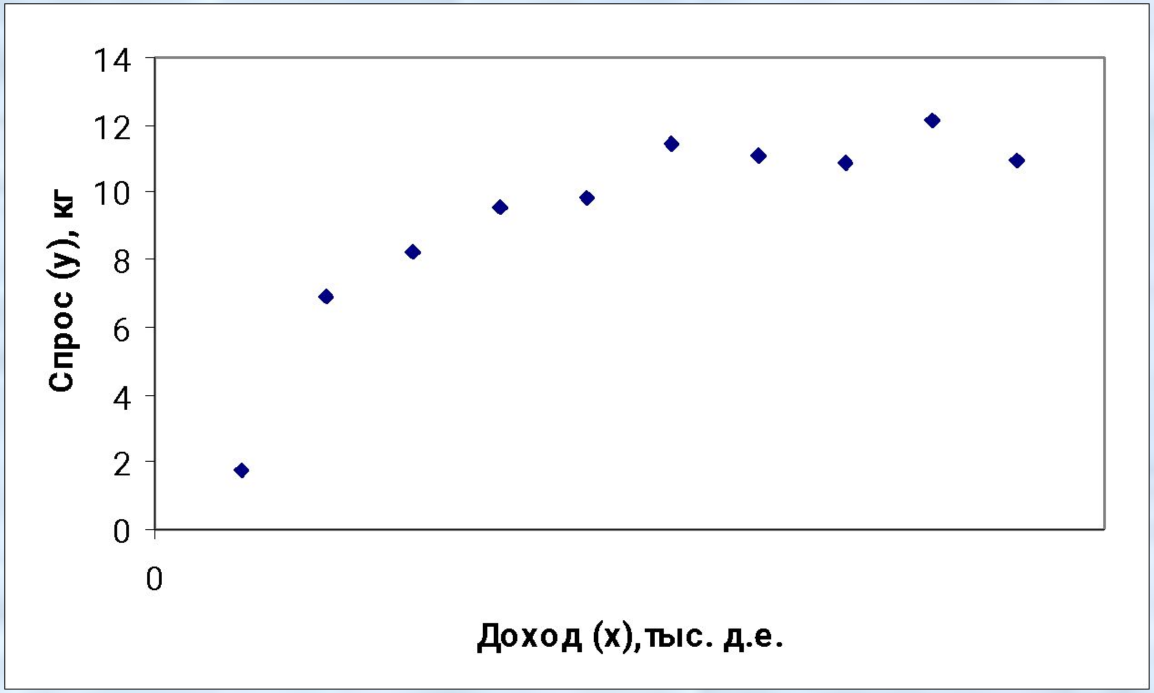
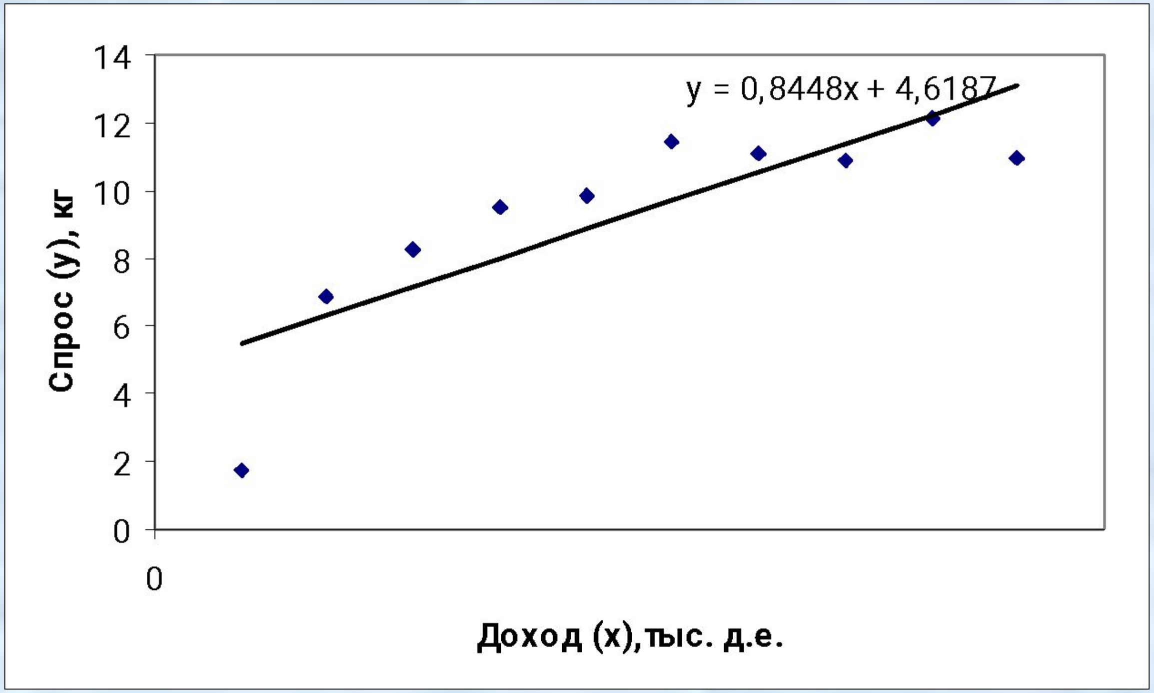
Модели нелинейной регрессии

№ домохозяйства	Среднедушевой доход домохозяйства, тыс. д.е.	Объем спроса, кг в месяц
1	1	1,71
2	2	6,88
3	3	8,25
4	4	9,52
5	5	9,81
6	6	11,43
7	7	11,09
8	8	10,87
9	9	12,15
10	10	10,94



x	y
1	1,71
2	6,88
3	8,25
4	9,52
5	9,81
6	11,43
7	11,09
8	10,87
9	12,15
10	10,94

Зависимость нелинейная!



x	y
1	1,71
2	6,88
3	8,25
4	9,52
5	9,81
6	11,43
7	11,09
8	10,87
9	12,15
10	10,94

Попытка провести прямую

1) Логарифмическая модель

$$y = a \cdot \ln x + b + \varepsilon$$

Для оценки такой зависимости создаем столбец с ln(x)

	A	B	C
1	x	ln(x)	y
2	1	0	1,7
3	2	0,7	6,9
4	3	1,1	8,3
5	4	1,4	9,5
6	5	1,6	9,8
7	6	1,8	11
8	7	1,9	11
9	8	2,1	11
10	9	2,2	12
11	10	2,3	11

1) Логарифмическая модель

$$y = a \cdot \ln x + b + \varepsilon$$

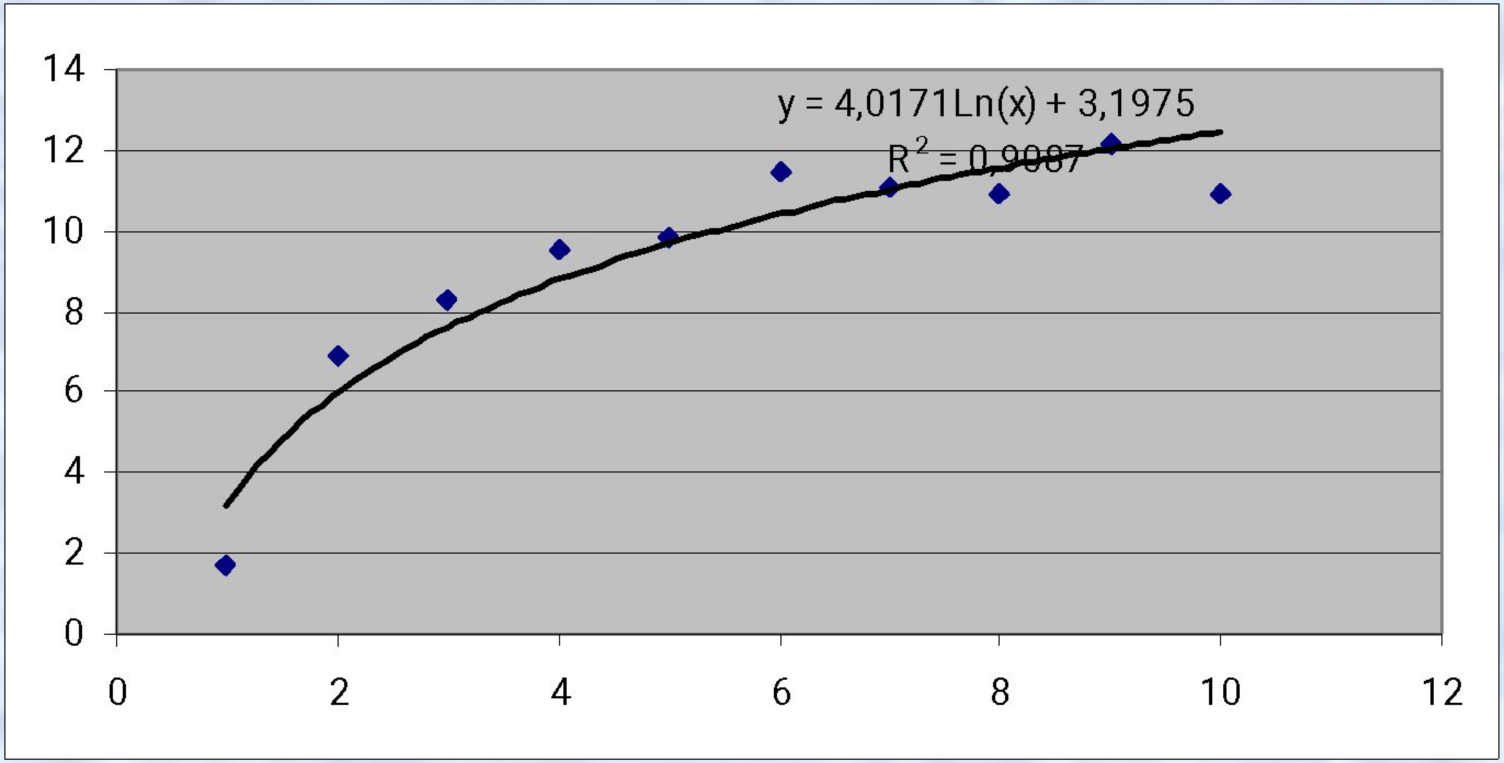
Используя сервис Анализ данных построим модель линейной регрессии, используя в качестве зависимой переменной y, а в качестве независимой ln(x).

