \cdot 2 = 5\}.$$

Какие из высказываний истинны:

- а) A ; б) B ; в) $A \wedge B$; г) $A \vee B$;
д) $\neg A$; ж) $A \wedge \neg B$?

Задания

A = «Сейчас нет дождя»

B = «Форточка закрыта»

Составить сложные высказывания

$$A \wedge B$$

$$A \vee B$$

$$\bar{A} \vee B$$

$$A \wedge \bar{B}$$

$$\overline{\bar{A} \vee B}$$

Пусть A = «Ане нравятся уроки математики», а B = «Ане нравятся уроки химии». Выразите следующие формулы на обычном языке:

1) $A \& B$;

2) $\bar{A} \& B$;

3) $A \& \bar{B}$;

4) $A \vee B$;

5) $A \vee \bar{B}$;

6) $\bar{A} \vee \bar{B}$;

7) $\overline{(A \& B)}$;

8) $\overline{(A \vee B)}$;

9) $(A \& \bar{B})$.

Построение таблиц истинности

- ✓ подсчитать **n** - число переменных в выражении
- ✓ подсчитать общее число логических операций в выражении
- ✓ установить последовательность выполнения логических операций
- ✓ определить число столбцов в таблице
- ✓ заполнить шапку таблицы, включив в неё переменные и операции
- ✓ определить число строк в таблице без шапки: **$m = 2^n$**
- ✓ выписать наборы входных переменных
- ✓ провести заполнение таблицы по столбцам, выполняя логические операции в соответствии с установленной последовательностью

Решение задач

Составить таблицу истинности для формулы

$$F(A, B) = A \vee B \wedge \bar{A}$$

A	B	\bar{A}	$B \wedge \bar{A}$	F
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

Решение задач

Составить таблицу истинности для формулы

$$F(A, B) = (A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee B)$$

A	B	$A \vee B$	\bar{A}	$\bar{A} \vee B$	F
0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	1	0	1	1

Решение задач

Составить таблицу истинности для формулы

$$F(A, B) = ((A \vee \bar{B}) \rightarrow B) \wedge (\bar{A} \vee B)$$

		x			y		
A	B	\bar{B}	$A \vee \bar{B}$	$(A \vee \bar{B}) \rightarrow B$	\bar{A}	$\bar{A} \vee B$	$x \wedge y$
0	0						
0	1						
1	0						
1	1						

Задание

Составить таблицу истинности

$$F(A, B) = ((A \vee \overline{B}) \rightarrow B) \wedge (\overline{A} \vee B)$$

		x		y			
a	b	\overline{B}	$A \vee \overline{B}$	$(A \vee \overline{B}) \rightarrow B$	\overline{A}	$\overline{A} \vee B$	$x \wedge y$
0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1

$$F(A,B,C) = \overline{A} \wedge (A \vee B \wedge C)$$

A	B	C				
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

$$F(A,B,C) = \overline{A} \wedge \overline{(A \vee B \wedge C)}$$

A	B	C	A	$A \vee B$	$\overline{A \vee B}$	$\overline{(A \vee B \wedge C)}$	$\overline{A} \wedge \overline{(A \vee B \wedge C)}$
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

$$F(A,B,C)=(\overline{A \wedge B}) \vee (\overline{A \wedge \overline{C}}) \vee (B \wedge C)$$

A	B	C							
0	0	0							
0	0	1							
0	1	0							
0	1	1							
1	0	0							
1	0	1							
1	1	0							
1	1	1							

$$F(A,B,C) = (\overline{A \wedge B}) \vee (\overline{A \wedge C}) \vee (\overline{B \wedge C})$$

A	B	C	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$	\overline{C}	$A \wedge C$	$\overline{A \wedge C}$	$B \wedge C$	F
0	0	0	0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	0	1	0	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	1	0	1	1

Задание

Символом F обозначено одно из указанных ниже логических выражений от трех аргументов: X, Y, Z. Дан фрагмент таблицы истинности выражения F:

Какое выражение соответствует F?

1) $\neg X \wedge \neg Y \wedge Z$

2) $\neg X \vee \neg Y \vee Z$

3) $X \vee Y \vee \neg Z$

4) $X \vee Y \vee Z$

X	Y	Z	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1

X	Y	Z	$\neg X \wedge \neg Y \wedge Z$	$\neg X \vee \neg Y \vee Z$	$X \vee Y \vee \neg Z$	$X \vee Y \vee Z$
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				

Задание 3

Дан фрагмент таблицы истинности выражения F (см. таблицу справа). Какое выражение соответствует F ?

- 1) $X \wedge Y \vee Z$
- 2) $\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z$
- 3) $(X \vee Y) \wedge \neg Z$
- 4) $(X \vee Y) \rightarrow Z$

X	Y	Z	F
0	0	0	1
1	1	0	0
0	1	1	1

X	Y	Z	$X \wedge Y \vee Z$	$\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z$	$(X \vee Y) \wedge \neg Z$	$(X \vee Y) \rightarrow Z$
0	0	0				
1	1	0				
0	1	1				

Задание

Символом F обозначена логическая функция от двух аргументов (A и B), заданная таблицей истинности. Какое выражение соответствует F ?

