

Конечные автоматы и формальные языки

Матросов А. В.

Оглавление

<u>Лекция 2</u>	
<u>Лекция 3</u>	
<u>Лекция 4</u>	

Лекция 2.

ДКА: Таблица переходов

- Таблица переходов представляет собой табличное представление функции перехода $\delta(q, a)$ (в левом столбце - состояния, в первой строке – символы алфавита)

	0	1
$\rightarrow q_0$	q_2	q_0
$*q_1$	q_1	q_1
q_2	q_2	q_1

ДКА: Расширенная функция переходов

- Расширенная функция переходов $\hat{\delta}(q, w)$ в соответствие состоянию q и цепочке w состояние p , в которое попадет автомат из состояния q , обработав цепочку w .

- Базис: $\hat{\delta}(q, \epsilon) = q$

Индукция: пусть $w=xa$, тогда

$$\hat{\delta}(q, w) = \delta(\hat{\delta}(q, x), a)$$

если

$$\hat{\delta}(q, x) = p$$

$$\hat{\delta}(q, w) = \delta(p, a)$$

Пример

$L = \{w \mid w \text{ содержит четное число } 0 \text{ и четное число } 1\}$

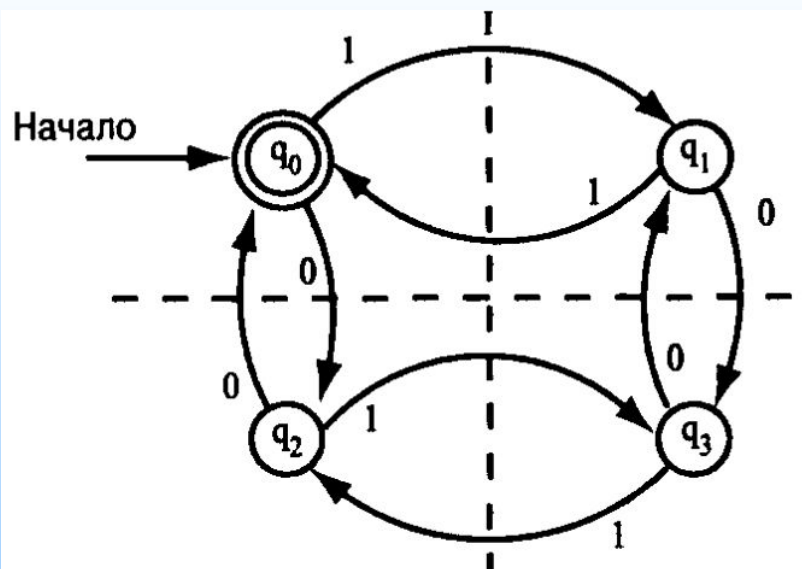
q_0 : Прочитано четное число 0 и четное число 1.

q_1 : Прочитано четное число 0 и нечетное число 1.

q_2 : Прочитано четное число 1 и нечетное число 0.

q_3 : Прочитано нечетное число 0 и нечетное число 1.

$A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_0\})$



	0	1
* → q_0	q_2	q_1
q_1	q_3	q_0
q_2	q_0	q_3
q_3	q_1	q_2

Пример (продолжение)

$w=110101$

$$\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = q_0.$$

$$\hat{\delta}(q_0, 1) = \delta(\hat{\delta}(q_0, \varepsilon), 1) = \delta(q_0, 1) = q_1.$$

$$\hat{\delta}(q_0, 11) = \delta(\hat{\delta}(q_0, 1), 1) = \delta(q_1, 1) = q_0.$$

$$\hat{\delta}(q_0, 110) = \delta(\hat{\delta}(q_0, 11), 0) = \delta(q_0, 0) = q_2.$$

$$\hat{\delta}(q_0, 1101) = \delta(\hat{\delta}(q_0, 110), 1) = \delta(q_2, 1) = q_3.$$

