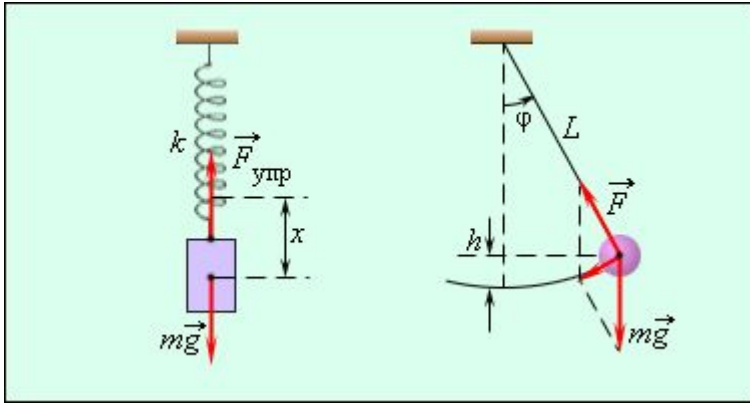

ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

1. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ

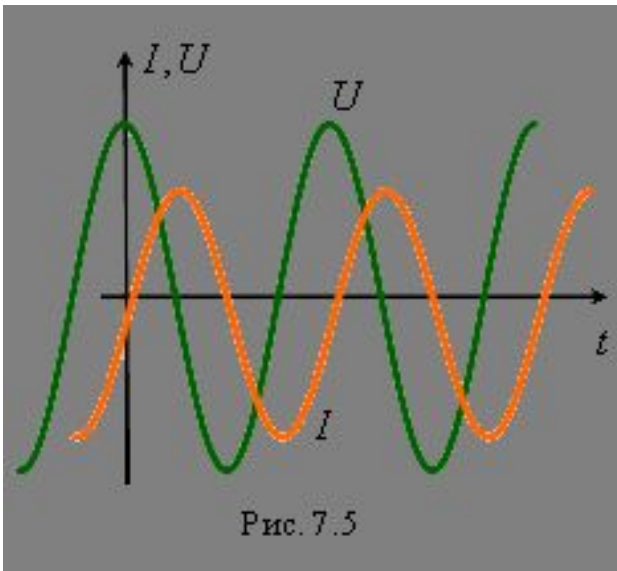


Колебаниями называются периодические процессы. (Процессы обладающие некоторой степенью периодичности).

В зависимости от физической природы повторяющегося процесса различают:

механические колебания – колебания зданий, деталей машин, маятников, струн, камертонов, частиц среды;

электромагнитные колебания – колебания напряжения на обкладках конденсатора и силы тока в катушке колебательного контура радиоприемника;
экономические, демографические, популяционные, климатические колебания.



2. КЛАССИФИКАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ

В зависимости от характера воздействия на колеблющуюся систему различают **свободные (собственные)** колебания, **вынужденные** колебания, **автоколебания** и **параметрические** колебания.

Свободными (или собственными), называются колебания, которые происходят в системе, предоставленной самой себе после того, как она была выведена из положения равновесия. **Вынужденными** называются колебания, в процессе которых колеблющаяся система подвергается воздействию внешней периодической силы.

6 Законы сохранения в механике. Механические колебания и волны
МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

РЕЗОНАНСНАЯ КРИВАЯ

АВТОКОЛЕБАНИЯ

ГРАФИКИ КОЛЕБАНИЙ
а) гармонические
$$x = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$$

б) негармонические

ФИЗИКА EDUSTRONG RUSSIAN EDUSTRONG

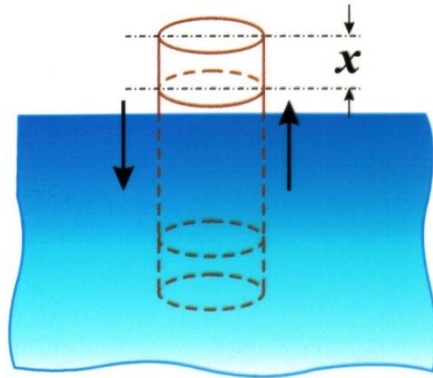
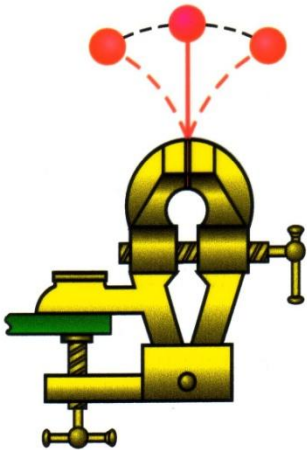
3. ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Колебания

