

Тема 7

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ И НА ОТРЕЗКЕ

Непрерывность функции в точке

Определение 1:

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке x_0** , если она определена в этой точке и её предел в ней равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Запись через односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

Непрерывность функции в точке

Определение 2:

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке x_0** , если она определена в некоторой её окрестности и

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x: |x - x_0| < \delta: \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Непрерывность функции в точке

Обозначения:

$\Delta x = x - x_0$ – приращение аргумента

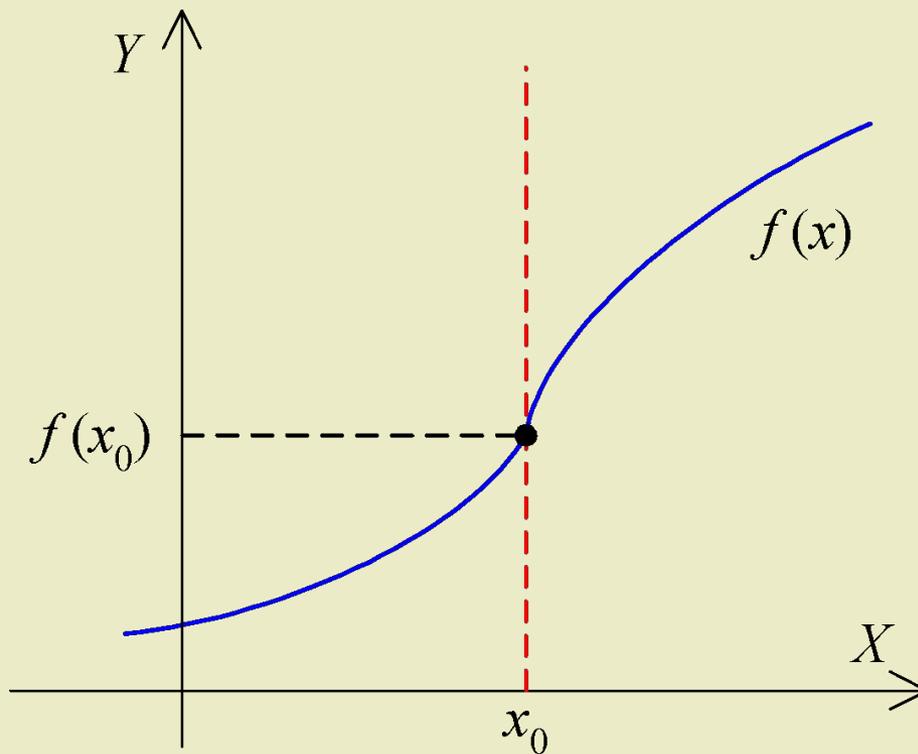
$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ – приращение функции

Определение 3:

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке x_0** , если её приращение в этой точке есть бесконечно малая функция при $\Delta x \rightarrow 0$.

Непрерывность функции в точке

Графическая интерпретация:



Свойства функций, непрерывных в точке

1. Функция, непрерывная в точке x_0 , ограничена в некоторой окрестности этой точки.
2. Если функция непрерывная в точке x_0 , то существует некоторая окрестность $U(x_0)$, в которой функция имеет такой же знак, как и $f(x_0)$.
3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0 , то функции:

$$f(x) + g(x)$$

$$f(x) \cdot g(x)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

тоже непрерывны в точке x_0

Свойства функций, непрерывных в точке

4. Непрерывность сложной функции

Пусть функция $g(x)$ непрерывна в точке x_0 , а функция $f(y)$ непрерывна в точке $y_0 = g(x_0)$. Тогда сложная функция $f(g(x))$ является непрерывной в точке x_0 .

Доказательство:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \sigma > 0, \quad \forall y: |y - y_0| < \sigma, \quad |f(y) - f(y_0)| < \varepsilon$$

$$\exists \delta > 0, \quad \forall x: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \sigma$$

Следовательно,

$$\exists \delta > 0, \quad \forall x: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(g(x)) - f(g(x_0))| < \varepsilon$$

Свойства функций, непрерывных в точке

4. Непрерывность сложной функции: Следствие

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right) = f(g(x_0))$$

Таким образом, знак предела и знак непрерывной функции можно менять местами.