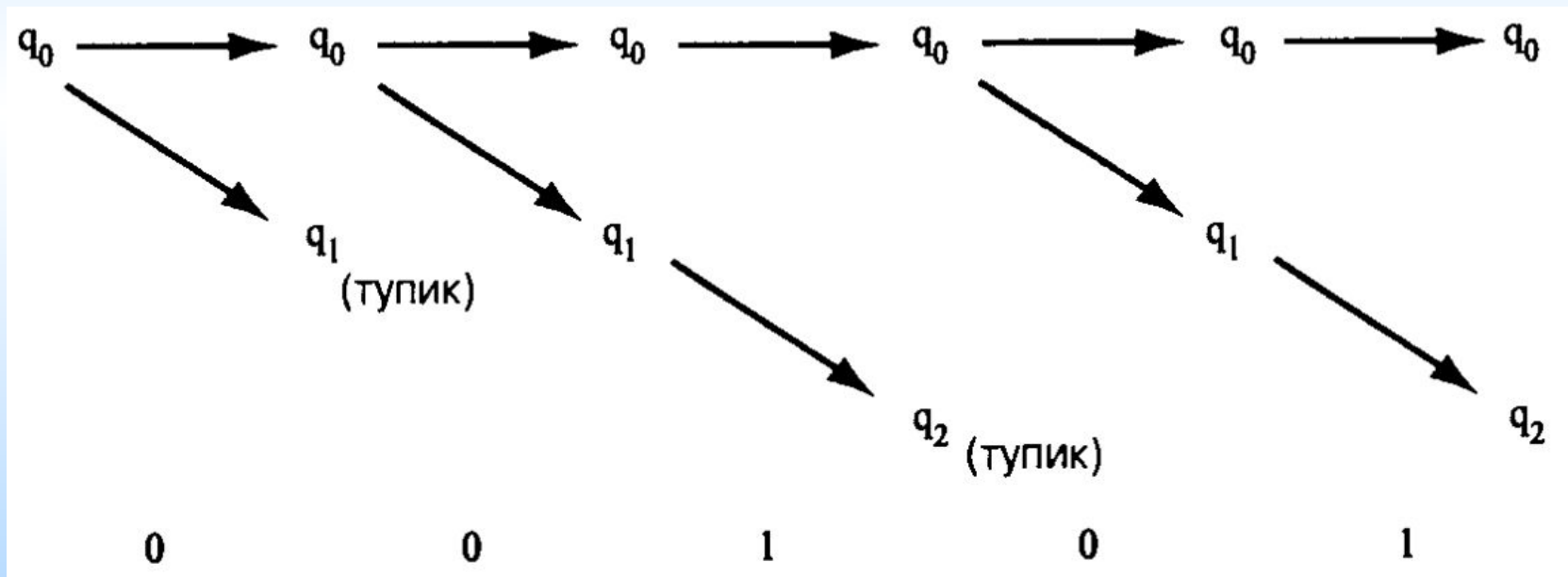
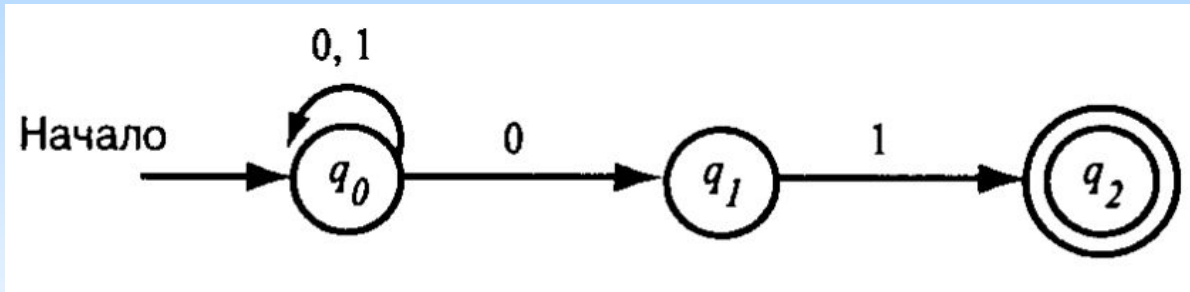
$$\hat{\delta}(q_0, 11010) = \delta(\hat{\delta}(q_0, 1101), 0) = \delta(q_3, 0) = q_1.$$

$$\hat{\delta}(q_0, 110101) = \delta(\hat{\delta}(q_0, 11010), 1) = \delta(q_1, 1) = q_0.$$

Язык ДКА (регулярный язык)

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \quad L(A) = \{ w \mid \hat{\delta}(q_0, w) \text{ принадлежит } F \}$$

Неформальное описание НКА



Формальное определение НКА

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F).$$

Эти обозначения имеют следующий смысл.

1. Q есть конечное множество *состояний*.
2. Σ есть конечное множество *входных символов*.
3. q_0 , один из элементов Q , — *начальное состояние*.
4. F , подмножество Q , — множество *заключительных* (или *допускающих*) состояний.
5. δ , *функция переходов*, — это функция, аргументами которой являются состояние из Q и входной символ из Σ , а значением — некоторое подмножество множества Q . Заметим, что единственное различие между НКА и ДКА состоит в типе значений функции δ . Для НКА — это множество состояний, а для ДКА — одиночное состояние.

$$(\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2\}).$$

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_2, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*q_2$	$\emptyset$	$\emptyset$

НКА: Расширенная функция переходов

- Расширенная функция переходов став $\hat{\delta}(q, w)$ ответственю состоянию q и цепочке w множество состояний p , в которое попадет автомат из состояния q , обработав цепочку w .

- Базис:

Индукци $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = \{q\}$ а, тогда

$$\hat{\delta}(q, w) = \delta(\hat{\delta}(q, x), a)$$

если

и

то

$$\hat{\delta}(q, x) = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$$

$$\bigcup_{i=1}^k \delta(p_i, a) = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$$

$$\hat{\delta}(q, w) = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$$

Пример

$w=00101$

$$\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = \{q_0\}.$$

$$\hat{\delta}(q_0, 0) = \delta(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}.$$

$$\hat{\delta}(q_0, 00) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_1, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}.$$

$$\hat{\delta}(q_0, 001) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}.$$

$$\hat{\delta}(q_0, 0010) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_2, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}.$$

$$\hat{\delta}(q_0, 00101) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}.$$

Язык НКА

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

$$L(A) = \{w \mid \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

Конструкция подмножеств

ДКА обладают всеми возможностями НКА

$$N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N) \rightarrow D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D) \quad L(D) = L(N)$$

- Q_D есть множество всех подмножеств Q_N , или *булеан* множества Q_N . Отметим, что если Q_N содержит n состояний, то Q_D будет содержать уже 2^n состояний. Однако часто не все они достижимы из начального состояния автомата D . Такие недостижимые состояния можно “отбросить”, поэтому фактически число состояний D может быть гораздо меньше, чем 2^n .
- F_D есть множество подмножеств S множества Q_N , для которых $S \cap F_N \neq \emptyset$, т.е. F_D состоит из всех множеств состояний N , содержащих хотя бы одно допускающее состояние N .
- Для каждого множества $S \subseteq Q_N$ и каждого входного символа a из Σ
$$\delta_D(S, a) = \bigcup_{p \in S} \delta_N(p, a).$$

Конструкция подмножеств (пример)

$$Q_N = \{q_0, q_1, q_2\} \quad |Q_D| = 2^3 = 8$$

	0	1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$^*\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$^*\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$^*\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$^*\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$

	0	1
A	A	A
$\rightarrow B$	E	B
C	A	D
*D	A	A
E	E	F
*F	E	B
*G	A	D
*H	E	F

«Ленивый» алгоритм

Базис. Мы точно знаем, что одноэлементное множество, состоящее из начального состояния N , является достижимым.

Индукция. Предположим, мы установили, что множество состояний S является достижимым. Тогда для каждого входного символа a нужно найти множество состояний $\delta_D(S, a)$. Найденные таким образом множества состояний также будут достижимы.