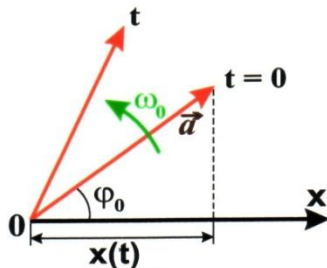
Колебания

процессы, в той или иной степени повторяющиеся во времени

Примеры механических колебаний



Графическое представление гармонических колебаний ($\omega_0 = \text{const}$)



$$x(t) = a \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

a - амплитуда колебаний,

$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ - фаза колебаний,

φ_0 - начальная фаза колебаний

Простейшими являются **гармонические колебания** то есть такие, при которых колеблющаяся величина изменяется по **гармоническому закону** (синус или косинус).

Система, в которой некоторая физическая величина совершает колебания по закону синуса или косинуса называется

гармоническим осциллятором.

Колебания в природе и технике часто имеют характер очень близкий к гармоническим.

Негармонические периодические процессы могут быть представлены суммой гармонических колебаний.

4. СВОБОДНЫЕ НЕЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

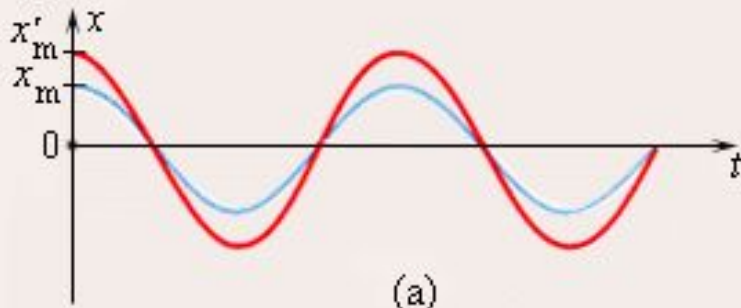
Рассмотрим колебания гармонического осциллятора.
Они описываются уравнением

$$ma_x = F_x; \quad a_x \equiv \dot{V}_x \equiv \ddot{x}; \quad F_x = -kx \Rightarrow \ddot{x} = -kx \Rightarrow$$

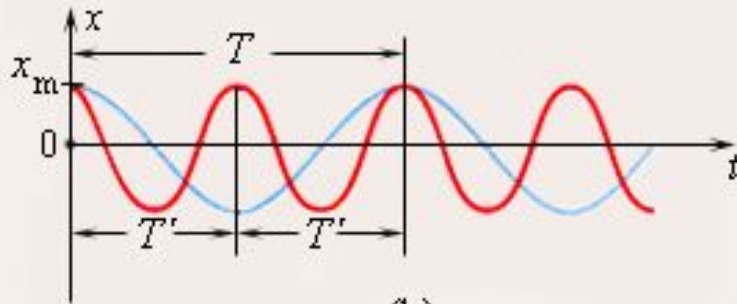
$$\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \dot{x} + \frac{k}{m}x = 0; \quad \frac{k}{m} \equiv \omega_0^2 \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.}$$

$$\boxed{x(t) = a \cos(\omega_0 t + \varphi_0).}$$

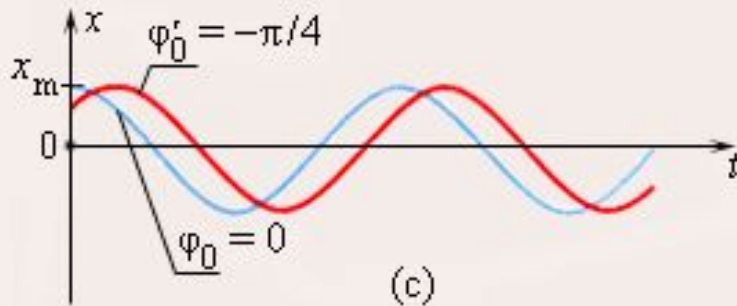
5. ПАРАМЕТРЫ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ



(a)



(b)



(c)

Величина наибольшего отклонения системы от положения равновесия называется **амплитудой колебаний** $a \equiv x_m > 0$:

$$x = a \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \Rightarrow -a \leq x \leq a.$$

Величина $\varphi \equiv \omega_0 t + \varphi_0$, являющаяся аргументом гармонической функции называется фазой **колебаний**.