1) $A \wedge B$

2) $\neg A \rightarrow B$

3) $A \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$

4) $\neg A \wedge \neg B$

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Задание

Для какого имени истинно высказывание:

$\neg(\text{Первая буква имени гласная} \rightarrow \text{Четвертая буква имени согласная})$

1) ЕЛЕНА 2) ВАДИМ 3) АНТОН 4) ФЕДОР

A - Первая буква имени гласная

B - Четвертая буква имени согласная

$$\overline{A \rightarrow B}$$

$$\bar{0} = 1$$

$$1 \rightarrow 0 = 0$$

	A	B	$A \rightarrow B$	$\overline{A \rightarrow B}$
Елена	1	1	1	0
Вадим	0	0	1	0
Антон	1	0	0	1
Федор	0	0	1	0

Задание

Для какого имени ложно высказывание:

(Первая буква гласная \wedge Последняя буква согласная)

$\rightarrow \neg$ (Третья буква согласная)?

1) ДМИТРИЙ

2) АНТОН

3) ЕКАТЕРИНА

4) АНАТОЛИЙ

$$(A \wedge B) \rightarrow \bar{C}$$

	A	B	C			
Дмитрий						
Антон						
Екатерина						
Анатолий						

Задание

Для какого из указанных значений X истинно высказывание

$$\neg ((X > 2) \rightarrow (X > 3)) ?$$

- 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

x	$x > 2$	$x > 3$	$(x > 2) \rightarrow (x > 3)$	$\neg ((x > 2) \rightarrow (x > 3))$
1				
2				
3				
4				

Для какого из указанных значений X истинно высказывание

$$\neg ((X > 2) \rightarrow (X > 3)) ?$$

- 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

X	$X > 2$	$X > 3$	$(X > 2) \rightarrow (X > 3)$	$\neg ((X > 2) \rightarrow (X > 3))$
1	0	0	1	0
2	0	0	1	0
3	1	0	0	1
4	1	1	1	0

Задание 4

Для какого числа X истинно высказывание

$$X > 1 \wedge ((X < 5) \rightarrow (X < 3))$$

1) 1

2) 2

3) 3

4) 4

①

②

X	$X > 1$	$X < 5$	$X < 3$	$(X < 5) \rightarrow (X < 3)$	① \wedge ②
1					
2					
3					
4					

Для какого числа X истинно высказывание
 $X > 1 \wedge ((X < 5) \rightarrow (X < 3))$

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

x	$x > 1$	$x < 5$	$x < 3$	$(x < 5) \rightarrow (x < 3)$	$x > 1 \wedge ((x < 5) \rightarrow (x < 3))$
1	0	1	1	1	0
2	1	1	1	1	1
3	1	1	0	0	0
4	1	1	0	0	0

Домашнее задание

1. Для какого символьного выражения верно высказывание:

\neg (Первая буква согласная) \wedge \neg (Вторая буква гласная)?

1) abcde 2) bcade 3) uabas 4) cabab

2. Дан фрагмент таблицы истинности выражения F (см. таблицу справа). Какое выражение соответствует F?

A	B	C	F
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1

1) $(A \rightarrow \neg B) \vee C$

2) $(\neg A \vee B) \wedge C$

3) $(A \wedge B) \rightarrow C$

4) $(A \vee B) \rightarrow C$

1. Для какого числа X истинно высказывание

$$(X > 2) \vee (X > 5) \rightarrow (X < 3)$$

1) 5 2) 2 3) 3 4) 4

2. Для какого из значений числа Z высказывание

$$((Z > 2) \vee (Z > 4)) \rightarrow (Z > 3)$$
 будет ложным?

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

3. Для какого из значений числа Y высказывание

$$(Y < 5) \wedge ((Y > 1) \rightarrow (Y > 5))$$
 будет истинным?

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

Задание

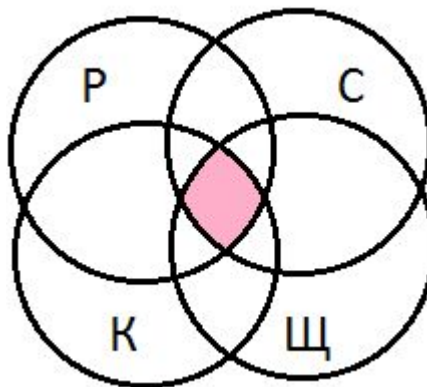
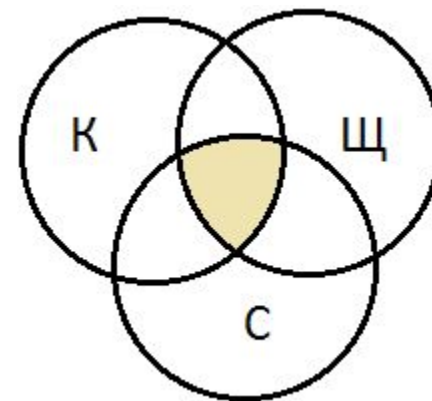
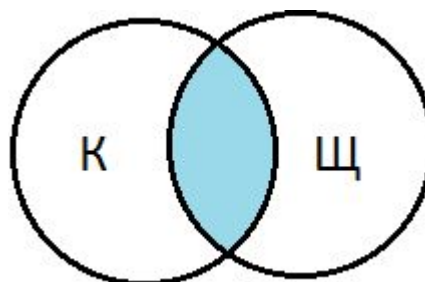
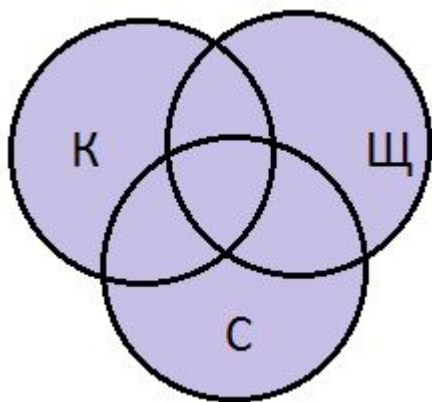
В таблице приведены запросы к поисковому серверу. Расположите обозначения запросов в порядке возрастания количества страниц, которые найдет поисковый сервер по каждому запросу.