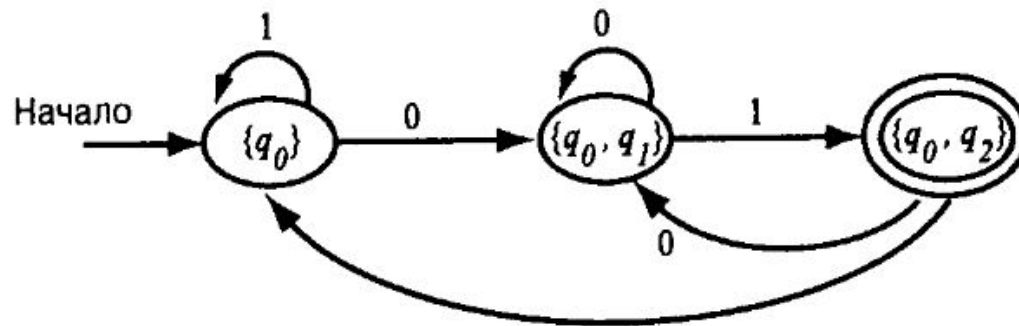
1. $\delta_D(\{q_0\}, 0) = \{q_0, q_1\}$ и $\delta_D(\{q_0\}, 1) = \{q_0\}$ Строка 2 таблицы

2. $\delta_D(\{q_0, q_1\}, 0) = \{q_0, q_1\}$ и $\delta_D(\{q_0, q_1\}, 1) = \{q_0, q_2\}$ Строка 5 таблицы

$$\delta_D(\{q_0, q_1\}, 1) = \delta_N(q_0, 1) \cup \delta_N(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$$

3. $\delta_D(\{q_0, q_2\}, 0) = \delta_N(q_0, 0) \cup \delta_N(q_2, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\},$

$$\delta_D(\{q_0, q_2\}, 1) = \delta_N(q_0, 1) \cup \delta_N(q_2, 1) = \{q_0\} \cup \emptyset = \{q_0\}.$$



Строка 6 таблицы

Конструкция подмножеств

Теорема 2.11. Если ДКА $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_0, F_D)$ построен по НКА $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ посредством конструкции подмножеств, то $L(D) = L(N)$.

Доказательство. Вначале с помощью индукции по $|w|$ покажем, что

$$\hat{\delta}_D(\{q_0\}, w) = \hat{\delta}_N(q_0, w).$$

Базис: $|w|=0 \rightarrow w=\varepsilon \rightarrow$ (по базису определения) $\hat{\delta}_D(\{q_0\}, \varepsilon) = \hat{\delta}_N(q_0, \varepsilon) = \{q_0\}$

Индукция: $|w| = n+1$, $w = xa$ и $\hat{\delta}_D(\{q_0\}, x) = \hat{\delta}_N(q_0, x) = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$

По индуктивной части определения для НКА

$$\hat{\delta}_N(q_0, w) = \bigcup_{i=1}^k \delta_N(p_i, a). \quad (2.2)$$

С другой стороны, конструкция подмножеств дает

$$\delta_D(\{p_1, p_2, \dots, p_k\}, a) = \bigcup_{i=1}^k \delta_N(p_i, a). \quad (2.3)$$

$$\hat{\delta}_D(\{q_0\}, w) = \delta_D(\hat{\delta}_D(q_0, x), a) = \delta_D(\{p_1, p_2, \dots, p_k\}, a) = \bigcup_{i=1}^k \delta_N(p_i, a). \quad (2.4)$$

из уравнений (2.2) и (2.4) видно, что $\hat{\delta}_D(\{q_0\}, w) = \hat{\delta}_N(q_0, w)$

$$1 \quad L(D) = L(N)$$

Теорема

Теорема 2.12. Язык L допустим некоторым ДКА тогда и только тогда, когда он допускается некоторым НКА.

Доказательство. *Достаточность* следует из конструкции подмножеств и теоремы 2.11.

(Необходимость) Доказательство этой части не представляет трудности; нам нужно лишь перейти от ДКА к идентичному НКА. Диаграмму переходов для некоторого ДКА можно рассматривать неформально как диаграмму переходов для некоторого НКА, причем последний имеет по любому входному символу лишь один переход. Точнее, пусть $D = (Q, \Sigma, \delta_D, q_0, F)$ есть некоторый ДКА. Определим $N = (Q, \Sigma, \delta_N, q_0, F)$ как эквивалентный ему НКА, где δ_N определена следующим правилом.

- Если $\delta_D(q, a) = p$, то $\delta_N(q, a) = \{p\}$.

Индукцией по $|w|$ легко показать, что, если $\hat{\delta}_D(q, w) = p$, то

$$\hat{\delta}_N(q_0, w) = \{p\}.$$

Доказательство предоставляется читателю. Как следствие, D допускает w тогда и только тогда, когда N допускает w , т.е. $L(D) = L(N)$. $\square$