Косинус – периодическая функция с периодом 2π радиан. Различные состояния колеблющейся системы повторяются через промежуток времени, называемый **периодом**, за который фаза колебаний получает приращение 2π радиан:

$$T = 2\pi/\omega_0; \quad \omega_0 = 2\pi/T; \quad T = 1/\nu \Rightarrow \omega_0 = 2\pi\nu.$$

6. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОЛЕБАНИЙ

Закон гармонического движения:

$$x = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Дифференцируя $x(t)$ по времени, получим проекцию скорости:

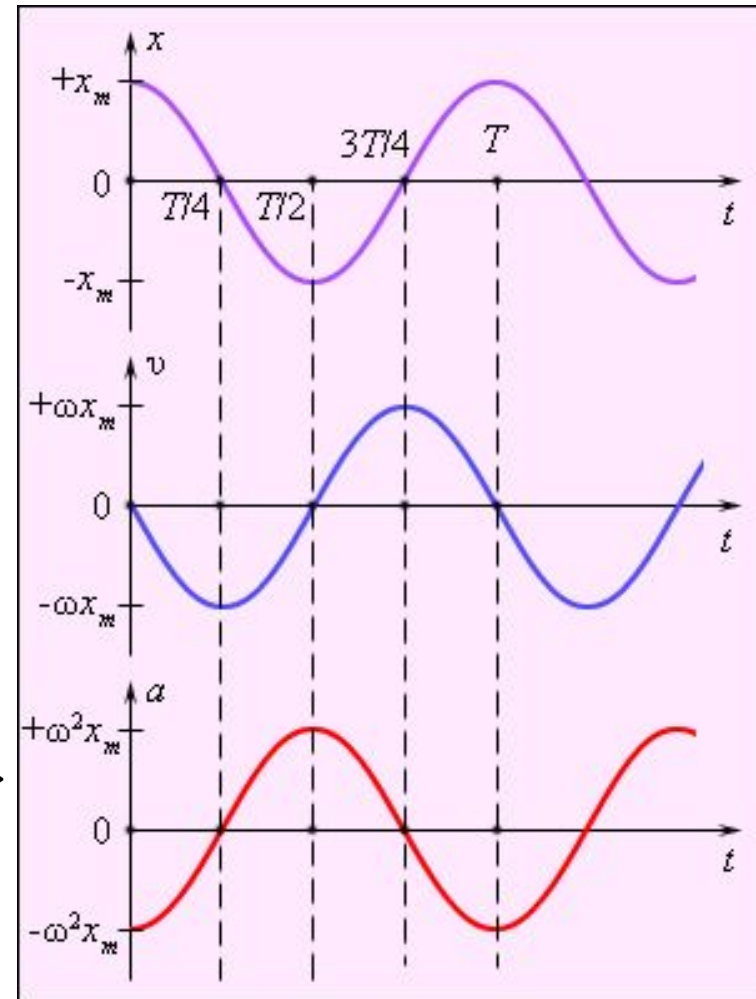
$$V_x = \dot{x} = -x_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$V_m = x_m \omega_0;$$

Дифференцируя $V_x(t)$ по времени получим проекцию ускорения:

$$a_x(t) = \dot{V}_x = \ddot{x} = -x_m \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$a_m = x_m \omega_0^2;$$



7. ЭНЕРГИЯ КОЛЕБАНИЙ

Квазиупругая сила $F_x = -kx$ является консервативной. Ей отвечает потенциальная энергия $U(x) = kx^2/2$, полная энергия гармонических колебаний должна оставаться неизменной.

