Получение схемы логического элемента по итоговым значениям логической функции с использованием СДНФ или СКНФ

Определения:

- **Конъюнкция – логическое умножение.**
- **Элементарной конъюнкцией** называется конъюнкция нескольких переменных, взятых с отрицанием или без отрицания, причем среди переменных могут быть одинаковые:
  $\neg C \wedge C$;
  $C \wedge \neg A$;
  $\neg C \wedge B \wedge \neg A$;
- **Дизъюнкция –логическое сложение.**
- **Элементарной дизъюнкцией** называется дизъюнкция нескольких переменных, взятых с отрицанием или без отрицания, причем среди переменных могут быть одинаковые:
  $\neg C V C$;
  $C V \neg A$;
  $\neg C V B V \neg A$;

ДНФ и КНФ

- Всякую дизъюнкцию элементарных конъюнкций назовем **дизъюнктивной нормальной формой** (ДНФ): $(C \wedge C \wedge \neg B) \vee (\neg C \wedge A)$
- Всякую конъюнкцию элементарных дизъюнкций назовем **конъюнктивной нормальной формой** (КНФ): $(C \vee C \vee \neg B) \wedge (\neg C \vee A)$

СКНФ и СДНФ

- **Совершенной ДНФ** называется ДНФ, в которой нет одинаковых элементарных конъюнкций и все конъюнкции состоят из одного и того же набора переменных, в который каждая переменная входит только один раз (возможно с отрицанием)
  (C ∧ B ∧ ¬A)∨ (C ∧ B ∧ A)

- **Совершенной КНФ** называется КНФ, в которой нет одинаковых элементарных дизъюнкций и все дизъюнкции состоят из одного и того же набора переменных, в который каждая переменная входит только один раз (возможно с отрицанием)
  (¬ C∨B∨A) ∧(C ∨¬B∨A)

Алгоритм получения СДНФ по таблице истинности:

Дана таблица итоговых значений логической функции

F(A,B,C)
1
0
1
0
1
0
0
0

1. Записываем исходные значения логических переменных.
2. Применяем СДНФ (так как значений «1» меньше):
3. Обрабатываем те строки ТИ, в последнем столбце которых стоят «1»
4. Выписываем для каждой отмеченной строки конъюнкцию все переменных следующим образом: если значение логической переменной в данной строке =1, то в конъюнкцию включают саму эту переменную, если =0, то ее отрицание:
5. Все полученные конъюнкции связать в дизъюнкцией (записат произведение сумм):
6. Упрощаем логическое выражение, применяя законы алгебры логики
   - Склеивания
   - Распределительный
   - Поглощения