	Коэффициенты	Стандартная ошибка	t-статистика	P-Значение
Y-пересеч	3,197464	0,748798	4,270129	0,002724
ln(x)	4,017062	0,450314	8,920585	1,98E-05

Y=4.017ln(x)+3.197

1) Логарифмическая модель

$$y = a \cdot \ln x + b + \varepsilon$$



1) Логарифмическая модель

$$y = a \cdot \ln x + b + \varepsilon$$

Интерпретация коэффициента а: при увеличении х на 1% у увеличится на а/100 единиц.

Y=4.017ln(x)+3.197

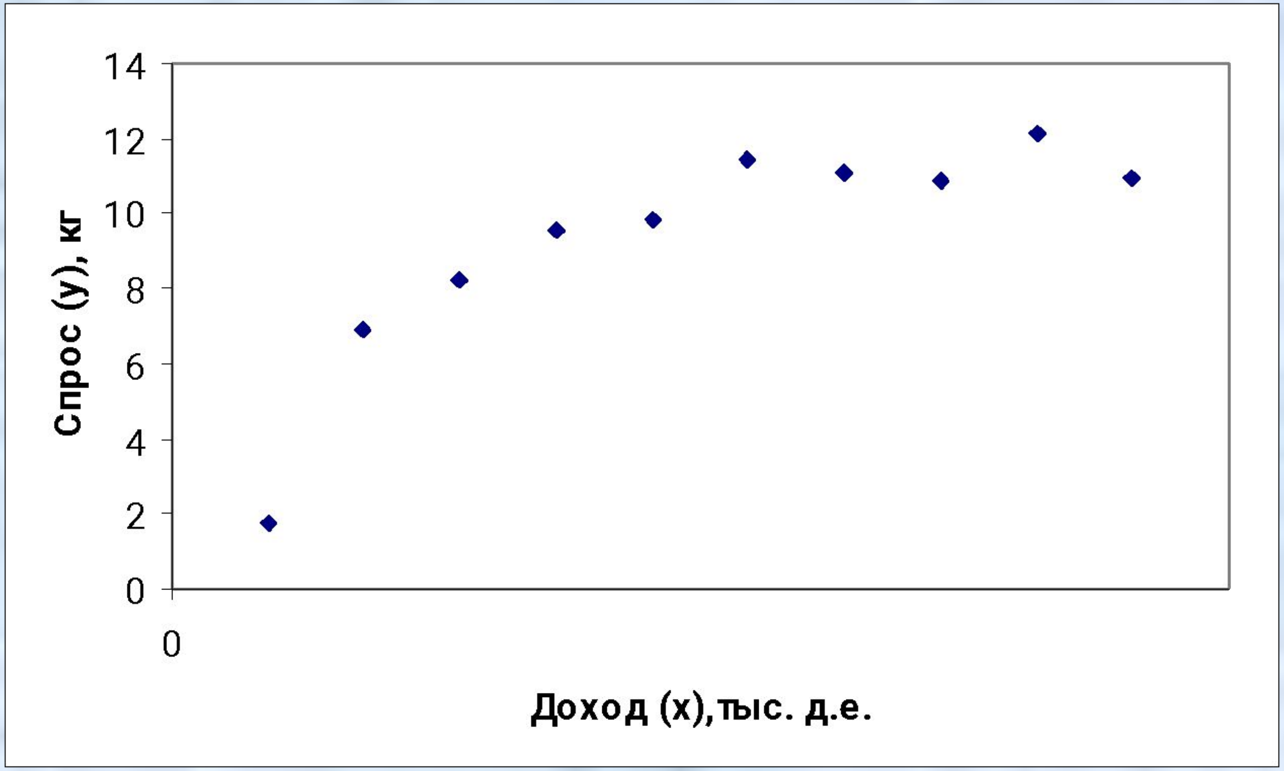
При увеличении дохода на 1% спрос на товар увеличится на 0,0417 единиц.

1) Логарифмическая модель

Также как в линейной модели рассчитывается средняя относительная ошибка аппроксимации

Y=4.017ln(x)+3.197

	A	B	C	D	E	F
1	x	ln(x)	y	прогноз	e	Относительная ошибка
2	1	0	1,7	3,197	-1,5	86,99%
3	2	0,7	6,9	5,982	0,9	13,05%
4	3	1,1	8,3	7,611	0,6	7,75%
5	4	1,4	9,5	8,766	0,8	7,92%
6	5	1,6	9,8	9,663	0,1	1,50%
7	6	1,8	11	10,395	1	9,05%
8	7	1,9	11	11,014	0,1	0,68%
9	8	2,1	11	11,551	-0,7	6,26%
10	9	2,2	12	12,024	0,1	1,04%
11	10	2,3	11	12,447	-1,5	13,78%
12			Средняя относительная ошибка			14,80%



x	y
1	1,71
2	6,88
3	8,25
4	9,52
5	9,81
6	11,43
7	11,09
8	10,87
9	12,15
10	10,94

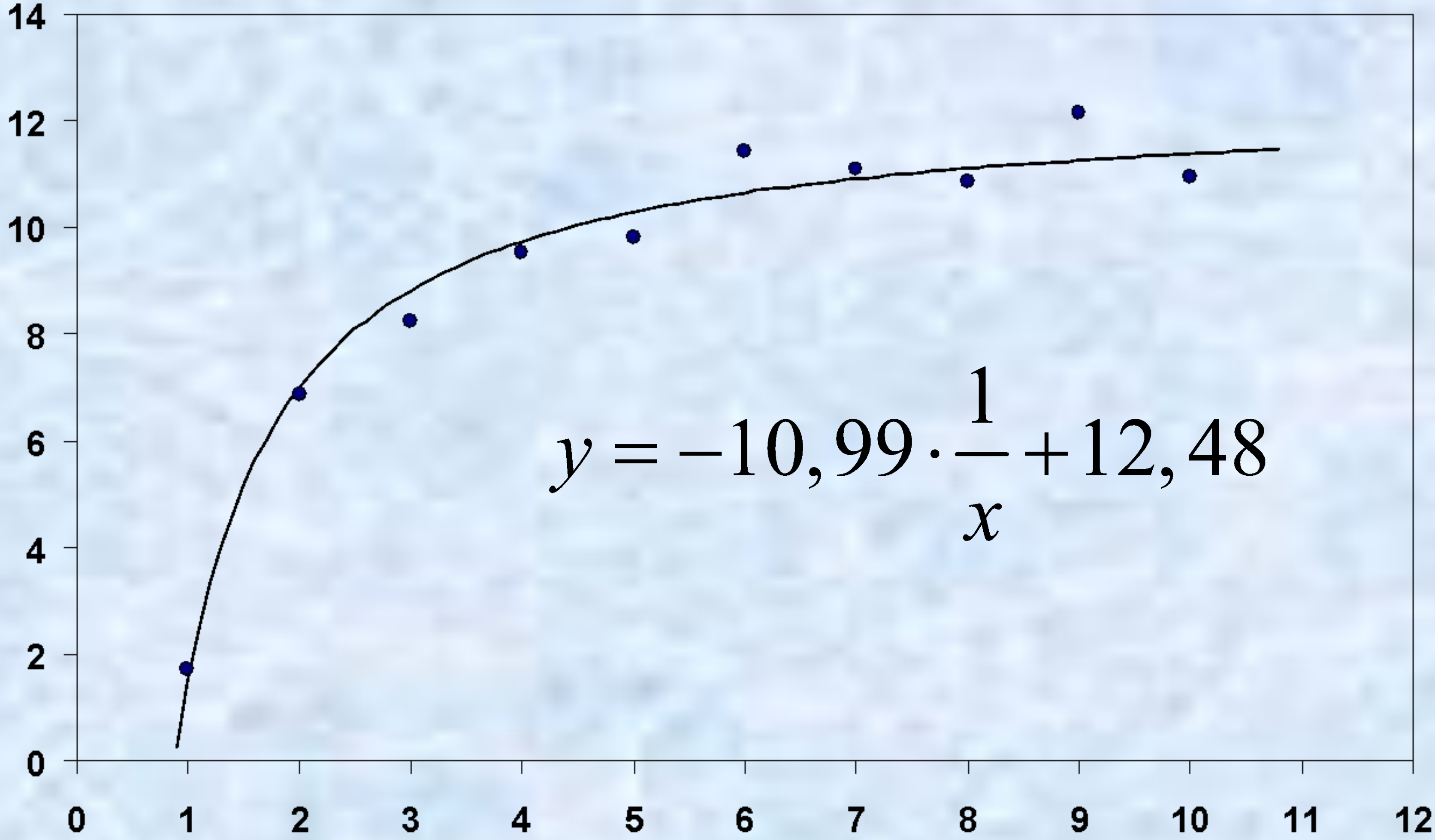
2) Попробуем провести гиперболу наилучшим образом. $y = a\frac{1}{x} + b$