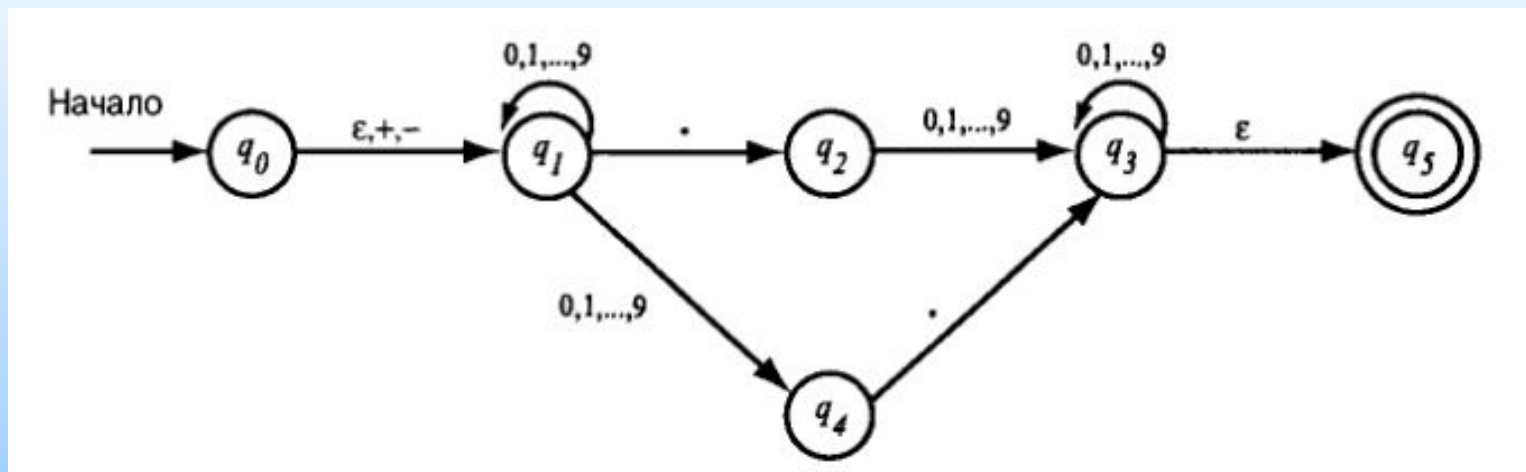
Лекция 3.

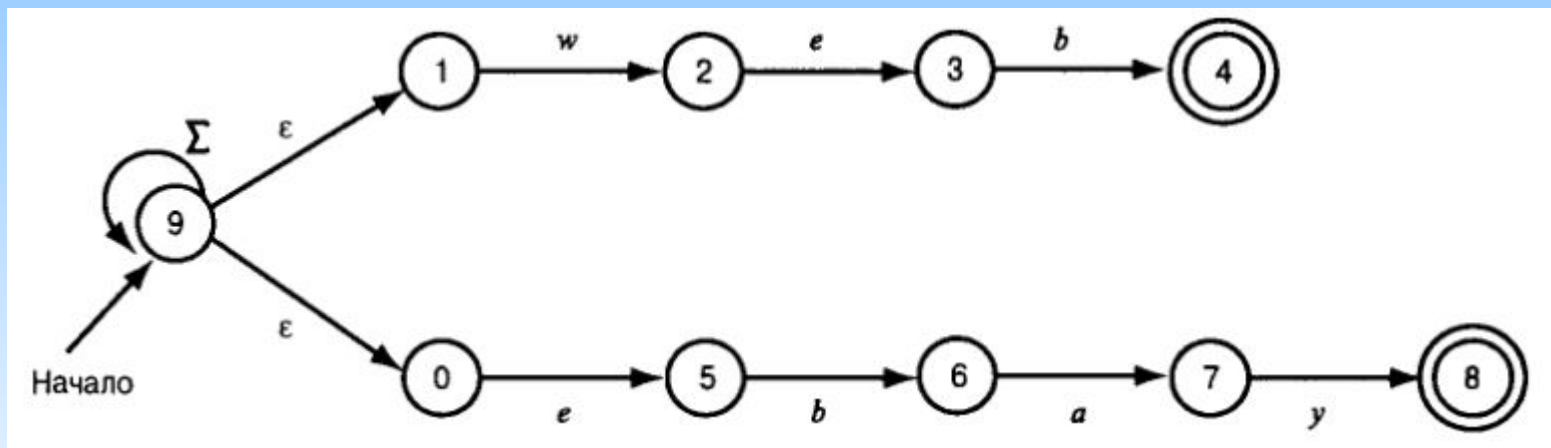
НКА с ϵ -переходами

- Добавим возможность перехода по пустой цепочке

Неформальное определение ϵ -НКА

1. Необязательный знак + или –
 2. Цепочка цифр (возможно пустая)
 3. Разделяющая десятичная точка .
 4. Цепочка цифр (возможно пустая)
- Цепочки 2 и 4 одновременно не могут быть пустыми





Формальное определение ε -НКА

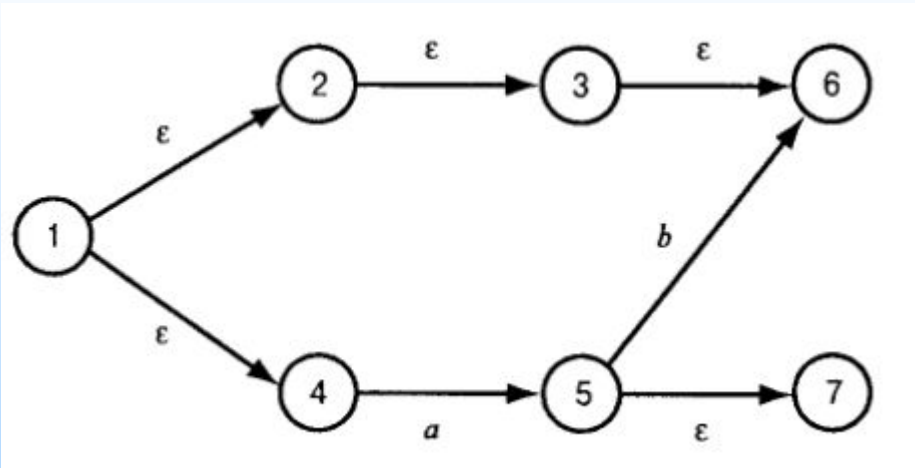
$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ δ аргументы из Q и $\Sigma \cup \{\varepsilon\}$

$E = (\{q_0, q_1, \dots, q_5\}, \{., +, -, 0, 1, \dots, 9\}, \delta, q_0, \{q_5\})$

	ε	$+, -$	$.$	$0, 1, \dots, 9$
q_0	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
q_5	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

ϵ -замыкание

- Базис: $ECLOSE(q)$ содержит q
- Индукция: если $ECLOSE(q)$ содержит состояние p и существует переход, отмеченный ϵ из p в r , то $ECLOSE(q)$ содержит r .