Метод замены переменной для пределов непрерывных функций:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(y), \quad y = g(x).$$

Непрерывность функции в точке

Пример 3:

Установить непрерывность или разрывность функции

$$f(x) = \begin{cases} x + 4, & x \leq -1; \\ x^2 + 2, & -1 < x \leq 1; \\ 2x, & x > 1. \end{cases}$$

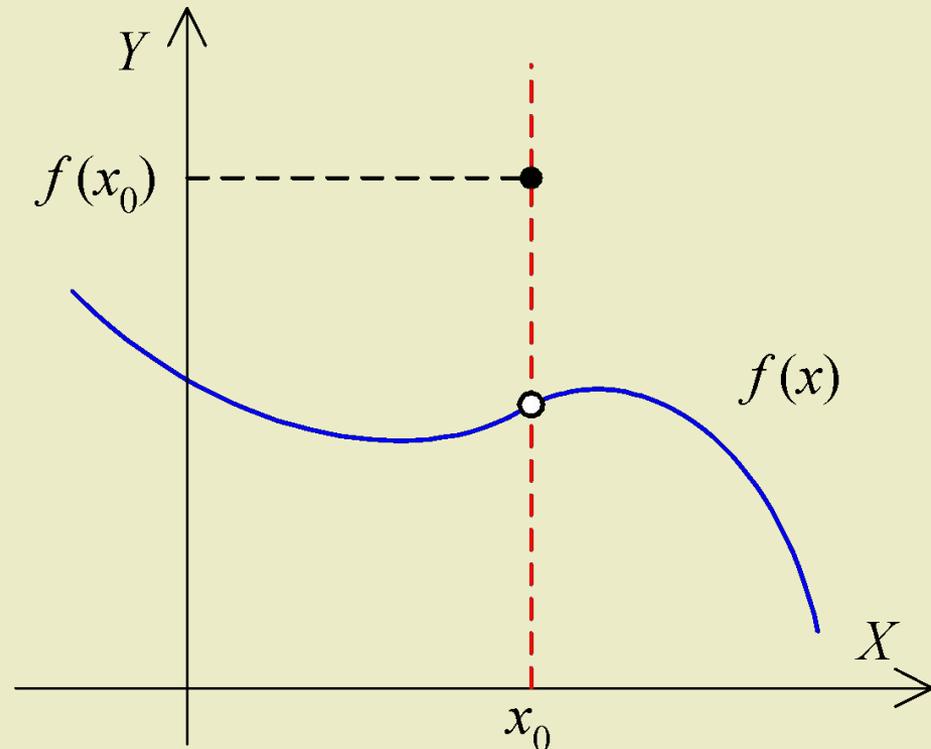
Решение:

Ответ:

Классификация точек разрыва

1. Устранимый разрыв

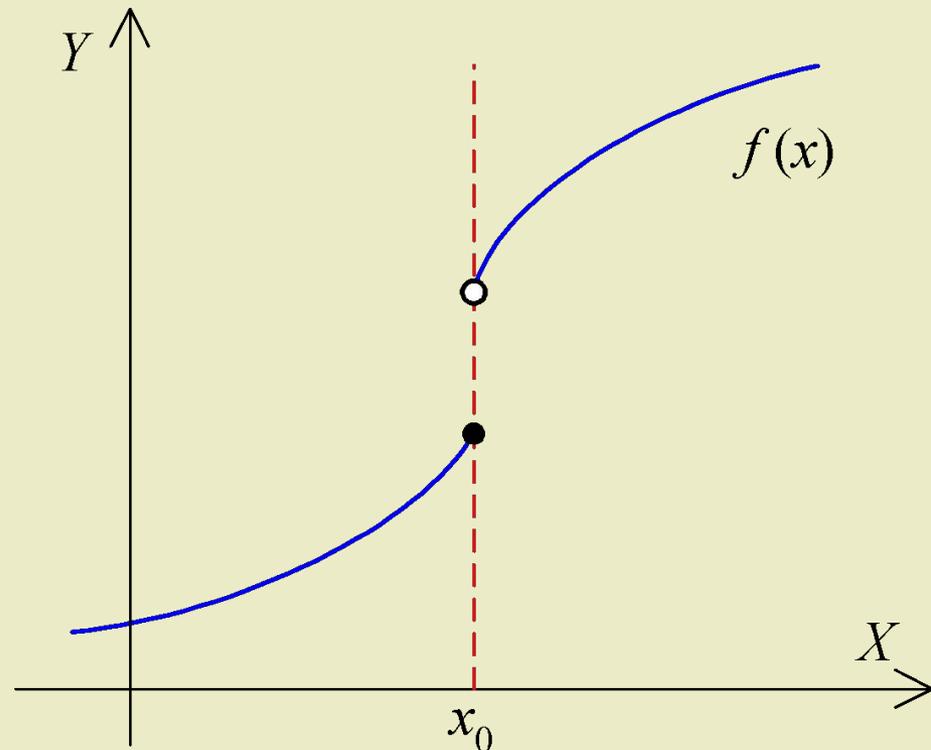
$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$$



