

ОСНОВЫ АРИФМЕТИКИ. ЧИСЛОВЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ. ЧИСЛОВЫЕ РАВЕНСТВА, НЕРАВЕНСТВА.

ОШКМ, 2 КУРС ГРУППА УМ-2-19

2.09.2020

Преподаватель Рябова Н.Ю.

ОСНОВЫ АРИФМЕТИКИ

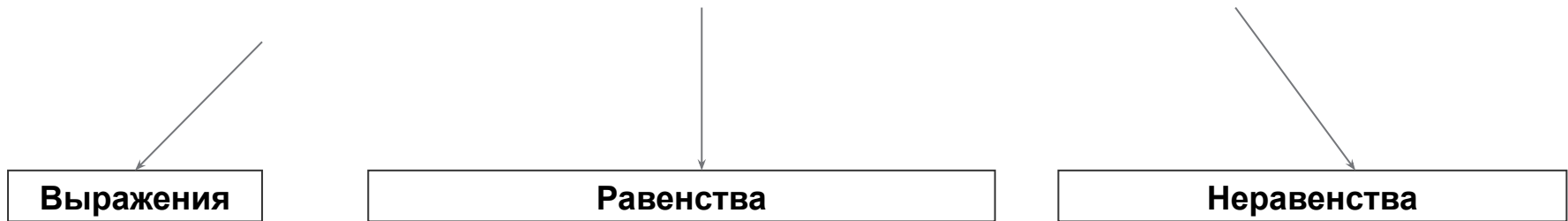
Арифме́тика (др.-греч. ἀριθμητική, arithmētikḗ — от ἀριθμός, arithmós «число») — раздел математики, изучающий числа, их отношения и свойства. Предметом арифметики является понятие числа (натуральные, целые, рациональные, вещественные, комплексные числа) и его свойства. В арифметике рассматриваются измерения, вычислительные операции (сложение, вычитание, умножение, деление) и приёмы вычислений. Изучением свойств отдельных целых чисел занимается высшая арифметика, или теория чисел. Теоретическая арифметика уделяет внимание определению и анализу понятия числа, в то время как формальная арифметика оперирует логическими построениями предикатов и аксиом. Арифметика является древнейшей и одной из основных математических наук; она тесно связана с алгеброй, геометрией и теорией чисел¹

Основные понятия

«Алфавит» математического языка – «буквы» - цифры, знаки действий, знаки равенства и неравенства, скобки, буквы для обозначения переменных

«слова» – набор «букв», имеющий смысл: $3a+8$, $:5^2$ (не имеет смысла набор $8+-$) – выражения

«предложения» – высказывания и предикаты вида $3a+8=6$; >2 (равенства и неравенства)



ВЫРАЖЕНИЯ

Числовые – состоят из чисел, знаков действий, скобок. К ним относят и числа.

Пр. $5 \cdot 3 - 7$; 18 ; ; $(8 + 3) \cdot 2$

Значение числового выражения – число, полученное в результате выполнения указанных действий: $5 \cdot 3 - 7 = 8$

Выражения, не имеющие числового значения, не имеют смысла

Пр. $8 : (2 - 2)$;



РАВЕНСТВА

Числовые – равенства двух числовых выражений (высказывания вида $5 \cdot 3 = 18$; $3 + 6 = 12 - 3$, ...), являются истинными, если значения числовых выражений в левой и правой частях совпадают.

Свойства

$a = b \Rightarrow a + c = b + c$, где $a = b$ – истинное числовое равенство, c – числовое выражение, имеющее смысл

$$a = b \Rightarrow ac = bc$$

Пр. 1. $2 + 5 = 3 + 4 \Rightarrow 2 + 5 + 8 = 3 + 4 + 8$

2. $2 + 5 = 3 + 4 \Rightarrow (2 + 5) \cdot 3 = (3 + 4) \cdot 3$

НЕРАВЕНСТВА

Числовые – образуются из числовых выражений соединенных знаками $>, <$ (высказывания вида $5 \cdot 3 > 12$, < 4)

Свойства

$a >_< b \Rightarrow a + c >_< b + c$, где $a > b (a < b)$ – истинное числовое неравенство, c – числовое выражение, имеющее смысл

$$a >_< b, c > 0 \Rightarrow ac >_< bc$$

$$a >_< b, c < 0 \Rightarrow ac <_> bc$$

Пр. 1. $5 > 3 + 1 \Rightarrow 5 + 2 > 3 + 1 + 2$

2. $5 > 3 \Rightarrow 5 \cdot 2 > 3 \cdot 2$

3. $5 > 3 \Rightarrow 5 \cdot (-2) < 3 \cdot (-2)$

ВЫРАЖЕНИЯ И ИХ ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Наряду с изучением операций и их свойств в алгебре изучают такие понятия, как *выражение, уравнение, неравенство*. Первоначальное знакомство с ними происходит в начальном курсе математики. Вводятся они, как правило, без строгих определений, чаще всего остенсивно, что требует от учителя не только большой аккуратности в употреблении терминов, обозначающих эти понятия, но и знания ряда их свойств. Поэтому главная задача, которую мы ставим, приступая к изучению материала данного параграфа, - это уточнить и углубить знания о выражениях (числовых и с переменными), числовых равенствах и числовых неравенствах, уравнениях и неравенствах.