$ECLOSE(1) = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

$ECLOSE(2) = \{2, 3, 6\}$

$ECLOSE(5) = \{5, 7\}$

$ECLOSE(4) = \{4\}$

ϵ -НКА: Расширенная функция переходов

- Базис: $\hat{\delta}(q, \epsilon) = \text{ECLOSE}(q)$
- Индукция: пусть $w=xa$, a из Σ

1. Пусть $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ есть $\hat{\delta}(q, x)$, т.е. p_i — это все те и только те состояния, в которые можно попасть из q по пути, отмеченному x . Этот путь может оканчиваться одним или несколькими ϵ -переходами, а также содержать и другие ϵ -переходы.
2. Пусть $\bigcup_{i=1}^k \delta(p_i, a)$ есть множество $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$, т.е. нужно совершить все переходы, отмеченные символом a , из тех состояний, в которые мы можем попасть из q по пути, отмеченному x . Состояния r_i — лишь *некоторые* из тех, в которые мы можем попасть из q по пути, отмеченному w . В остальные такие состояния можно попасть из состояний r_i посредством переходов с меткой ϵ , как описано ниже в (3).
3. $\hat{\delta}(q, w) = \bigcup_{j=1}^m \text{ECLOSE}(r_j)$. На этом дополнительном шаге, где мы берем замыкание и добавляем все выходящие из q пути, отмеченные w , учитывается возможность существования дополнительных дуг, отмеченных ϵ , переход по которым может быть совершен после перехода по последнему "непустому" символу a .

Пример

Пример 2.20. Вычислим $\delta(q_0, 5.6)$ для ϵ -НКА на рис. 2.18. Для этого выполним следующие шаги.

- $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = \text{ECLOSE}(q_0) = \{q_0, q_1\}$.
- Вычисляем $\hat{\delta}(q_0, 5)$ следующим образом.
 1. Находим переходы по символу 5 из состояний q_0 и q_1 , полученных при вычислении $\hat{\delta}(q_0, \epsilon)$: $\delta(q_0, 5) \cup \delta(q_1, 5) = \{q_1, q_4\}$.
 2. Находим ϵ -замыкание элементов, вычисленных на шаге (1). Получаем: $\text{ECLOSE}(q_1) \cup \text{ECLOSE}(q_4) = \{q_1\} \cup \{q_4\} = \{q_1, q_4\}$, т.е. множество $\hat{\delta}(q_0, 5)$.

Эта двушаговая схема применяется к следующим двум символам.

- Вычисляем $\hat{\delta}(q_0, 5.)$.
 1. Сначала $\delta(q_1, .) \cup \delta(q_4, .) = \{q_2\} \cup \{q_3\} = \{q_2, q_3\}$.
 2. Затем $\hat{\delta}(q_0, 5.) = \text{ECLOSE}(q_2) \cup \text{ECLOSE}(q_3) = \{q_2\} \cup \{q_3, q_5\} = \{q_2, q_3, q_5\}$.
- Наконец, вычисляем $\hat{\delta}(q_0, 5.6)$.
 1. Сначала $\delta(q_2, 6) \cup \delta(q_3, 6) \cup \delta(q_5, 6) = \{q_3\} \cup \{q_3\} \cup \emptyset = \{q_3\}$.
 2. Затем $\hat{\delta}(q_0, 5.6) = \text{ECLOSE}(q_3) = \{q_3, q_5\}$. $L(E) = \{w \mid \hat{\delta}(q, w) \cap F \neq \emptyset\}$

Устранение ϵ -переходов

Пусть $E = (Q_E, \Sigma, \delta_E, q_E, F_E)$. эквивалентный ДКА $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$

1. Q_D есть множество ϵ -замкнутых подмножеств Q_E

$$S \subseteq Q_E, \quad S = \text{ECLOSE}(S)$$

2. $q_D = \text{ECLOSE}(q_0)$

3. $F_D = \{S \mid S \text{ принадлежит } Q_D \text{ и } S \cap F_E \neq \emptyset\}$

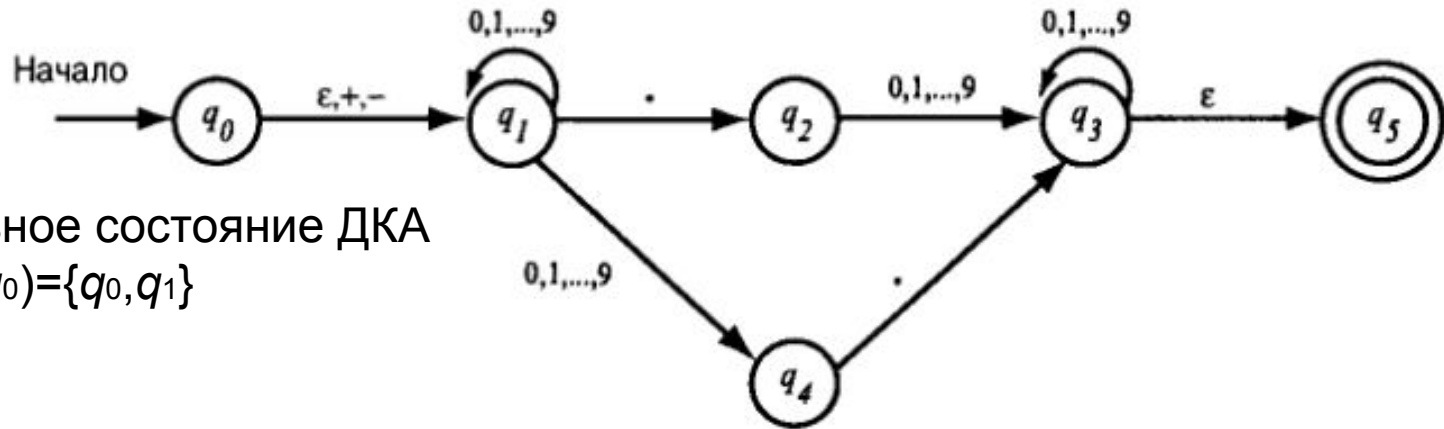
4. $\delta_D(S, a)$

а) пусть $S = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$;

б) вычислим $\bigcup_{i=1}^k \delta(p_i, a)$; пусть это будет множество $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$;

в) тогда $\delta_D(S, a) = \bigcup_{j=1}^m \text{ECLOSE}(r_j)$.