Классификация точек разрыва

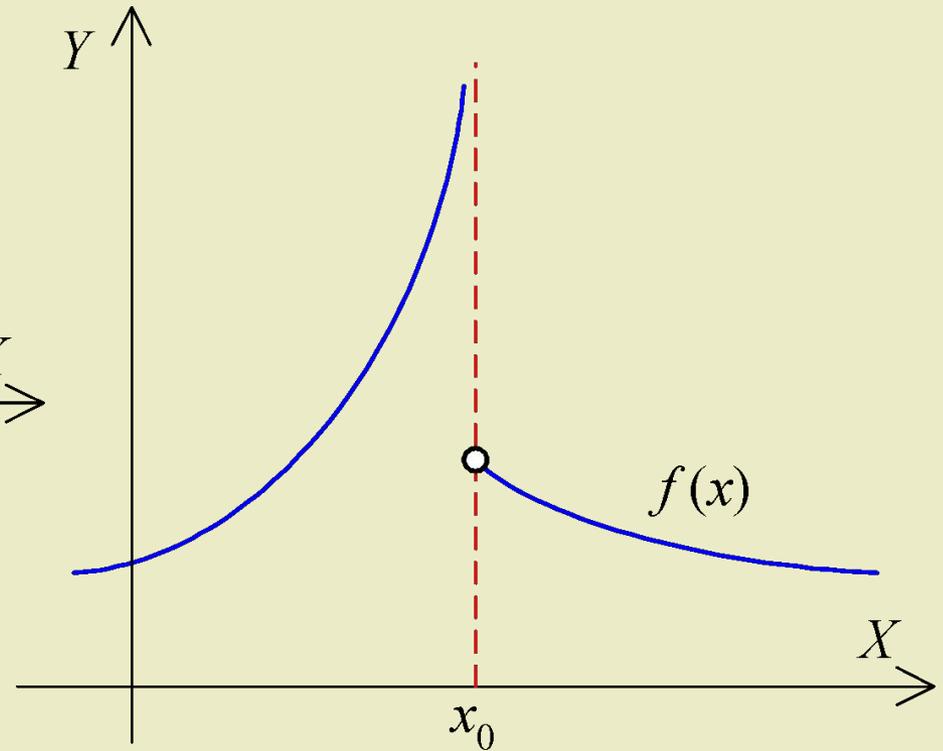
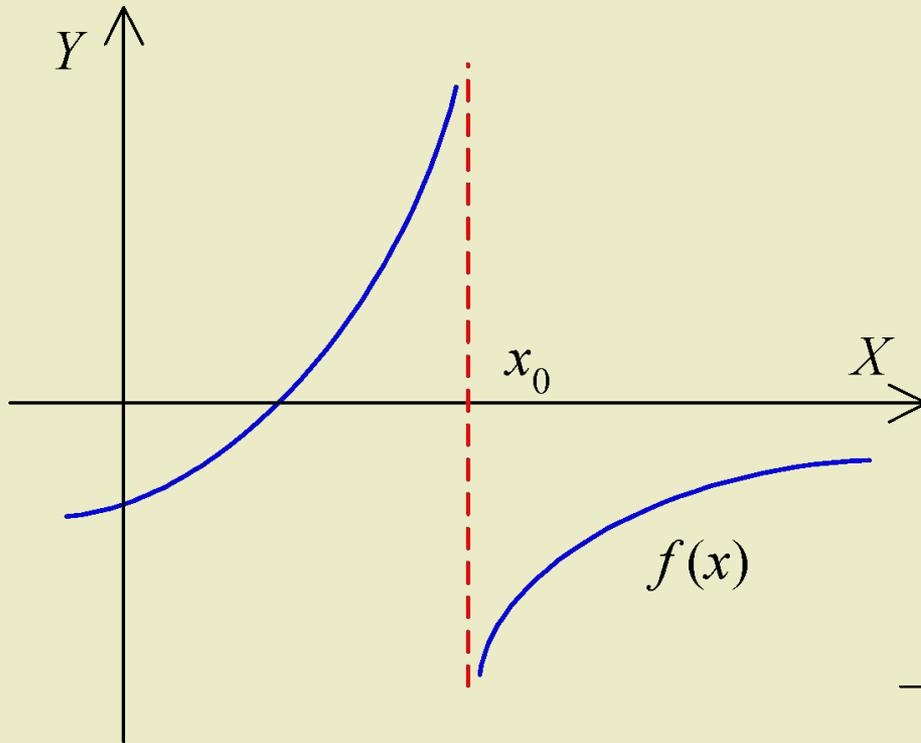
2. Разрыв 1-го рода