A	B	C	F(A,B,C)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

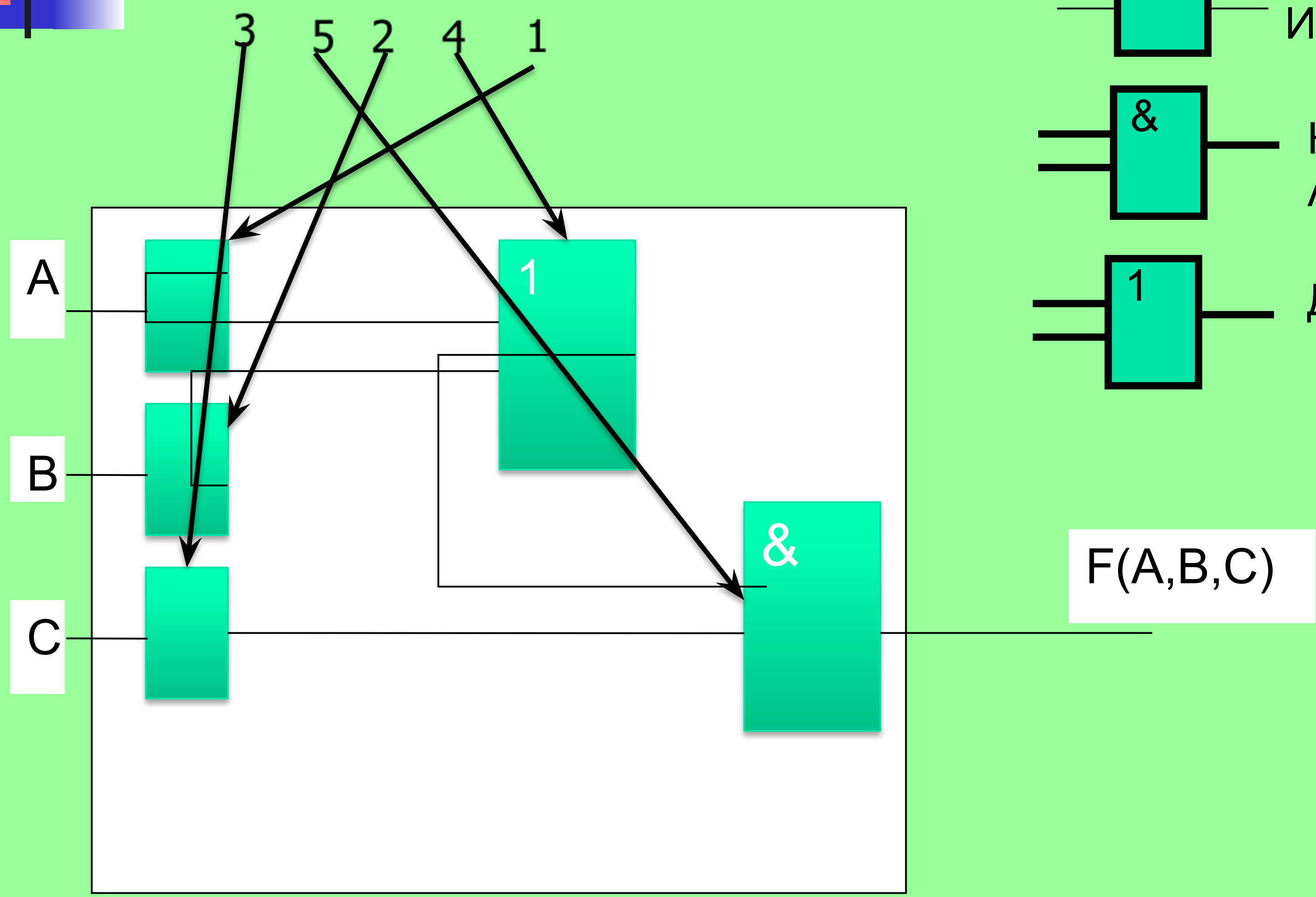
- Записываем СДНФ
- $(\neg a \wedge \neg \text{в} \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \text{в} \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg \text{в} \wedge \neg c) =$

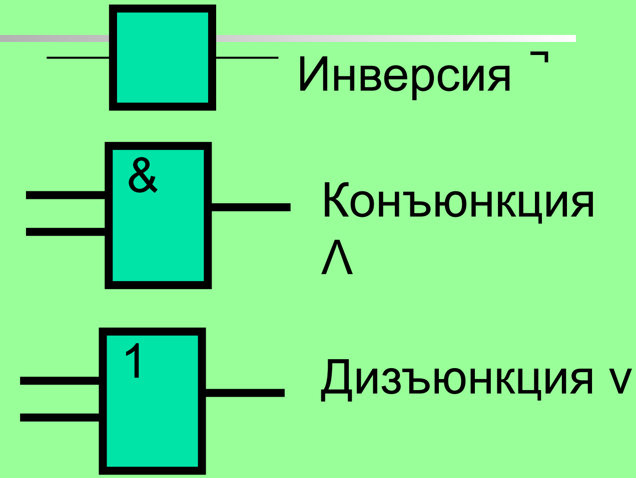
- 1) Применяем закон склеивания к 1-му и 3-му выражениям $(\neg \text{а} \wedge \neg \text{в} \wedge \neg \text{с}) \vee (\neg \text{а} \wedge \text{в} \wedge \neg \text{с}) \vee (\text{а} \wedge \neg \text{в} \wedge \neg \text{с}) =$
- 2) Применяем распределительный закон $(\neg \text{в} \wedge \neg \text{с}) \vee (\neg \text{а} \wedge \text{в} \wedge \neg \text{с}) =$
- 3) Применяем закон поглощения $\neg \text{с} \wedge (\neg \text{в} \vee (\neg \text{а} \wedge \text{в})) = \neg \text{с} \wedge (\neg \text{в} \vee (\neg \text{а}))$
- 4) Проставляем на полученной формуле порядок выполнения логических операций согласно приоритета
- $\neg \text{с} \wedge (\neg \text{в} \vee (\neg \text{а}))$

3 5 2 4 1

изображаем каждую операцию на схеме логического элемента по порядку, заменяя операции соответствующим значком:

- ¬с Λ(¬в V(¬а))





Алгоритм получения СКНФ по таблице истинности:

(В случае если среди значений функции значений «0»меньше, применяют СКНФ)