	A	B	C
1	x	1/x	y
2	1	1	1,7
3	2	0,5	6,9
4	3	0,3	8,3
5	4	0,3	9,5
6	5	0,2	9,8
7	6	0,2	11
8	7	0,1	11
9	8	0,1	11
10	9	0,1	12
11	10	0,1	11

Сначала рассчитаем столбик 1/x

	Коэффициенты	Стандартная ошибка	t-статистика	P-Значение
Y-пересеч	12,48354	0,255751	48,81128	3,43E-11
1/x	-10,9887	0,649657	-16,9145	1,51E-07

$$y = -10,99 \cdot \frac{1}{x} + 12,48$$



С ростом дохода объем потребления товара стремится к 12.48 ед.

Вычисляем ошибку аппроксимации

$$y = -10,99 \cdot \frac{1}{x} + 12,48$$

x	1/x	y	прогноз y	e	Относительная ошибка
1	1	1,7	1,495	0,215	12,58%
2	0,5	6,9	6,989	-0,109	1,59%
3	0,3	8,3	8,821	-0,571	6,92%
4	0,3	9,5	9,736	-0,216	2,27%
5	0,2	9,8	10,29	-0,476	4,85%
6	0,2	11	10,65	0,778	6,81%
7	0,1	11	10,91	0,176	1,59%
8	0,1	11	11,11	-0,24	2,21%
9	0,1	12	11,26	0,887	7,30%
10	0,1	11	11,38	-0,445	4,06%
		Средняя ошибка аппроксимаци			5,02%

3) Степенная модель

$$y = bx^{a}$$

Интерпретация коэффициента *a* – эластичность зависимой переменной по объясняющей переменной

a показывает, на сколько процентов возрастает y при возрастании x на 1%.

Степенная модель

$$y = bx^a$$

Сводится к линейной модели логарифмированием

$$\ln y = \ln b + a \ln x$$

Степенная модель

Создаем столбцы с логарифмами

x	ln(x)	y	ln(y)
1	0	1,71	0,536
2	0,7	6,88	1,929
3	1,1	8,25	2,110
4	1,4	9,52	2,253
5	1,6	9,81	2,283
6	1,8	11,4	2,436
7	1,9	11,1	2,406
8	2,1	10,9	2,386
9	2,2	12,2	2,497
10	2,3	10,9	2,392

Используя сервис Анализ данных построим модель линейной регрессии, используя в качестве зависимой переменной ln(y), а в качестве независимой ln(x).

	Коэффициенты	Стандартная ошибка	t-статистика	P-Значение
Y-пересеч	1,063664	0,22029814	4,828294976	0,001307
ln(x)	0,701353	0,13248337	5,293894844	0,000734

$\ln(Y)=0.701\ln(x)+1.063$

Используя сервис Анализ данных построим модель линейной регрессии, используя в качестве зависимой переменной ln(y), а в качестве независимой ln(x).

	Коэффициенты	Стандартная ошибка	t-статистика	P-Значение
Y-пересеч	1,063664	0,22029814	4,828294976	0,001307
ln(x)	0,701353	0,13248337	5,293894844	0,000734

ln(Y)=0.701ln(x)+1.063

$$\ln y = a \ln x + \ln b$$

$$\ln b = 1.063 \qquad b = \exp(1.063) = 2.9$$

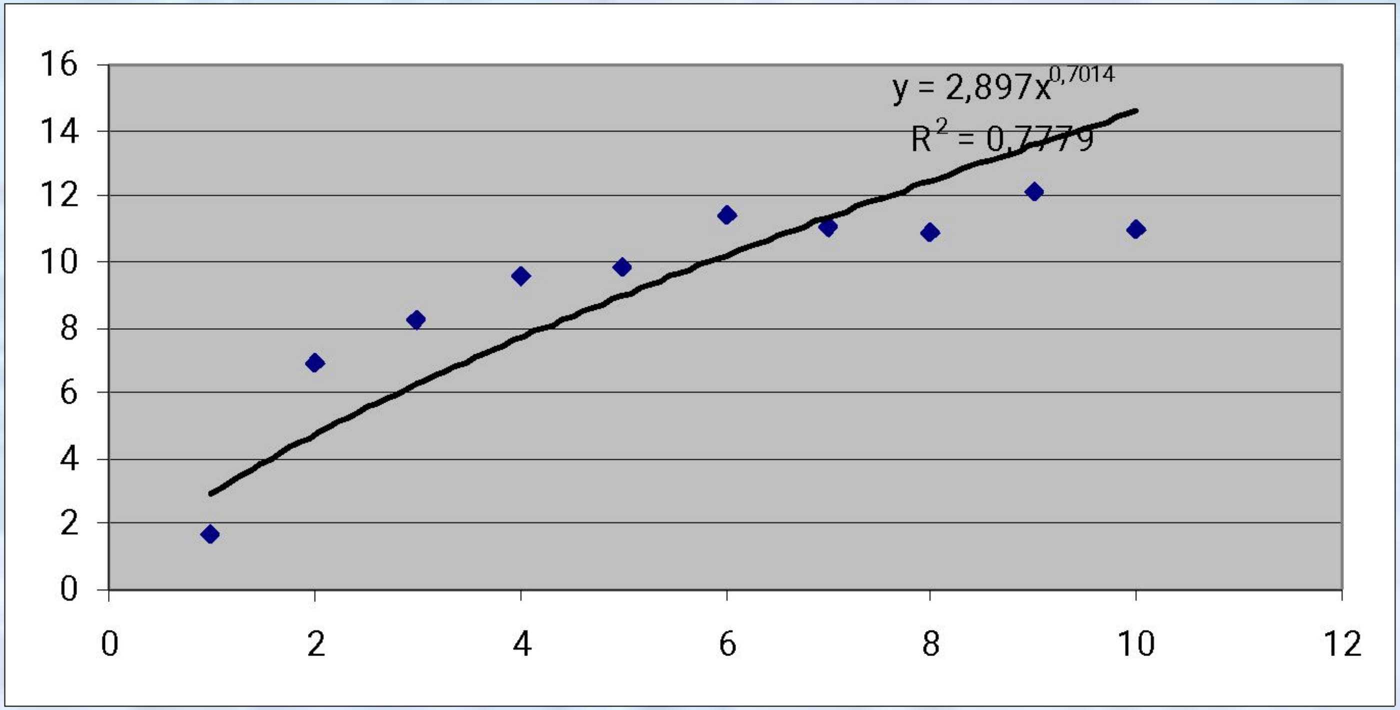
Используя сервис Анализ данных построим модель линейной регрессии, используя в качестве зависимой переменной ln(y), а в качестве независимой ln(x).

	Коэффициенты	Стандартная ошибка	t-статистика	P-Значение
Y-пересеч	1,063664	0,22029814	4,828294976	0,001307
ln(x)	0,701353	0,13248337	5,293894844	0,000734

ln(Y)=0.701ln(x)+1.063

$$b = \exp(1.063) = 2.9$$

$$y = bx^{a} \qquad y = 2.9x^{0.701}$$



$$y = 2.9x^{0.701}$$

Также как в линейной модели рассчитывается средняя относительная ошибка аппроксимации

$$y = 2.9x^{0.701}$$

A	B	C	D	E	F	G
x	ln(x)	y	ln(y)	прогноз	e	Относительная ошибка
1	0	1,71	0,536	2,897	-1,187	69,41%
2	0,7	6,88	1,929	4,711	2,169	31,53%
3	1,1	8,25	2,110	6,260	1,990	24,12%
4	1,4	9,52	2,253	7,659	1,861	19,54%
5	1,6	9,81	2,283	8,957	0,853	8,69%
6	1,8	11,4	2,436	10,179	1,251	10,95%
7	1,9	11,1	2,406	11,341	-0,251	2,26%
8	2,1	10,9	2,386	12,455	-1,585	14,58%
9	2,2	12,2	2,497	13,527	-1,377	11,33%
10	2,3	10,9	2,392	14,565	-3,625	33,13%
		Средняя относительная ошибка				22,56%

$y=-10,99\cdot\frac{1}{x}+12,48$ *- наилучшая функция спроса*

в зависимости от дохода.