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \text{const}$$



Классификация точек разрыва

3. Разрыв 2-го рода



Непрерывность функции в точке

Пример 4:

Найти точки разрыва функции и установить их характер

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + x^3}$$

Решение:

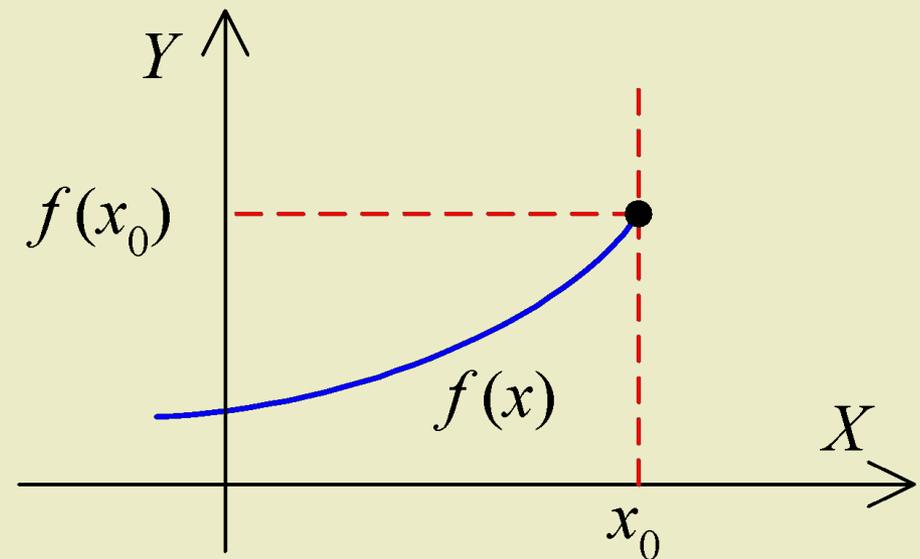
Ответ:

Односторонняя непрерывность функции в точке

Непрерывность слева:

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке x_0 слева**, если она определена в точке x_0 и её предел слева в этой точке равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$$

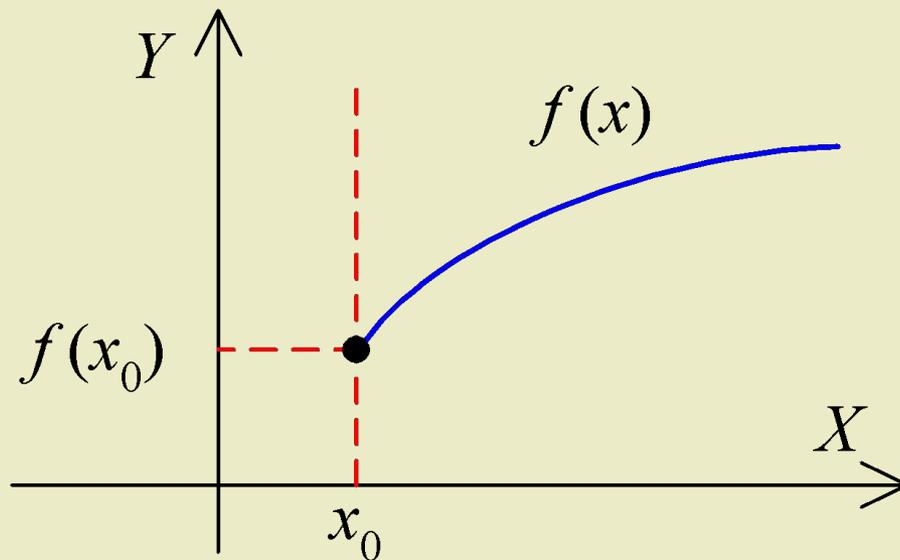


Односторонняя непрерывность функции в точке

Непрерывность справа:

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке x_0 справа**, если она определена в точке x_0 и её предел справа в этой точке равен значению функции в этой точке:

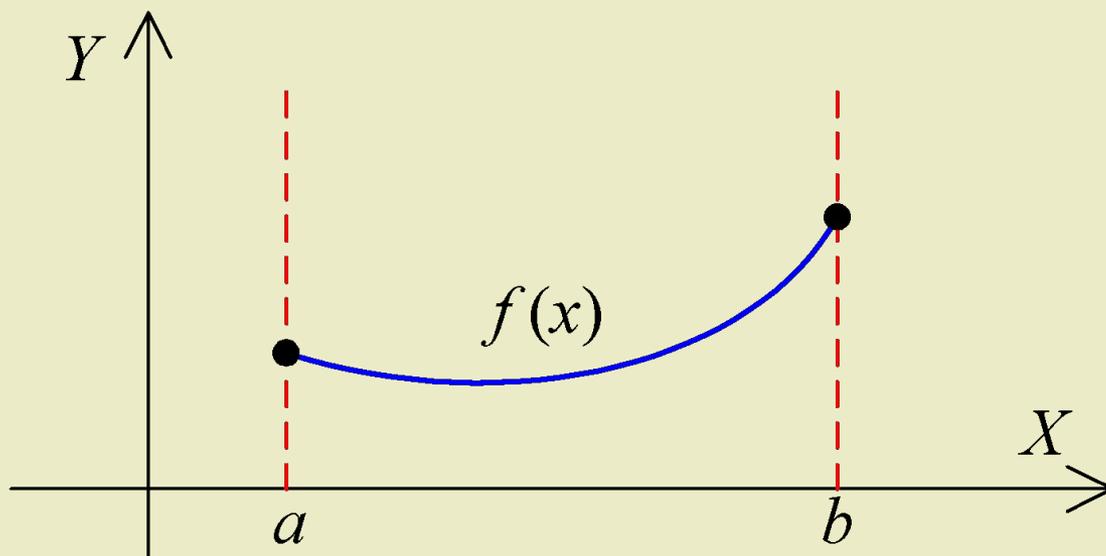
$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$



Непрерывность функции на отрезке

Определение:

Функция $f(x)$ называется **непрерывной на отрезке $[a, b]$** , если она непрерывна в каждой точке этого отрезка, причём функция непрерывна в точке a справа, а в точке b – слева.



Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема 1 (*Вейерштрасса*):

Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, ограничена на нём.

Теорема 2 (*Вейерштрасса*):

Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, достигает на этом отрезке своих точной верхней и точной нижней граней.

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема (*Коши о прохождении функции через ноль*):

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах его принимает значения $A = f(a)$ и $B = f(b)$ разных знаков, то внутри отрезка $[a, b]$ найдётся по крайней мере одна точка $x = c$, для которой $f(c) = 0$.

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема (*Коши о промежуточном значении*):

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a) = A$, $f(b) = B$, то для любого числа C , удовлетворяющего неравенству $A < C < B$, на интервале (a, b) найдётся такая точка $x = c$, для которой $f(c) = C$.

Непрерывность обратной функции

Определение 1:

Функция $f(x)$ называется **строго возрастающей** на отрезке $[a, b]$, если для любых двух чисел x_1 и x_2 , принадлежащих интервалу $[a, b]$, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Определение 2:

Функция $f(x)$ называется **строго убывающей** на отрезке $[a, b]$, если для любых двух чисел x_1 и x_2 , принадлежащих интервалу $[a, b]$, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Непрерывность обратной функции

Теорема 1:

Если функция $f(x)$ строго монотонна и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и интервал $[A, B]$ – множество её значений, то существует обратная функция f^{-1} , являющаяся строго монотонной.

Теорема 2:

Если функция $f(x)$ строго монотонна и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то обратная функция f^{-1} непрерывна на отрезке $[A, B]$, где $[A, B]$ – множество значений функции $f(x)$.

math.mmts-it.org