- 1) **канарейки | щеглы | содержание**
- 2) **канарейки & содержание**
- 3) **канарейки & щеглы & содержание**
- 4) **разведение & содержание & канарейки & щеглы**

Во всех задачах для обозначения логической операции «ИЛИ» в запросе используется символ |, а для логической операции «И» – символ &.

Задание

- 1) канарейки | щеглы | содержание
- 2) канарейки & содержание
- 3) канарейки & щеглы & содержание
- 4) разведение & содержание & канарейки & щеглы



Ответ: 4321

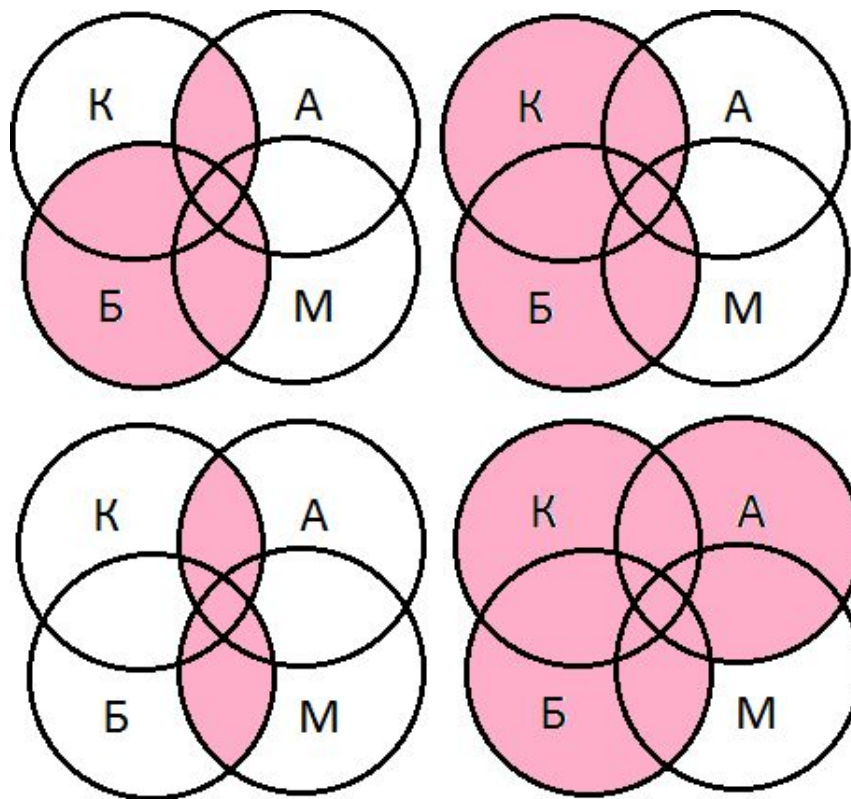
Задание

В таблице приведены запросы к поисковому серверу. Расположите номера запросов в порядке **убывания** количества страниц, которые найдет поисковый сервер по каждому запросу. Для обозначения логической операции «ИЛИ» в запросе используется символ |, а для логической операции «И» – &.

- 1) **барокко | (классицизм & ампир)**
- 2) **барокко | классицизм**
- 3) **(классицизм & ампир) | (барокко & модерн)**
- 4) **барокко | ампир | классицизм**

Задание

- А) барокко | (классицизм & ампир)
- Б) барокко | классицизм
- В) (классицизм & ампир) | (барокко & модерн)
- Г) барокко | ампир | классицизм



Ответ: ГБАВ

Задание

В таблице приведены запросы к поисковому серверу, условно обозначенные буквами от А до Г. Расположите запросы в порядке возрастания количества страниц, которые найдет поисковый сервер по каждому запросу. Ответ запишите в виде последовательности соответствующих букв.

- А) сомики | меченосцы | содержание**
- Б) сомики & содержание**
- В) сомики & меченосцы & разведение & содержание**
- Г) (сомики | меченосцы) & содержание**