1) Выполнить прогноз потребления продукта домохозяйством с доходом 4 тыс.д.е.
2) Имеется ли уровень насыщения для данного продукта? Если да, найти его.
2)Найти предельную склонность к потреблению продукта.
3) Найти эластичность спроса по доходу при доходе 1000 д.е. и 10000 д.е.

Модели парной нелинейной регрессии

Существует 2 типа нелинейных моделей:

1. модели, сводящиеся к линейным;
2. модели, не сводящиеся к линейным.

1 тип моделей

1) Гиперболическая модель

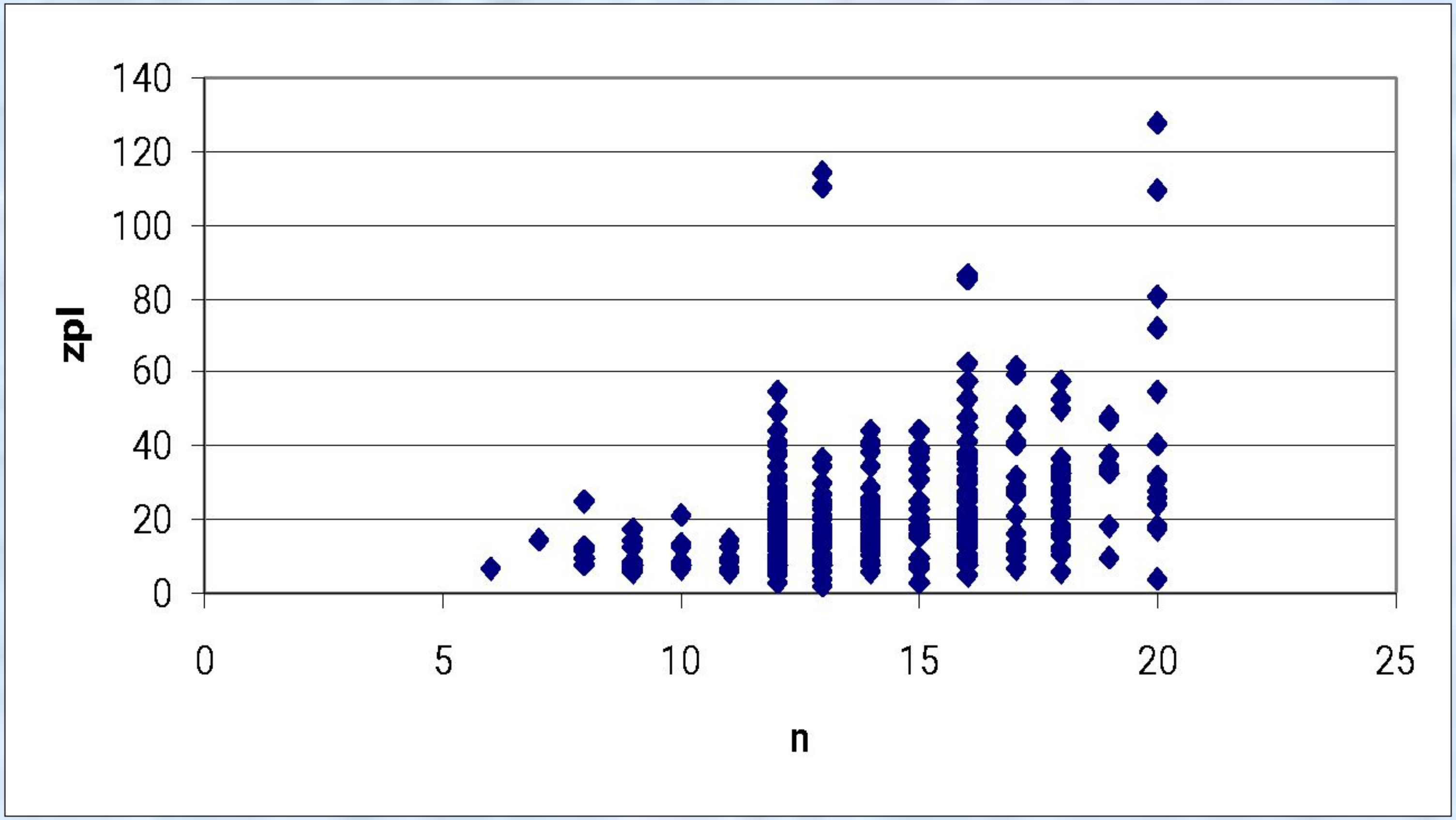
$$y = a \cdot \frac{1}{x} + b + \varepsilon$$

1 тип моделей

3) Экспоненциальная модель

$$y = b \cdot e^{ax}$$

Пример применения экспоненциальной модели для моделирования оплаты труда



Данные 2002 г. о часовой заработной плате ($ США) и уровне образования (лет) по 540 респондентам из национального опроса в США.

12 лет – средняя школа

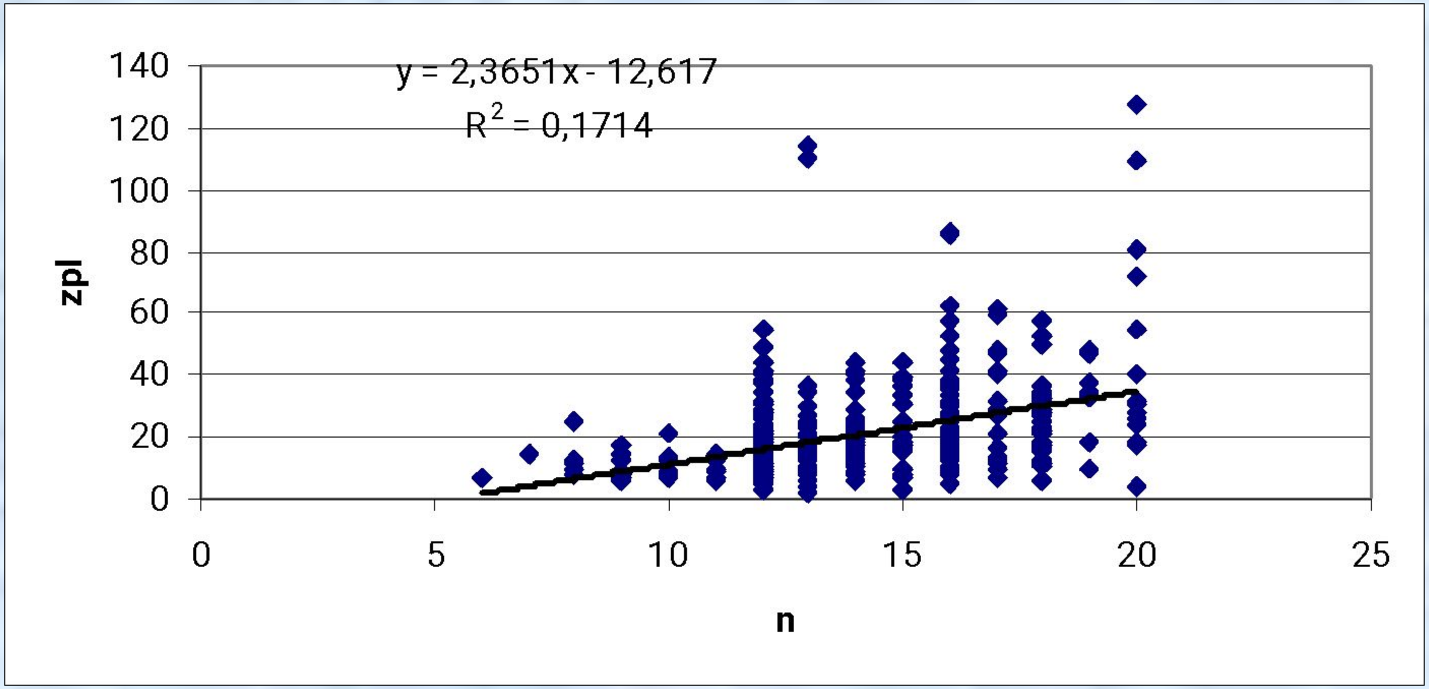
13-16 лет – колледж (бакалавриат)

17-18 лет – университет (магистратура)

19-20 лет - PhD

ПРИМЕР УРАВНЕНИЯ ПАРНОЙ РЕГРЕССИИ

Zpl=-12,617+2,3651N



Увеличении уровня образования на один год приведет в среднем к увеличению почасовой заработной платы на $2.37