- Отметить те строки таблицы истинности, в последнем столбце которых стоят 0:
- Выписать для каждой отмеченной строки дизъюнкцию всех переменных следующим образом: если значение некоторой переменной в данной строке =0, то в дизъюнкцию включают саму эту переменную, если =1, то ее отрицание:
- Все полученные дизъюнкции связать в конъюнкцию(записать сумму произведений):
- Упростить логическое выражение, применив законы
  - Склеивания
  - Распределительный
  - Поглощения
- (Предлагается выполнить самостоятельно)

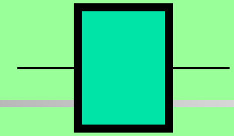
Задания: построить схемы логических элементов, реализующих заданные логические функции

1 вариант	2 вариант	3 вариант	4. Вариант	5. Вариант	6. Вариант	7. Вариант
F(A,B,C)	F(A,B,C)	F(A,B,C)	F(A,B,C)	F(A,B,C)	F(A,B,C)	F(A,B,C)
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0	0

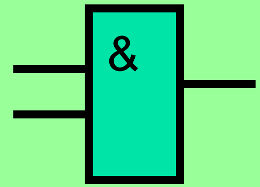
Законы алгебры логики:

Закон двойного отрицания	1	$a \equiv \bar{\bar{a}}$	Двойное отрицание исключает отрицание.
Переместительный (коммутативный) закон	2	$a \vee b \equiv b \vee a$	Для логического сложения
	3	$a \wedge b \equiv b \wedge a$	Для логического умножения
Сочетательный (ассоциативный) закон:	4	$(a \vee b) \vee c \equiv a \vee (b \vee c) \equiv a \vee b \vee c$	Для логического сложения
	5	$(a \wedge b) \wedge c \equiv a \wedge (b \wedge c) \equiv a \wedge b \wedge c$	Для логического умножения
Распределительный (дистрибутивный) закон	6	$(a \vee b) \wedge c \equiv (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$	Для логического сложения
	7	$(a \wedge b) \vee c \equiv (a \vee c) \wedge (b \vee c)$	Для логического умножения
Закон общей инверсии (законы де Моргана)	8	$\overline{a \vee b} \equiv \bar{a} \wedge \bar{b}$	Для логического сложения
	9	$\overline{a \wedge b} \equiv \bar{a} \vee \bar{b}$	Для логического умножения
Закон идемпотентности	10	$a \vee a \equiv a$	Для логического сложения
	11	$a \wedge a \equiv a$	Для логического умножения
Законы исключения констант	12	$a \vee 1 \equiv 1$	Для логического сложения
	13	$a \vee 0 \equiv a$	
	14	$a \wedge 1 \equiv a$	Для логического умножения
	15	$a \wedge 0 \equiv 0$	
Закон противоречия	16	$a \wedge \bar{a} \equiv 0$	Для логического умножения
Закон исключающего третьего	17	$a \vee \bar{a} \equiv 1$	Для логического сложения
Закон поглощения	18	$a \vee (a \wedge b) \equiv a$ $\quad a \vee (\bar{a} \wedge b) \equiv a \vee b$	Для логического сложения
	19	$a \wedge (a \vee b) \equiv a$ $\quad a \wedge (\bar{a} \vee b) \equiv a \wedge b$	Для логического умножения
Закон исключения (склеивания)	20	$(a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge b) \equiv b$	Для логического сложения
	21	$(a \vee b) \wedge (\bar{a} \vee b) \equiv b$	Для логического умножения
Закон контрапозиции (правило перевертывания)	22	$a \to b \equiv \bar{b} \to \bar{a}$	
	23	$a \to b \equiv \bar{a} \vee b$	
	24	$a \leftrightarrow b \equiv (a \to b) \wedge (b \to a)$	

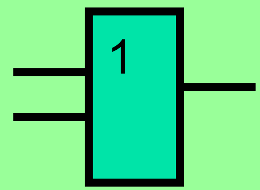
Логические операции в порядке приоритета



Инверсия ¬



Конъюнкция Λ



Дизъюнкция v

Домашнее задание

- Анализ и упрощение логической схемы:
  - Нарисовать схему логического элемента с тремя логическими входами (X,Y,Z), содержащую не менее семи логических операций.
  - Построить таблицу истинности к ней. Применить СКНФ или СДНФ.
  - Упростить по приведенному в презентации алгоритму.
  - Построить новую схему.

Ключ для проверки:

1. $C \vee (B \wedge \neg A)$
2. $C \wedge (\neg B \vee \neg A)$
3. $\neg C \wedge (\neg B \vee A)$
4. $\neg A \wedge (B \vee \neg C)$
5. $\neg B \wedge (C \vee \neg A)$
6. $\neg B \vee (C \wedge \neg A)$
7. $\neg A \vee (B \wedge \neg C)$