$$E = U_m = K_m; \quad U_m = kx_m^2/2; \quad K_m = mV_m^2/2;$$

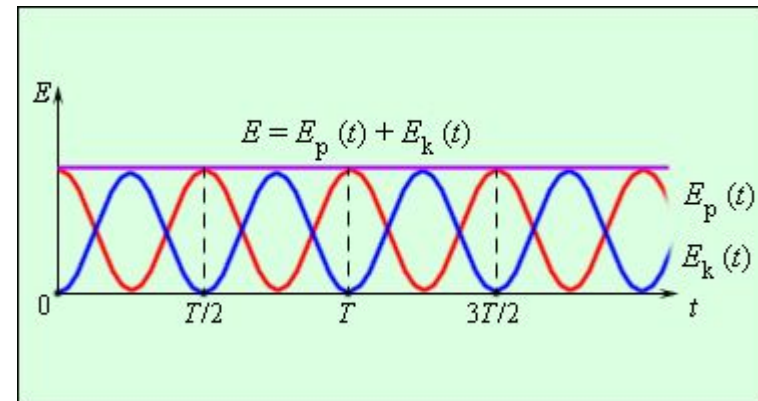
$$U_m = K_m \Rightarrow kx_m^2 = mV_m^2; \quad k = m\omega_0^2 \Rightarrow$$

$$m\omega_0^2 x_m^2 = mV_m^2 \Rightarrow V_m^2 = (x_m \omega_0)^2 \Rightarrow V_m = x_m \omega_0.$$

$$U(t) = U_m/2 + U_m/2 \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0);$$

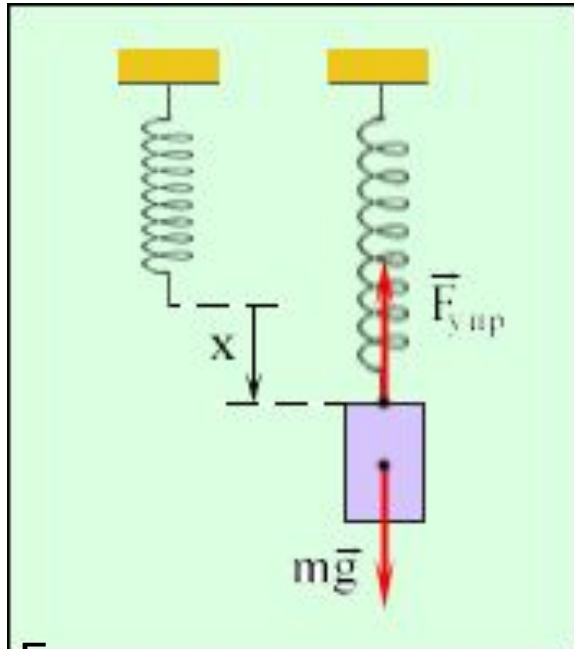
$$K(t) = K_m/2 - K_m/2 \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0);$$

$$K(t) + U(t) = E = K_m = U_m.$$



8. ПРУЖИННЫЙ МАЯТНИК

Маятником называют тело, совершающее колебания под действием силы тяжести.



Рассмотрим систему, состоящую из тела массой m , подвешенного на пружине, массой которой можно пренебречь.

В положении равновесия сила тяжести уравнивается упругой силой $mg = kx_0$. Будем характеризовать смещение шарика из положения равновесия координатой x , причем ось x направим вертикально вниз, а нуль оси совместим с положением равновесия шарика.

Если сместить шарик в положение, характеризуемое координатой x , то удлинение пружины станет равным $x_0 + x$, а проекция результирующей силы примет значение $F_x = mg - k(x_0 + x) = mg - kx_0 - kx \Rightarrow F_x = -kx$.

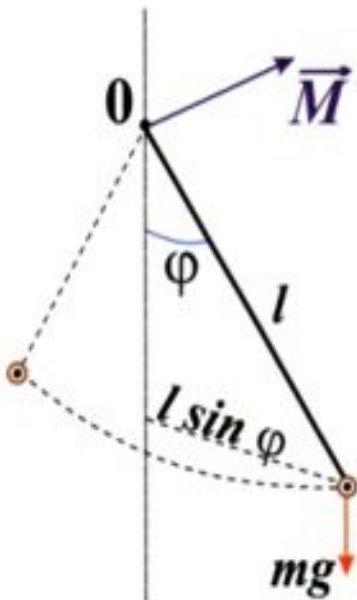
$$ma_x = F_x \Rightarrow \ddot{m}x = -kx \Rightarrow \ddot{m}x + kx = 0 \Rightarrow x + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow$$

$$x = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0); \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad T = 2\pi / \omega_0 = 2\pi \sqrt{m/k}.$$

9. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИКИ

Физический маятник – любое твердое тело, совершающее малые колебания относительно оси, не проходящей через его центр масс.