Пример

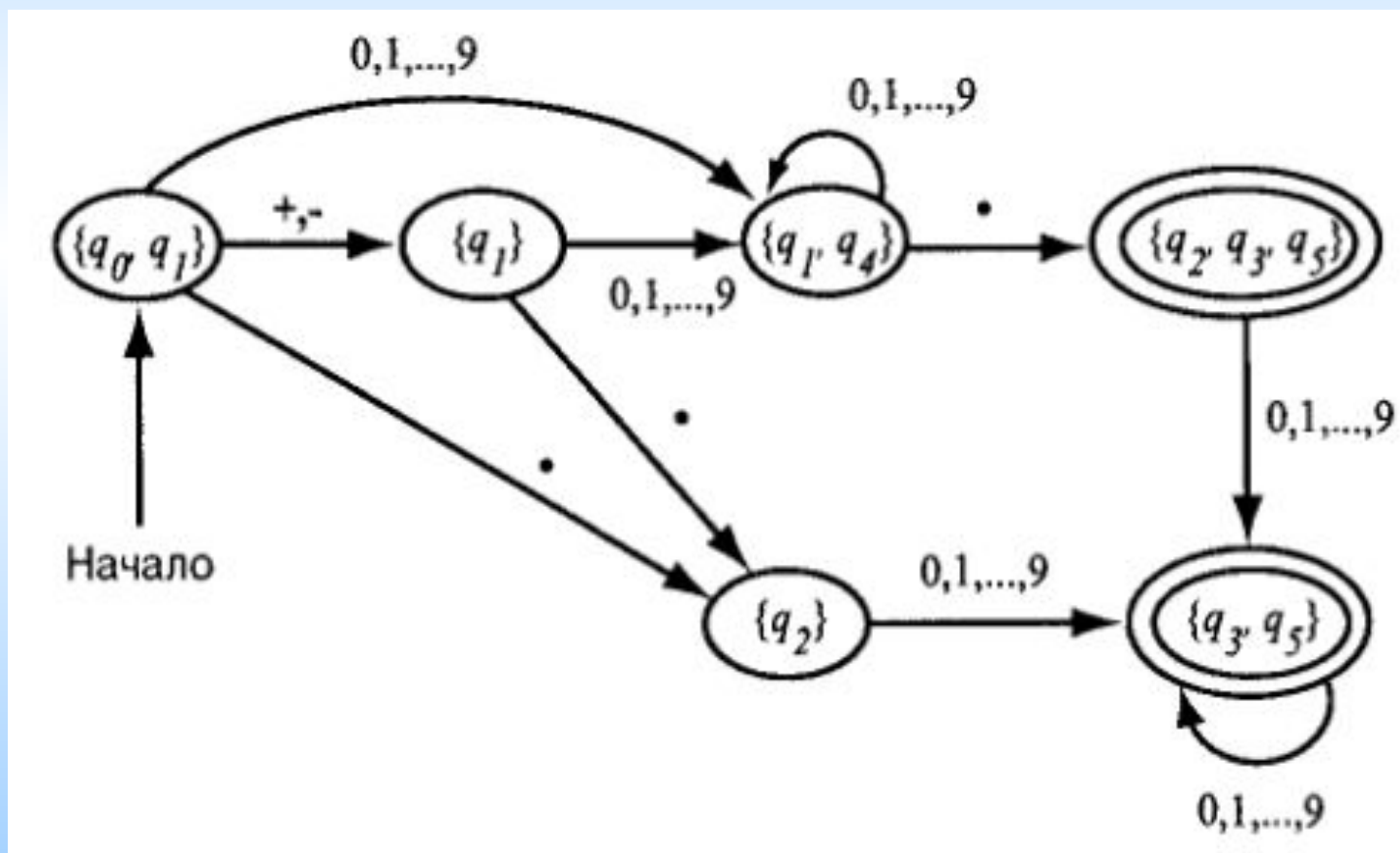


- Начальное состояние ДКА
 $ECLOSE(q_0) = \{q_0, q_1\}$

	+	-	.	0-9
$\rightarrow \{q_0, q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$
$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3, q_5\}$
$\{q_1, q_4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2, q_3, q_5\}$	$\{q_1, q_4\}$
$\ast \{q_3, q_5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3, q_5\}$
$\ast \{q_2, q_3, q_5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3, q_5\}$

Пример

Еще есть «дьявольское состояние» $\emptyset$ - переход в него по символам, отсутствующим на рисунке. У состояния $\emptyset$ переход по любому символу в себя.



Теорема

Теорема 2.22. Язык L допускается некоторым ε -НКА тогда и только тогда, когда L допускается некоторым ДКА.

Необходимость. Пусть существует ДКА D с языком $L=L(D)$. Преобразуем D в ε -НКА E . Добавим переходы $\delta(q, \varepsilon) = \emptyset$ для всех состояний автомата D . Преобразуем все $\delta_D(q, a) = p$ в $\delta_E(q, a) = \{p\}$

Достаточность. Пусть $E = (Q_E, \Sigma, \delta_E, q_E, F_E)$ некоторый ε -НКА. Используем модифицированную конструкцию подмножеств для построения ДКА $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$. Доказать: $L(D)=L(E)$. Покажем: $\hat{\delta}_E(q_0, w) = \hat{\delta}_D(q_0, w)$.