Пример применения экспоненциальной модели для моделирования оплаты труда

$$Zpl = be^{aN}$$

$$\ln(Zpl) = \ln b + aN$$

	Коэффициенты	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*
Y-пересечение	1,424862	0,125762	11,32982	7,81E-27
n	0,100131	0,009042	11,07396	8,12E-26

Пример применения экспоненциальной модели для моделирования оплаты труда

$$Zpl = be^{aN}$$

$$\ln(Zpl) = \ln b + aN$$

	Коэффициенты	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*
Y-пересечение	1,424862	0,125762	11,32982	7,81E-27
n	0,100131	0,009042	11,07396	8,12E-26

$$\ln(Zpl) = 1,42 + 0,1N$$

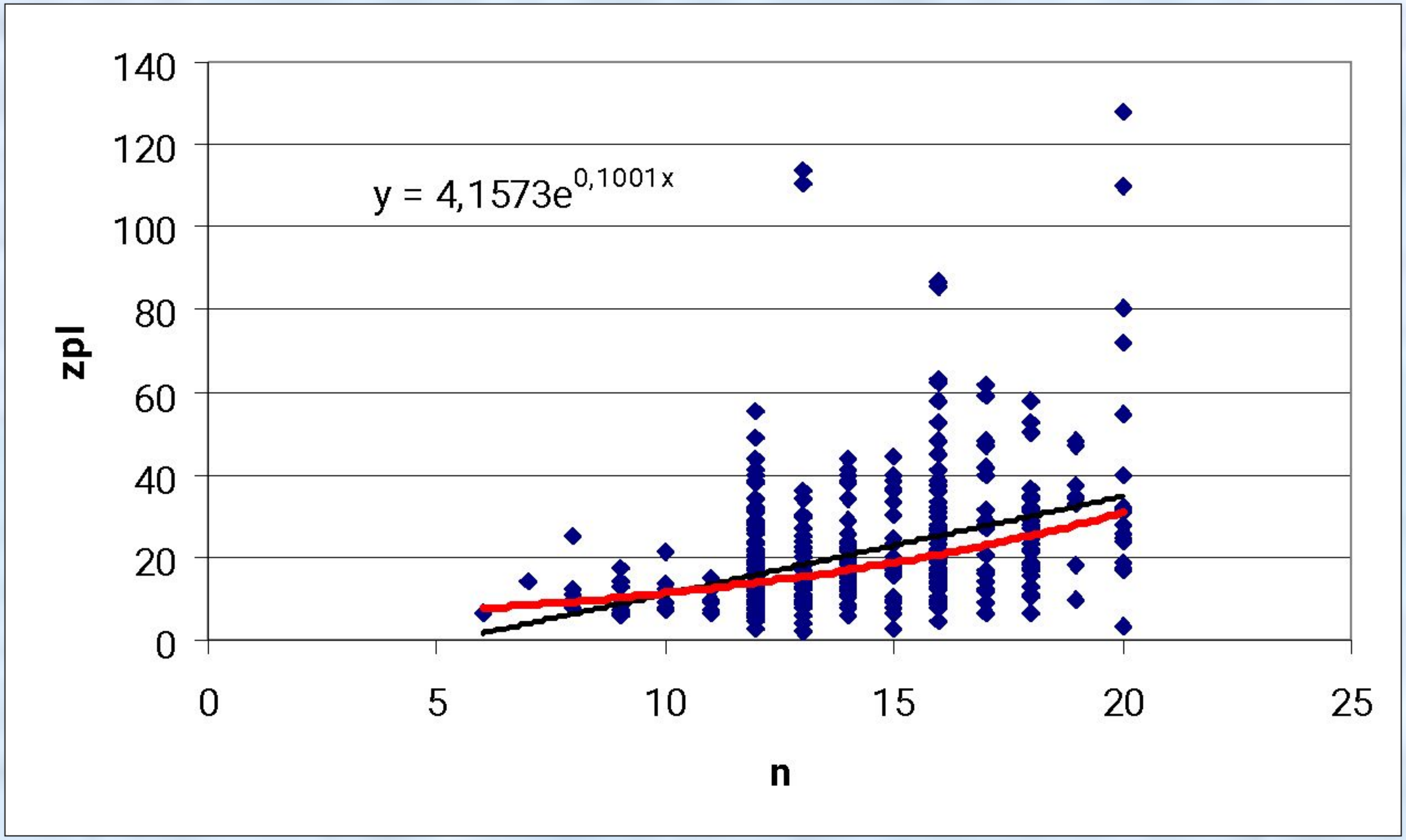
$$Zpl = e^{1,42+0,1N}$$

$$Zpl = 4,14e^{0,1N}$$

Пример применения экспоненциальной модели для моделирования оплаты труда

$$Zpl = 4{,}14e^{0{,}1N}$$

Каждый дополнительный год обучения приводит к росту заработка на 10%

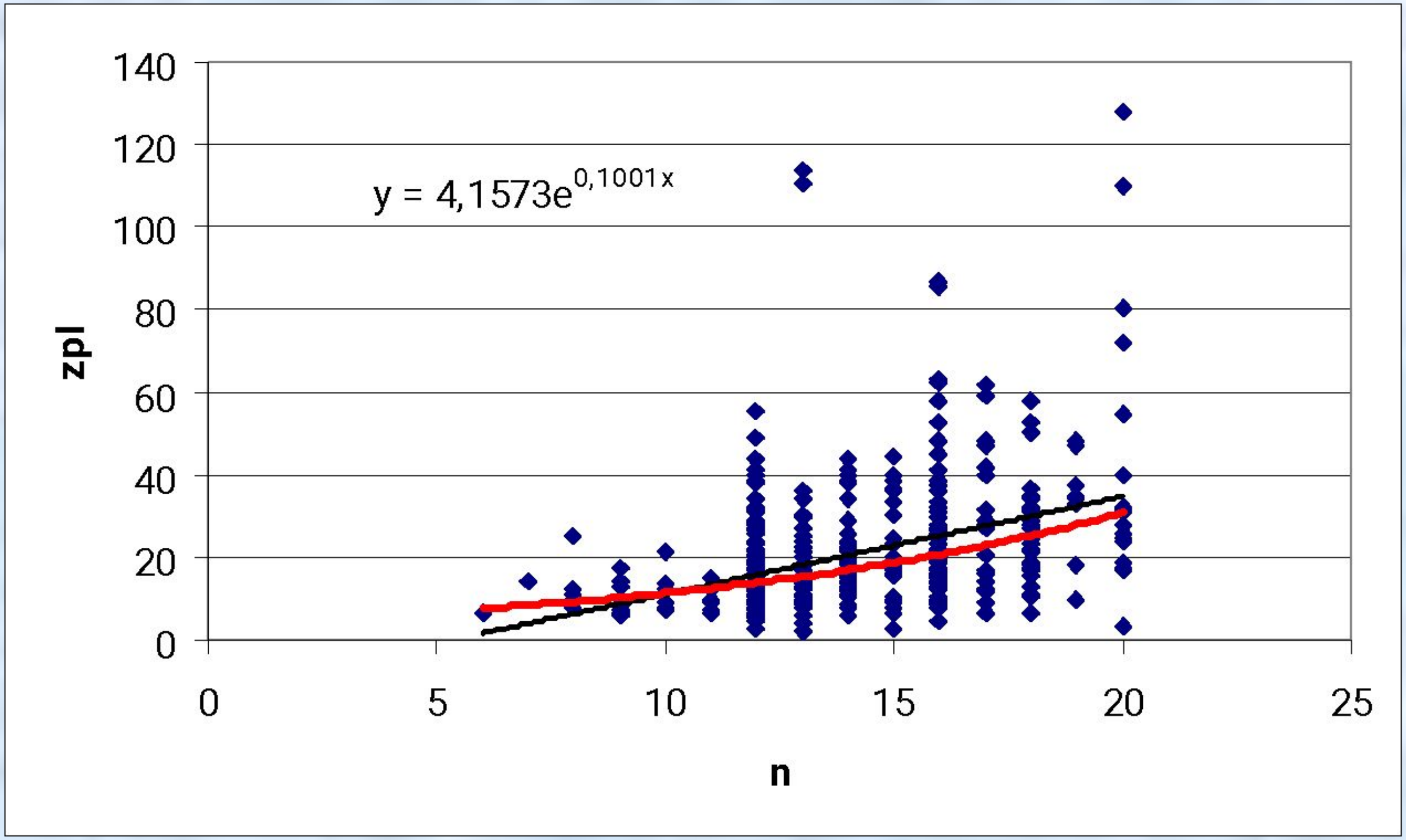


Пример применения экспоненциальной модели для моделирования оплаты труда

Преимущества экспоненциальной модели:

1) Она не предсказывает отрицательного заработка индивидам с низким образовательным уровнем