Математический маятник



$$I \ddot{\varphi} = \overline{M}$$

$$ml^2 \ddot{\varphi} = -mg l \sin \varphi$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

Для малых углов, обозначив

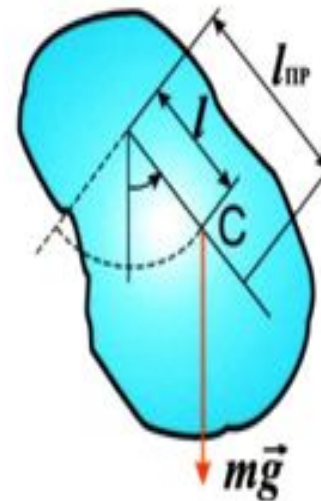
$$\frac{g}{l} = \omega_0^2, \text{ имеем}$$

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$$

Так как $T = 2\pi / \omega_0$, то

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Физический маятник



$$\ddot{\varphi} = -\frac{mgl}{I} \sin \varphi$$

Для малых углов, обозначив

$$\frac{mgl}{I} = \omega_0^2, \text{ имеем}$$

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_{пр}}{g}}$$

Приведенная длина
физического маятника

$$l_{пр} = \frac{I}{ml}$$

$$\varphi = \varphi_m \cos(\omega_0 t + \alpha_0).$$

10. ИДЕАЛЬНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

1

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Колебательный контур

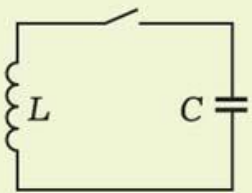


Схема автоколебательного генератора

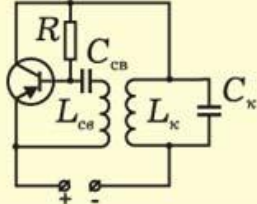
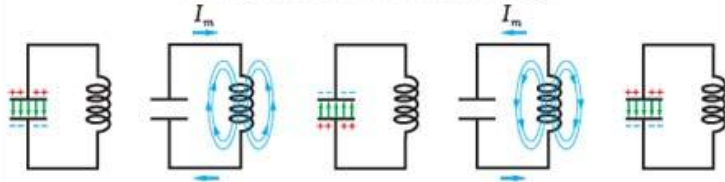
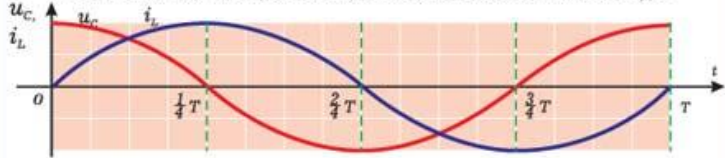


Схема процессов в колебательном контуре



Изменения тока и напряжения при свободных колебаниях в контуре



$$\frac{Cu^2}{2} + \frac{Li^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2}, \quad -Li' = \frac{q}{C}, \quad Lq'' + \frac{q}{C} = 0, \quad q = q_m \cos \omega_0 t$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad T = 2\pi\sqrt{LC} \quad \text{- формула Томсона}$$

Частота и период собственных колебаний в контуре

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}; \quad \varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{q}{C};$$

$$\mathcal{E}_{12} = -\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}; \quad R = 0 \Rightarrow$$

$$0 = -\frac{q}{C} - L \frac{dI}{dt}; \quad I = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{dI}{dt} = \ddot{q} \Rightarrow$$

$$0 = -\frac{q}{C} - L \ddot{q} \Rightarrow \ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0;$$

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0);$$

$$I = \dot{q} = -q_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0);$$

$$I_m = q_m \omega_0;$$

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi_0); \quad U_m = \frac{q_m}{C}.$$