Базис. $|w|=0 \Rightarrow w = \varepsilon$. По определению $\hat{\delta}_E(q_0, \varepsilon) = \text{ECLOSE}(q_0)$. По определению начального состояния ДКА D $q_D = \text{ECLOSE}(q_0)$. Для любого состояния p ДКА $\hat{\delta}(p, \varepsilon) = p \Rightarrow \hat{\delta}_D(q_D, \varepsilon) = \text{ECLOSE}(q_0) \Rightarrow \hat{\delta}_E(q_0, \varepsilon) = \hat{\delta}_D(q_D, \varepsilon)$.

Индукция. Пусть $w = xa$, причем $\hat{\delta}_E(q_0, x) = \hat{\delta}_D(q_D, x)$ и равняются $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$.

По определению $\hat{\delta}$ для ε -НКА находим $\hat{\delta}_E(q_0, w)$ следующим образом.

1. Пусть $\bigcup_{i=1}^k \delta_E(p_i, a)$ есть $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$.

2. Тогда $\hat{\delta}_E(q_0, w) = \bigcup_{j=1}^m \text{ECLOSE}(r_j)$.

$\hat{\delta}_D(q_D, w) = \hat{\delta}_D(\{p_1, p_2, \dots, p_k\}, a)$
совпадает с $\hat{\delta}_E(q_0, w)$.

Лекция 4.

Регулярные выражения (РВ)

- Алгебраическое описание регулярных языков
 - Grep
 - Lex, Flex вход: РВ, выход: ДКА

Операции над языками

1. *Объединение* языков L и M ($L \cup M$) - множество цепочек, содержащихся либо в L , либо в M , либо в обоих языках.
 $L = \{001, 10, 111\}$, $M = \{\epsilon, 001\}$ $L \cup M = \{\epsilon, 10, 001, 111\}$
2. *Конкатенация* языков L и M ($L.M$ или LM) - множество цепочек, которые можно образовать путем дописывания к любой цепочке из L в ее конец любой цепочки из M .
 $LM = \{001, 10, 111, 001001, 10001, 111001\}$

Операции над языками

3. *Итерация* («звездочка», замыкание Клини – S. C. Kleene) языка L (L^*) представляет множество цепочек, образованных путем конкатенации любого (и нулевого) количества цепочек из L . При этом допускаются повторения цепочек – одна и та же цепочка может быть выбрана для конкатенации более одного раза.

$L=\{0,1\}$, L^* - все битовые цепочки, в том числе и пустая ϵ

$L=\{0,11\}$, L^* - битовые цепочки, в том числе и пустая, содержащие четное число единиц

$L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i$, где $L^0 = \{\epsilon\}$, $L^1 = L$ и $L^i = LL \dots L$ (конкатенация i копий L) для $i \geq 0$

$L=\{0,11\}$: $L^0 = \{\epsilon\}$, $L^1 = \{0,11\}$, $L^2 = \{00,011,110,1111\}$

$L^3 = \{000,0011,0110,01111,1100,11011,11110,111111\}$

L – множество всех нулевых цепочек: $L^i = L$ $i > 0 \Rightarrow L^* = L$

$\emptyset^* = \{\epsilon\}$

Построение РВ

- Базис:
 - константы $\emptyset$ и ϵ суть РВ, определяющие языки $\emptyset$ и $\{\epsilon\}$
 - если a символ алфавита, то a РВ, определяющее язык $\{a\}$ (чаще сам символ используют в качестве РВ)
- Индукция:
 - E и F суть РВ $\Rightarrow E+F$ тоже РВ, определяющее объединение языков $L(E)$ и $L(F)$: $L(E) \cup L(F)$
 - E и F суть РВ $\Rightarrow EF$ тоже РВ, определяющее конкатенацию языков $L(E)$ и $L(F)$: $L(E)L(F)$
 - E есть РВ $\Rightarrow E^*$ тоже РВ, определяющее итерацию языка $L(E)$: $L(E^*) = (L(E))^*$
 - E есть РВ $\Rightarrow (E)$ тоже РВ, определяющее тот же язык $L(E)$, что и выражение E : $L((E)) = L(E)$

Пример

- РВ для множества цепочек из чередующихся нулей и единиц
 - $01 \rightarrow \{01\}$
 - $(01)^* \rightarrow \{w: w=(01)_n, n \geq 0\}$
 - $(01)^* + (10)^* + 0(10)^* + 1(01)^*$
 - к $(01)^*$ допишем слева $\varepsilon+1$, а справа $\varepsilon+0$
 - $L(\varepsilon+1) = L(\varepsilon) \cup L(1) = \{\varepsilon, 1\}$
 - $(\varepsilon+1)(01)^*(\varepsilon+0)$

Приоритеты операций РВ

- Замыкание Клини (применяется к наименьшей последовательности символов слева от нее и являющейся РВ)
- Конкатенация (ассоциативная)
- Объединение (ассоциативная)
- Для изменения приоритета используются скобки