Изучение данных понятий связано с использованием математического языка, он относится к искусственным языкам, которые создаются, и развиваются вместе с той или иной наукой. Как и любой другой математический язык имеет свой алфавит. В нашем курсе он буде представлен частично, в связи с необходимостью больше внимания уделить взаимосвязи алгебры с арифметикой. В этот алфавит входят:

- 1) цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; с их помощью по специальным правилам записываются числа;
- 2) знаки операций $+$, $-$, $\cdot$, $:$;
- 3) знаки отношений $<$, $>$, $=$, $\neq$;
- 4) строчные буквы латинского алфавита, их применяют для обозначения значений чисел;
- 5) скобки (круглые, фигурные и др.), их называют техническими знаками.

Используя этот алфавит, в алгебре образуют слова, называя их выражениями, а из слов получаются предложения - числовые равенства, числовые неравенства, уравнения, неравенства с переменными.

Как известно, записи $3 + 7$, $24 : 8$, $3 \cdot 2 - 4$, $(25 + 3) \cdot 2 - 17$ называются *числовыми выражениями*. Они образуются из чисел, знаков действий, скобок. Если выполнить все действия, указанные в выражении, получим число, которое называется *значением числового выражения*. Так, значение числового выражения $3 \cdot 2 - 4$ равно 2.

Существуют числовые выражения, значения которых нельзя найти. Про такие выражения говорят, что они *не имеют смысла*.

Например, выражение $8 : (4 - 4)$ смысла не имеет, поскольку его значение найти нельзя: $4 - 4 = 0$, а деление на нуль невозможно. Не имеет смысла и выражение $7 - 9$, если рассматривать его на множестве натуральных чисел, так как на этом множестве значения выражения $7 - 9$ найти нельзя.

Рассмотрим запись $2a + 3$. Она образована из чисел, знаков действий и буквы a . Если вместо a подставлять числа, то будут получаться различные числовые выражения:

если $a = 7$, то $2 \cdot 7 + 3$;

если $a = 0$, то $2 \cdot 0 + 3$;

если $a = -4$, то $2 \cdot (-4) + 3$.

В записи $2a + 3$ такая буква a называется *переменной*, а сама запись $2a + 3$ - *выражением с переменной*.

Переменную в математике, как правило, обозначают любой строчной буквой латинского алфавита. В начальной школе для обозначения переменной кроме букв используются другие знаки, например $\bullet$. Тогда запись выражения с переменной имеет вид: $2 \cdot \bullet + 3$.

Каждому выражению с переменной соответствует множество чисел, при подстановке которых получается числовое выражение, имеющее смысл. Это множество называют *областью определения выражения*.

Например, область определения выражения $5 : (x - 7)$ состоит из всех действительных чисел, кроме числа 7, так как при $x = 7$ выражение $5 : (7 - 7)$ смысла не имеет.

В математике рассматривают выражения, содержащие одну, две и больше переменных.

Например, $2a + 3$ - это выражение с одной переменной, а $(3x + 8y) \cdot 2$ - это выражение с тремя переменными. Чтобы из выражения с тремя переменными получить числовое выражение, надо вместо каждой переменной подставить числа, принадлежащие области определения выражения.

Итак, мы выяснили, как образуются из алфавита математического языка числовые выражения и выражения с переменными. Если провести аналогию с русским языком, то выражения - это слова математического языка.

Но, используя алфавит математического языка, можно образовать и такие, например, записи: $(3 + 2) - \cdot 12$ или $3x - y : +)8$, которые нельзя назвать ни числовым выражением, ни выражением с переменной. Эти примеры свидетельствуют о том, что описание - из каких знаков алфавита математического языка образуются выражения числовые и с переменными, не является определением этих понятий. Дадим определение числового выражения (выражение с переменными определяется аналогично).

Определение. Если f и q - числовые выражения, то $(f) + (q)$, $(f) - (q)$, $(f) \cdot (q)$, $(f) : (q)$ - числовые выражения. Считают, что каждое число является числовым выражением.

