

Эйлеровы графы

- Граф неориентированный $\Gamma(V, E)$. Псевдограф
- Цепь в Γ называется эйлеровой, если она проходит по одному разу через каждое ребро псевдографа Γ
- Замкнутая эйлерова цепь называется эйлеровым циклом
- **Теорема Эйлера.** Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четны.
- **Задача:** найти хотя бы один эйлеров цикл в эйлеровом графе G , т.е. занумеровать ребра графа числами $1, 2, \dots, |EG|$ с тем, чтобы номер, присвоенный ребру, указывал, каким по счету это ребро проходится в эйлеровом цикле

Алгоритм Флёри

Шаг 1. Начиная с произвольной вершины u , присвоить произвольному ребру $\{u, v\}$ номер 1. Затем вычеркнуть ребро $\{u, v\}$ и перейти в вершину v .

Шаг 2. Пусть w – вершина, в которую перешли в результате выполнения предыдущего шага, и k – номер, присвоенный некоторому ребру на этом шаге.

Выбрать любое ребро, инцидентное вершине w ; присвоить выбранному ребру номер $k+1$ и вычеркнуть его.

Шаг 3. Повторять шаг 2 пока не все ребра вычеркнуты.

Вход: эйлеров граф $G(V,E)$, заданный списками смежности ($\Gamma[v]$ — список вершин, смежных с вершиной v).

Выход: последовательность вершин эйлерова цикла.

```
S = 0 { стек для хранения вершин }
select v in V { произвольная вершина }
v → S { положить v в стек S }
while S != 0 do
    v ← S { v — верхний элемент стека }
    v → S
    if  $\Gamma[v] = 0$  then v ← S; вывод v
        { очередная вершина эйлерова цикла }
    else
        select u in  $\Gamma[v]$ 
        u → S
         $\Gamma[v] = \Gamma[v] - \{u\}$ ;  $\Gamma[u] = \Gamma[u] - \{v\}$  { удалить ребро (v,u) }
        end if
    end while
```

```

b in V
Z={b} R={}
v=b
do
    Cycle(v,R)
    Z=Z+R
while существует v:  $\Gamma(v)>0$ 

```

```

procedure Cycle(v,R)
    R={v}
    do
        w in  $\Gamma(v)$ 
        R=R+{w}
         $\Gamma(v)=\Gamma(v)-\{w\}$ 
        if  $v \neq w$  then
             $\Gamma[w]=\Gamma[w]-\{v\}$ 
        endif
        v=w
    while  $\Gamma(v)>0$ 

```

Гамильтоновы циклы

- Граф называется **гамильтоновым**, если в нем имеется простой цикл, содержащий каждую вершину этого графа. Сам этот цикл также называется гамильтоновым.
- **Теорема (Дирак).** Если в графе $G(V,E)$ для любой вершины v выполняется условие $d(v) \geq p/2$, то граф G является гамильтоновым.
- Нетрудно заметить, что во всяком p - вершинном графе, удовлетворяющем условиям любой из теорем, число ребер не меньше чем $(p-1)^2/4$.
- Если в графе G порядка p фиксировать одну вершину и обход всегда начинать с нее, то всякому гамильтонову циклу очевидным образом будет соответствовать перестановка элементов множества V . Тем самым найти гамильтонов цикл либо убедиться в отсутствии такого цикла можно путем перебора $(p-1)!$ перестановок.

- Алгоритмов нахождения гамильтонова цикла не существует, поэтому на практике применяют различные алгоритмы частичного перебора. Кроме того, в общем случае, нет способа определения гамильтоновости графа.
- *Задача коммивояжера*