Пример

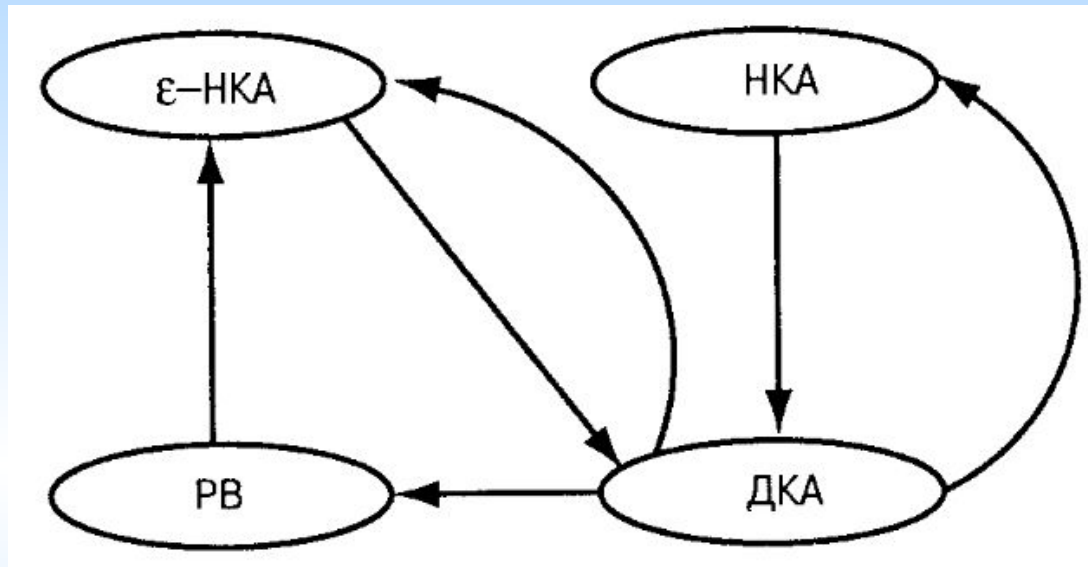
$$01^*+1 \Leftrightarrow (0(1^*)) + 1$$

?

$$(01)^*+1 \quad ?$$

$$0(1^*+1) \quad ?$$

Лекция 5. КА и РВ



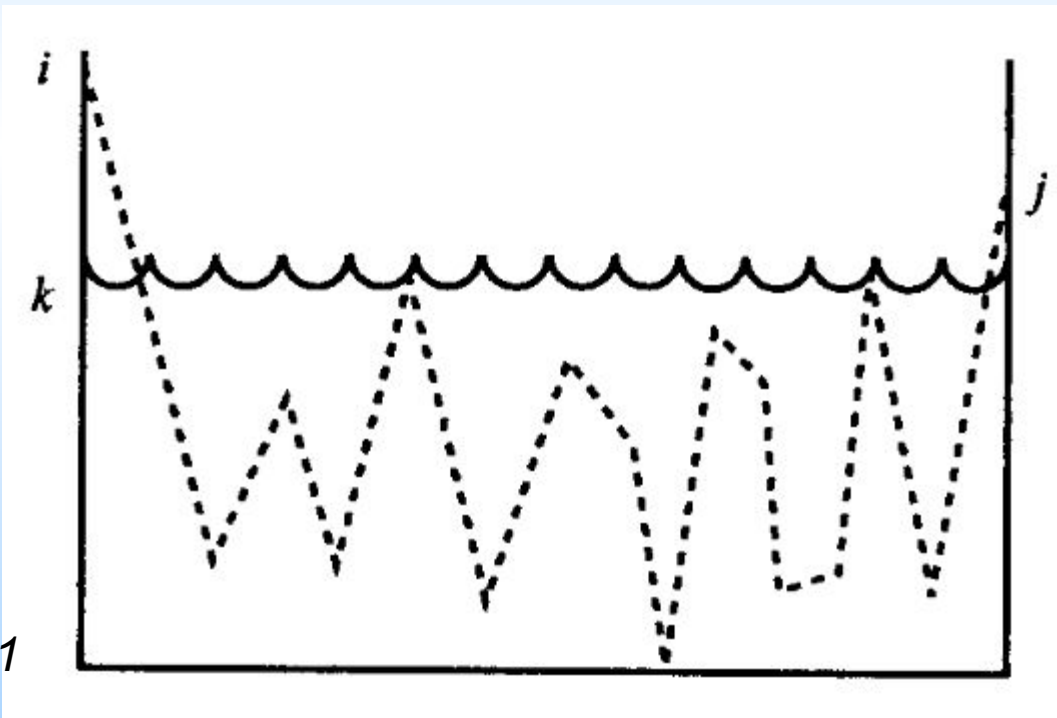
От ДКА к РВ

Теорема 3.4. Если $L = L(A)$ для некоторого ДКА A , то существует регулярное выражение R , причем $L = L(R)$.

Теорема 3.4 Доказательство

- Перенумеруем множество состояний ДКА $\{1, 2, \dots, n\}$
- Обозначим через $R_{ij}^{(k)}$ РВ, язык которого состоит из множества меток (цепочек) w , ведущих от состояния i к состоянию j ДКА и не имеющих промежуточных состояний с номерами $> k$

состояние n



состояние 1

движение вдоль пути от i к j ->

Теорема 3.4 Доказательство

- Для построения $R_{ij}^{(k)}$ используем индуктивное определение от $k=0$ до $k=n$
- **Базис:** $k=0$ (у пути нет промежуточных состояний)
 - дуга из i в j
 - путь длины 0, состоящий из вершины i
- $i \neq j \Rightarrow$ возможен только первый случай
 - если таких дуг нет, то $R_{ij}^{(0)} = \emptyset$
 - одна дуга, помеченная символом a , то $R_{ij}^{(0)} = a$
 - несколько дуг, помеченных $a_1, a_2, \dots, a_k$
- $i=j \Rightarrow$ путь длины 0 и петли в состоянии i

ε

$\varepsilon + a$

$\varepsilon + a_1 + a_2 + \dots + a_k$

Теорема 3.4 Доказательство

- Индукция: путь из состояния i в состояние j , не проходящий через состояния с номерами $> k$
 - путь вообще не проходит через состояние $k \Rightarrow$ метка пути принадлежит языку $R_{ij}^{(k-1)}$
 - путь проходит через состояние k по меньшей мере один раз $R_{ik}^{(k-1)} (R_{kk}^{(k-1)})^* R_{kj}^{(k-1)}$



$$R_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k-1)} + R_{ik}^{(k-1)} (R_{kk}^{(k-1)})^* R_{kj}^{(k-1)} \Rightarrow R_{ij}^{(n)}$$

РВ для языка ДКА: объединение РВ $R_{ij}^{(n)}$ для всех допускающих j