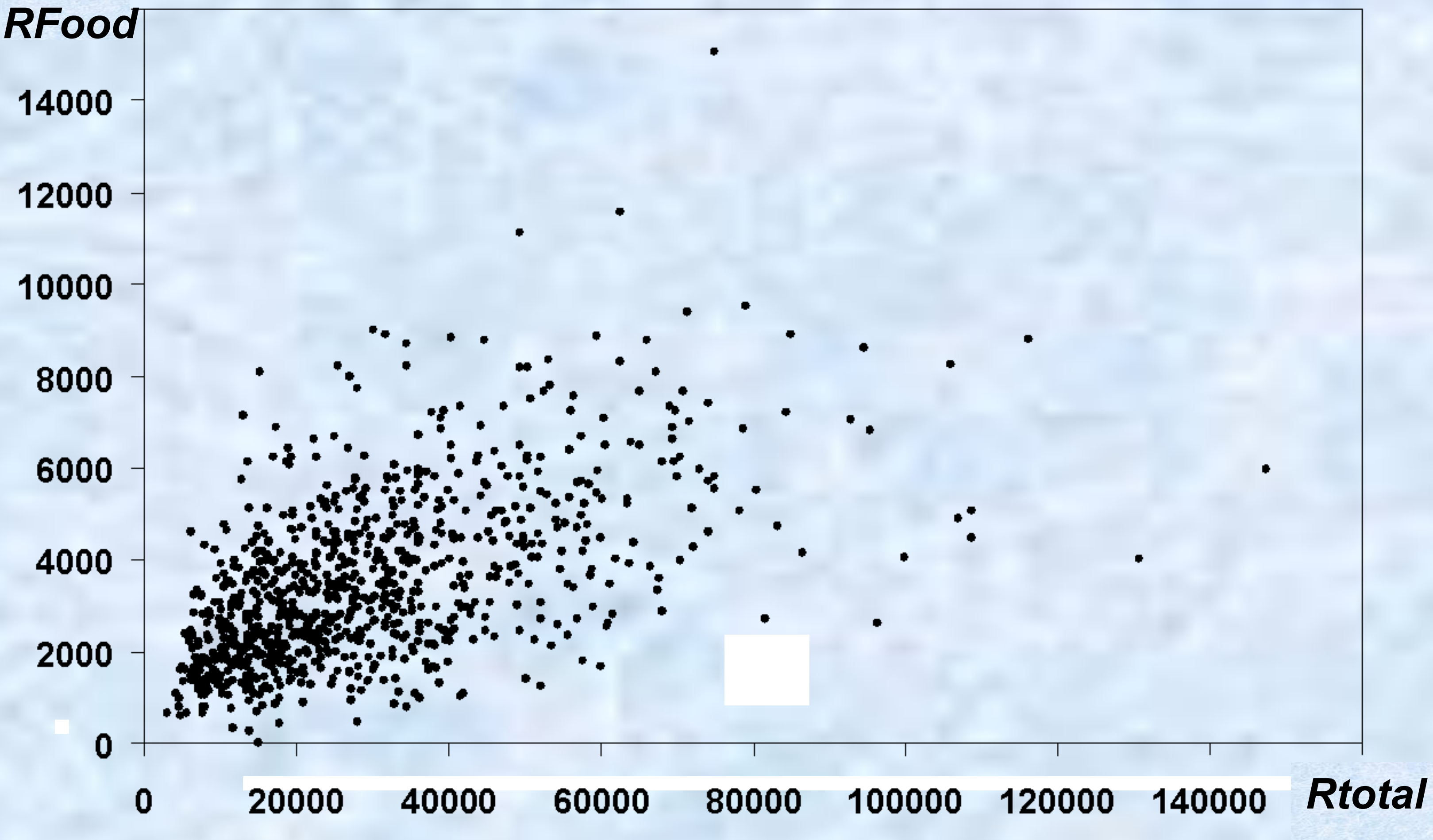
2) Она показывает возрастание прироста заработков в расчете на 1 дополнительный год обучения при повышении образовательного уровня.



4) Степенная модель

$$y = bx^a$$

Пример. Линейная и степенная модель



Расходы на продукты питания и общие расходы в 1995 (обе - в долларах) по данным 869 домохозяйств США

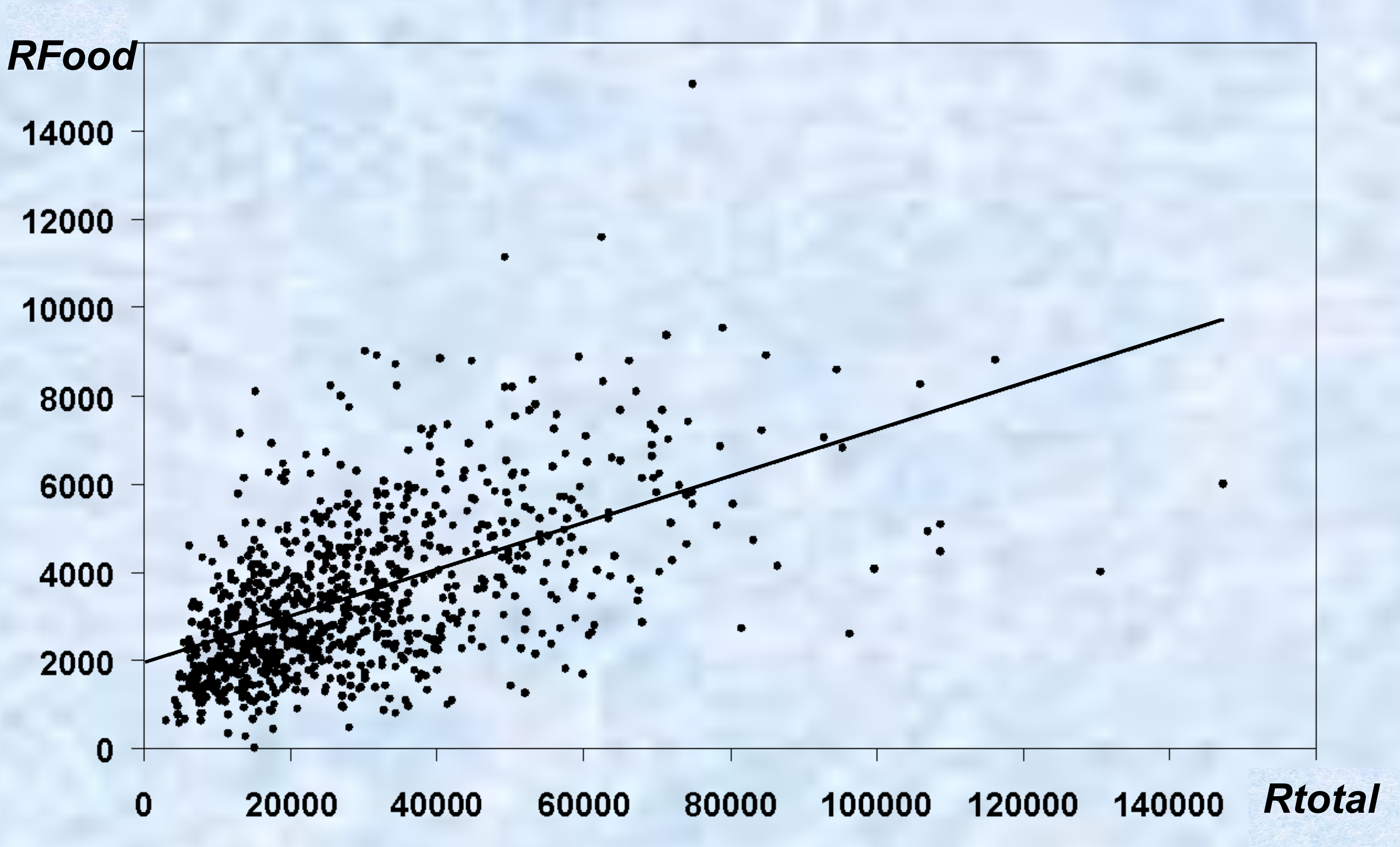
Линейная модель

Number of obs	= 869
F(1, 867)	= 381.47
Prob > F	= 0.0000
R-squared	= 0.3055
Adj R-squared	= 0.3047
Root MSE	= 1549.5

Rtotal	Coef.	Std. Err.	t	P>|t|	[95% Conf.	Interval]
RFood	.0528427	.0027055	19.531	0.000	.0475325	.0581529
_cons	1916.143	96.54591	19.847	0.000	1726.652	2105.634