Если точно следовать этому определению, то пришлось бы писать слишком много скобок, например, $(7) + (5)$ или $(6) : (2)$. Для сокращения записи условились не писать скобки, если несколько выражений складываются или вычитаются, причем эти операции выполняются слева направо. Точно так же не пишут скобок и тогда, когда перемножаются или делятся несколько чисел, причем эти операции выполняются по порядку слева направо.

Например, пишут так: $37 - 12 + 62 - 17 + 13$ или $120 : 15 - 7 : 12$.

Кроме того, условились сначала выполнять действия второй ступени (умножение и деление), а затем действия первой ступени (сложение и вычитание). Поэтому выражение $(12 - 4 : 3) + (5 - 8 : 2 - 7)$ записывают так: $12 - 4 : 3 + 5 - 8 : 2 - 7$.

Задача. Найти значение выражения $3x(x - 2) + 4(x - 2)$ при $x = 6$.

Решение

1 способ. Подставим число 6 вместо переменной в данное выражение: $3 \cdot 6 - (6 - 2) + 4 \cdot (6 - 2)$. Чтобы найти значение полученного числового выражения, выполним все указанные действия: $3 \cdot 6 - (6 - 2) + 4 \cdot (6 - 2) = 18 - 4 + 4 \cdot 4 = 14 + 16 = 30$. Следовательно, при $x = 6$ значение выражения $3x(x - 2) + 4(x - 2)$ равно 30.

2 способ. Прежде чем подставлять число 6 в данное выражение, упростим его: $3x(x - 2) + 4(x - 2) = (x - 2)(3x + 4)$. И затем, подставив в полученное выражение вместо x число 6, выполним действия: $(6 - 2) \cdot (3 \cdot 6 + 4) = 4 \cdot (18 + 4) = 4 \cdot 22 = 88$. Обратим внимание на следующее: и при первом способе решения задачи, и при втором мы одно выражение заменяли другим.

Например, выражение $18 \cdot 4 + 4 \cdot 4$ заменяли выражением $72 + 16$, а выражение $3x(x - 2) + 4(x - 2)$ - выражением $(x - 2)(3x + 4)$, причем эти замены привели к одному и тому же результату. В математике, описывая решение данной задачи, говорят, что мы выполняли **тождественные преобразования** выражений.

Определение. Два выражения называются **тождественно равными**, если при любых значениях переменных из области определения выражений их соответственные значения равны.

Примером тождественно равных выражений могут служить выражения $5(x + 2)$ и $5x + 10$, поскольку при любых действительных значениях x их значения равны. Если два тождественно равных на некотором множестве выражения соединить знаком равенства, то получим предложение, которое называют **тождеством** на этом множестве.

Так, заменив выражение $5(x + 2)$ на тождественно равное ему выражение $5x + 10$, мы выполнили тождественное преобразование первого выражения. Но как, имея два выражения, узнать, являются они тождественно равными или не являются? Находить соответствующие значения выражений, подставляя конкретные числа вместо переменных? Долго и не всегда возможно. Но тогда каковы те правила, которыми надо руководствоваться, выполняя тождественные преобразования выражений? Этих правил много, среди них - свойства алгебраических операций.

Задача. Разложить на множители выражение $ax - bx + ab - b^2$.

Решение. Сгруппируем члены данного выражения по два (первый со вторым, третий с четвертым): $ax - bx + ab - b^2 = (ax - bx) + (ab - b^2)$. Это преобразование возможно на основании свойства ассоциативности сложения действительных чисел.

Вынесем в полученном выражении из каждой скобки общий множитель: $(ax - bx) + (ab - b^2) = x(a - b) + b(a - b)$ - это преобразование возможно на основании свойства дистрибутивности умножения относительно вычитания действительных чисел.

В полученном выражении слагаемые имеют общий множитель, вынесем его за скобки: $x(a - b) + b(a - b) = (a - b)(x + b)$. Основой выполненного преобразования является свойство дистрибутивности умножения относительно сложения. Итак, $ax - bx + ab - b^2 = (a - b)(x + b)$.

В начальном курсе математики выполняют, как правило, только тождественные преобразования числовых выражений. Теоретической основой таких преобразований являются свойства сложения и умножения, различные правила: прибавления суммы к числу, числа к сумме, вычитания числа из суммы и др.

Например, чтобы найти произведение $35 \cdot 4$, надо выполнить преобразования: $35 \cdot 4 = (30 + 5) \cdot 4 = 30 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = 120 + 20 = 140$. В основе выполненных преобразований лежат: свойство дистрибутивности умножения относительно сложения; принцип записи чисел в десятичной системе счисления ($35 = 30 + 5$); правила умножения и сложения натуральных чисел.

Спасибо!
Задания для выполнения на следующем
уроке.