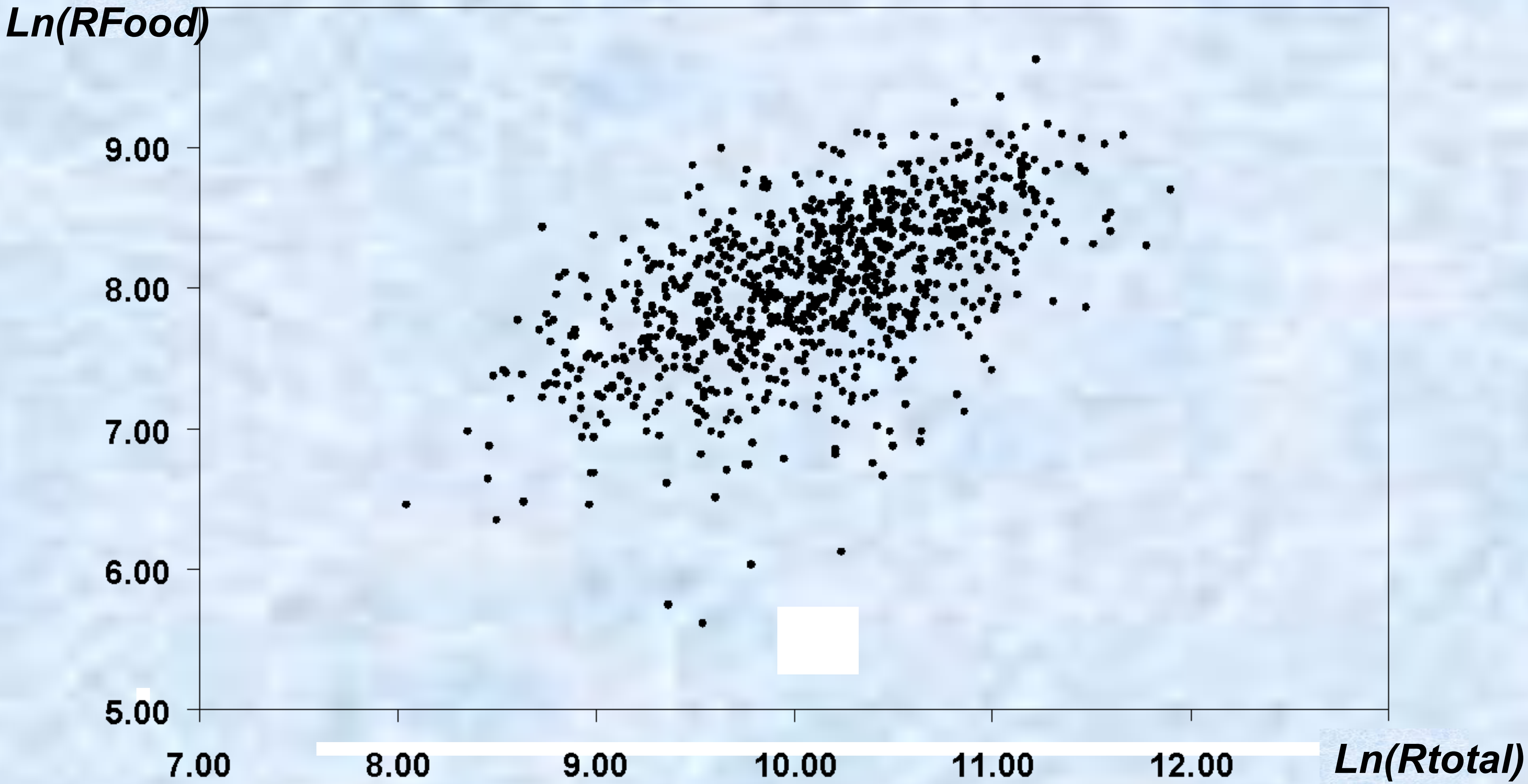
Коэффициенты представляются разумными, хотя предельный эффект несколько занижен, а константа-завышена.

Линейная модель



Несоотвествие коэффициентов хорошо видно на графике

Степенная модель



Между логарифмически преобразованными переменные линейная зависимость кажется более адекватной

Степенная модель

```
Number of obs =     868
F(  1,   866) =  396.06
Prob > F      =  0.0000
R-squared     =  0.3138
Adj R-squared =  0.3130
Root MSE      =  .46167
```

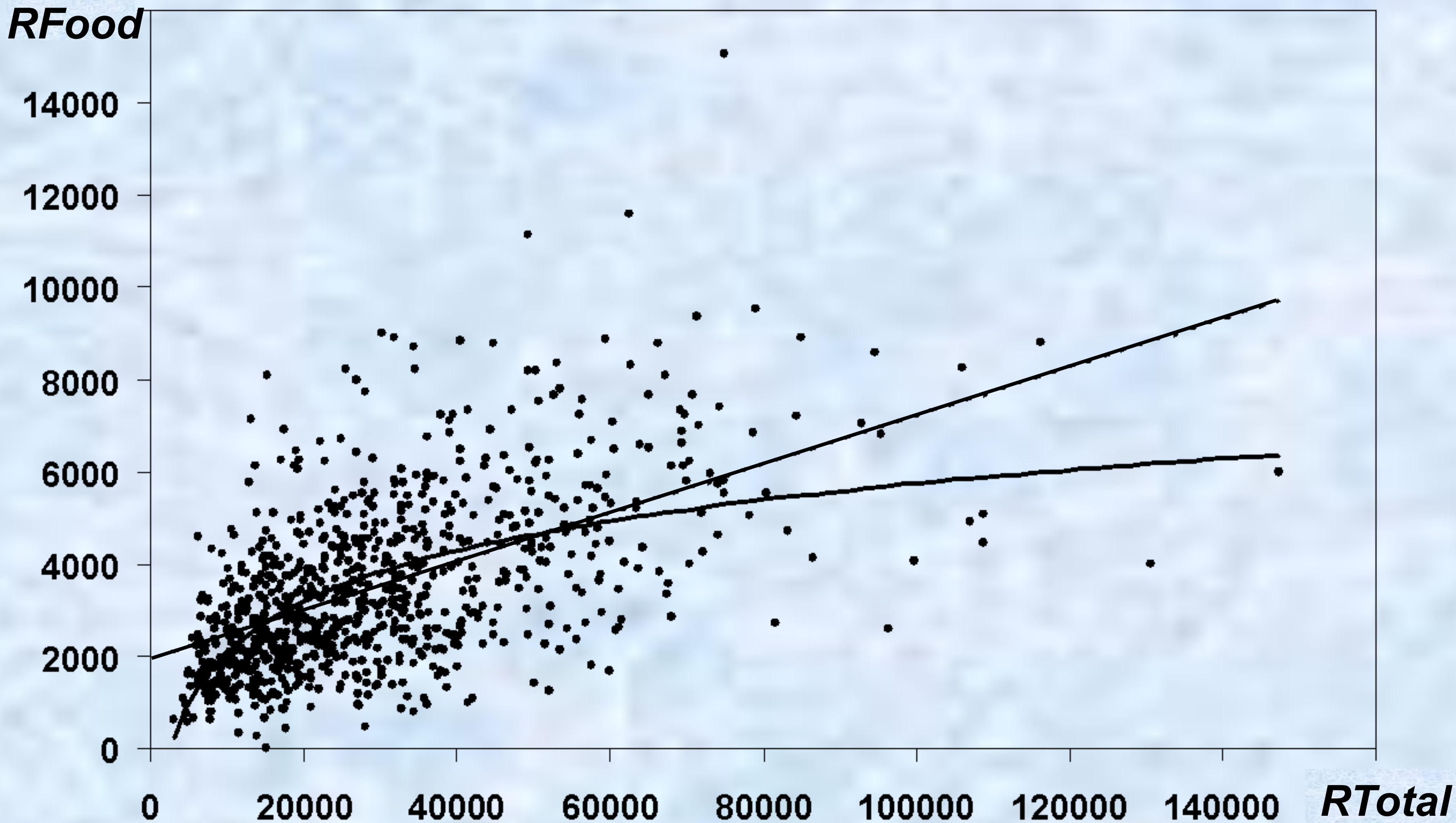
LnRtotal	Coef.	Std. Err.	t	P>|t|	[95% Conf.	Interval]
LnRFood	.4800417	.0241212	19.901	0.000	.4326988	.5273846
_cons	3.166271	.244297	12.961	0.000	2.686787	3.645754

Модель высокозначима. Коэффициент эластичности расходов на товары питания по совокупным расходам положителен и меньше единицы, как и полагается для нормального товара первой необходимости

$$LnRFood = 3.17 + 0.48 LnRtotal \quad \Rightarrow \quad RFood = 23.8 EXP^{0.48 Rtotal}$$

Константа не имеет хорошей интерпретации. $e^{3.16}$ =23.8, то есть просто некий масштабный множитель

Степенная модель



Сопоставление линейной и степенной регрессии на исходном графике четко делает выбор в пользу последней. Хотя различие не кажется особенно сильным, но степенная модель лучше объясняет данные при малых значениях *Rtotal, более обоснована с теоретической точки зрения (постоянная эластичность) и гетероскедастичность меньше выражена*

Полиномиальная модель

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k + \varepsilon$$

Появляются возможность исследования зависимостей, для которых существенно наличие максимумов и минимумов

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \varepsilon$$

квадратичная модель

Полиномиальная модель

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \varepsilon$$

$$x_1 = x \qquad x_2 = x^2$$

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \varepsilon$$

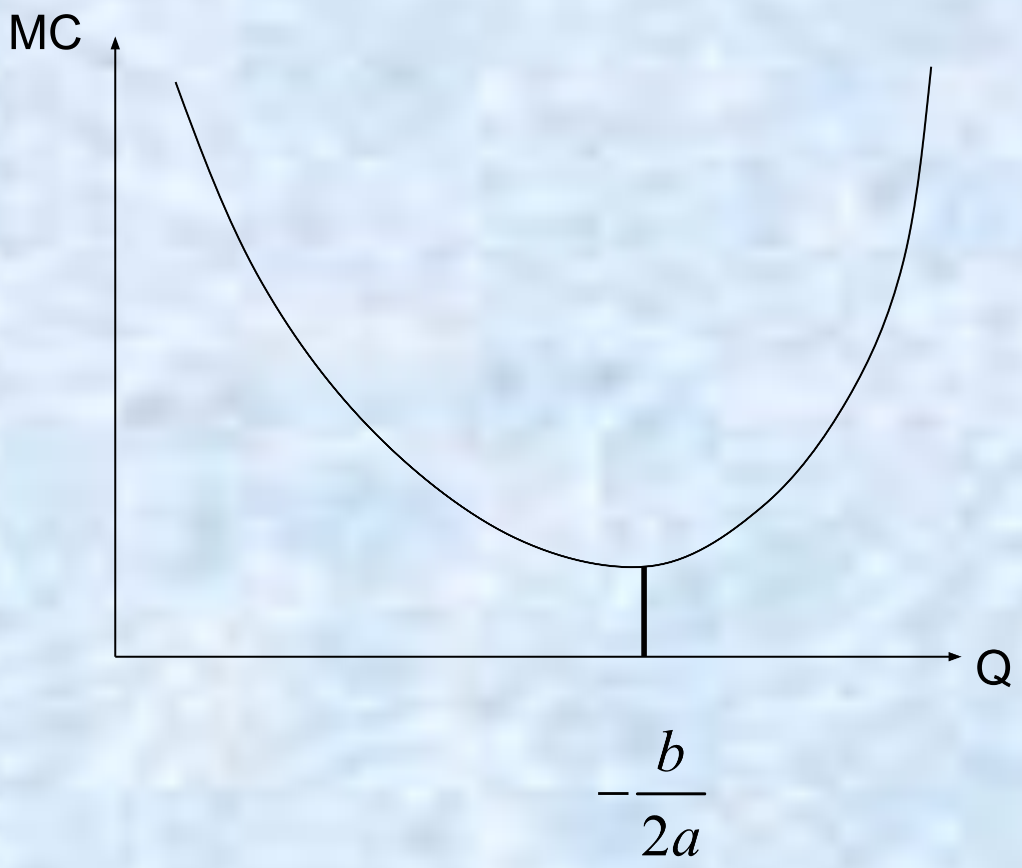
- модель множественной регрессии.

Полиномиальная модель

Примеры

1) Пусть Q – объем выпуска продукции, MC – предельные издержки производства.

$$MC = aQ^2 + bQ + c + \xi$$ a>0, b<0

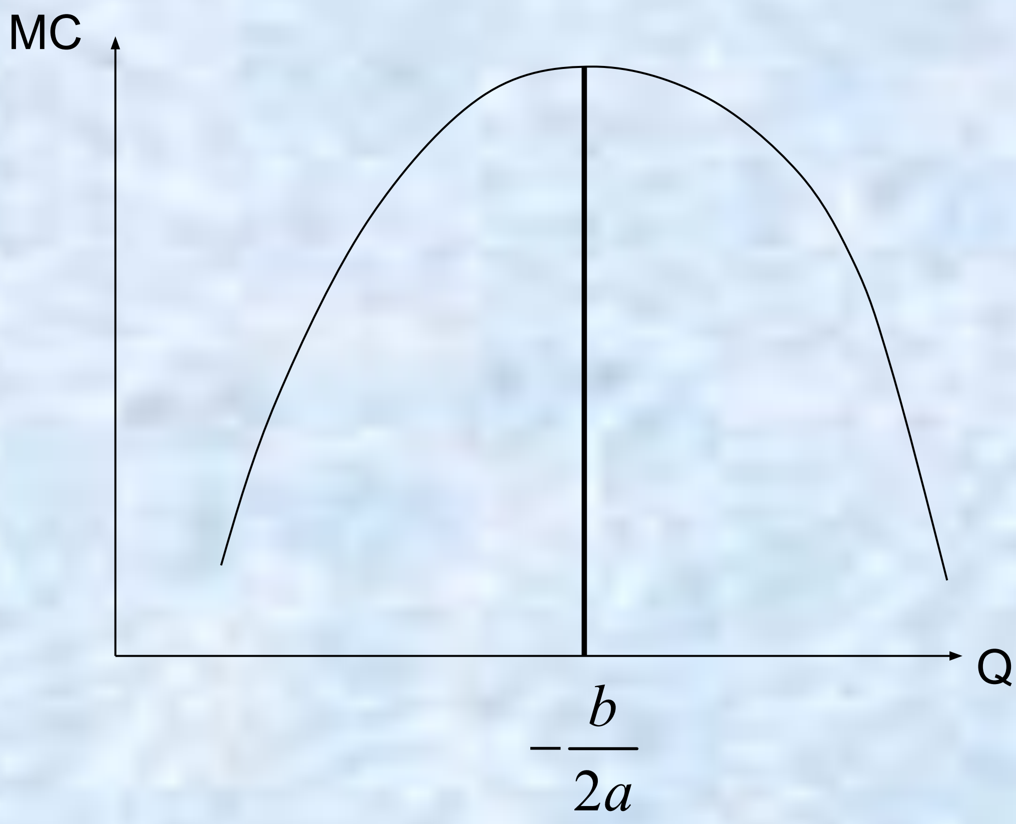


Полиномиальная модель

Примеры

2) x – возраст работника физического труда, y – заработная плата

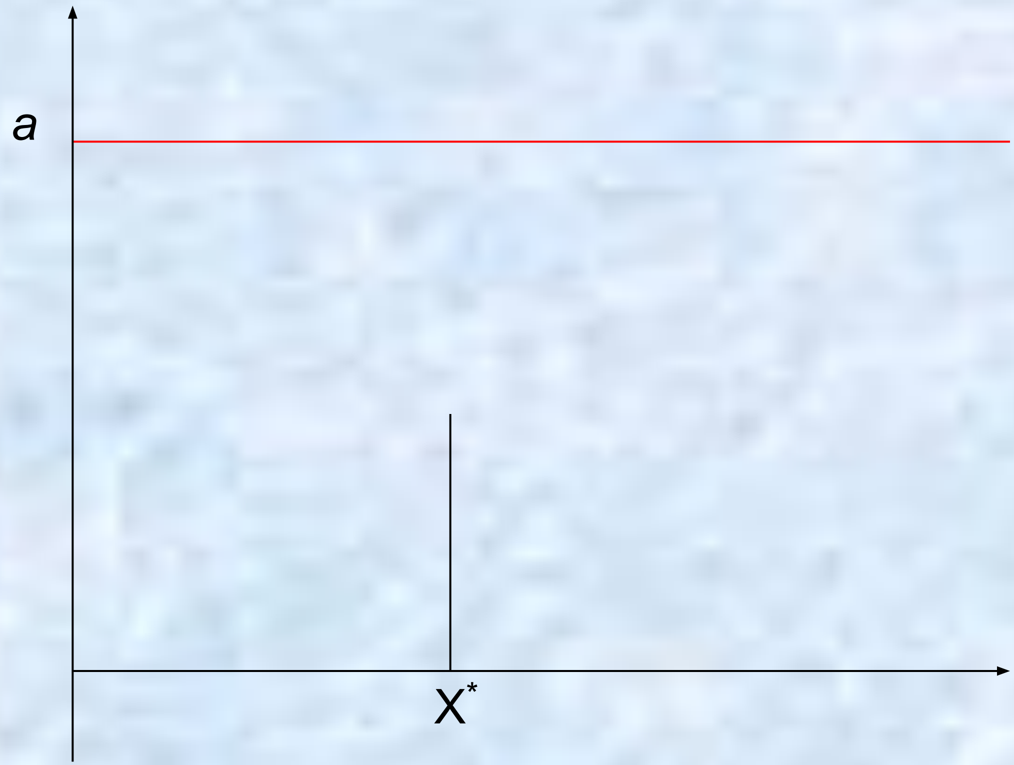
$$y = ax^2 + bx + c + \xi \qquad a<0,\ b<0$$



<u>2 тип моделей</u> (модели, не сводящиеся к линейным)

Например, Логистическая модель

$$y = \frac{a}{1 + be^{-cx}} + \varepsilon$$



2 тип моделей (модели, не сводящиеся к линейным)

Для оценки коэффициентов таких моделей используется МНК:

$$y = \frac{a}{1 + be^{-cx}} + \varepsilon$$

$$S(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \frac{a}{1 + be^{-cx_i}} \right)^2$$

$$\min_{a,b,c} S(a,b,c)$$

$$\begin{cases} S'_a = 0 \\ S'_b = 0 \\ S'_c = 0 \end{cases}$$

Задача решается численными методами.
В Excel через поиск решения