ЛЕКЦИЯ 5.
« *МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СХЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ. ЧАСТЬ 2* »

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ

ПЛАН ЗАНЯТИЯ:

- Типовые математические схемы
- Дискретно-стохастические модели. Примеры
- Дискретно-стохастические модели. Определение P-автомата
- Пример P-автомата
- Частные случаи P-автоматов
- Непрерывно-стохастические модели (Q- схемы)
- Системы массового обслуживания. Основные понятия
- Классификация и терминология систем массового обслуживания
- СМО как непрерывно-стохастическая модель

ТИПОВЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СХЕМЫ

- На первоначальных этапах исследования системы рационально использовать ***типовые математические схемы***:
  - Дифференциальные уравнения (интегральные, интегро-дифференциальные)
    - детерминированные модели
    - системы, функционирующие в непрерывном времени
    - не учитываются случайные факторы
  - Конечные и вероятностные автоматы, конечно-разностные схемы
    - для систем, функционирующих в дискретном времени
    - могут учитываться случайные (стохастические) факторы
  - **С**истемы **м**ассового **о**бслуживания (СМО)
    - Стохастические модели с непрерывным временем
  - Сети Петри и пр.

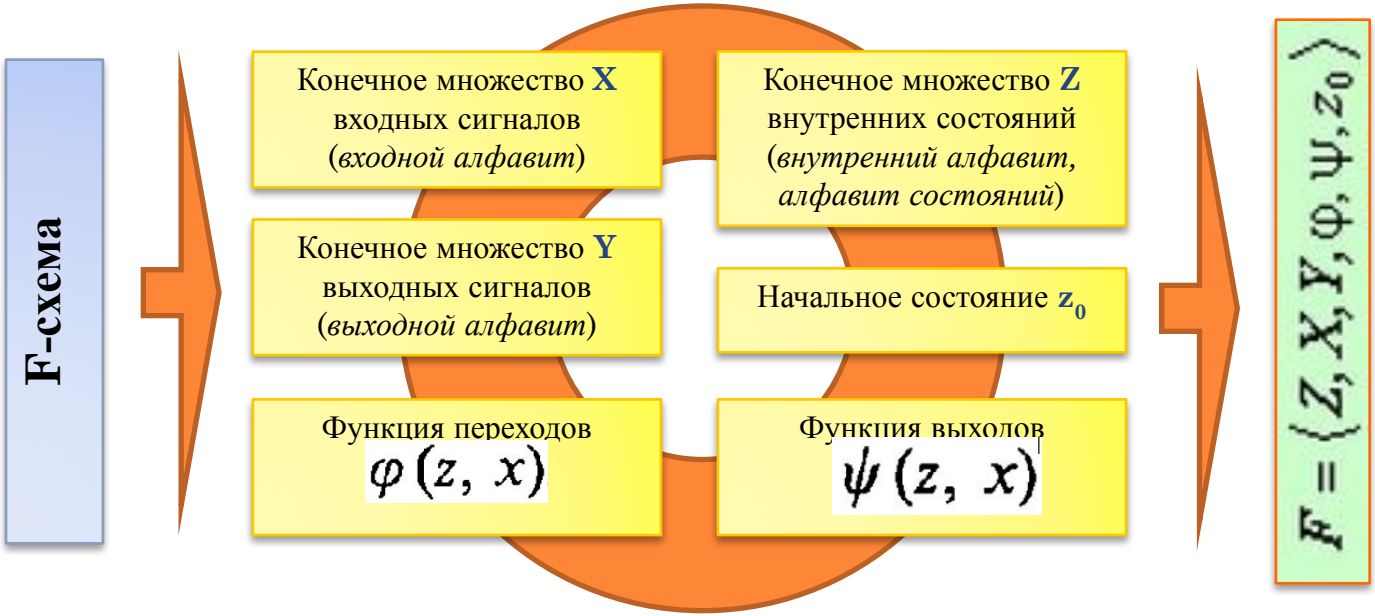
Заключение:

При построении математических моделей процессов функционирования систем можно выделить следующие основные подходы:

- *Непрерывно-детерминированный*
- *Дискретно-детерминированный*
- *Дискретно-стохастический*
- *Непрерывно-стохастический*
- *Обобщенный (универсальный, агрегативные системы)*

КОНЕЧНЫЕ АВТОМАТЫ

Конечный автомат можно представить как математическую схему (**F-схему**), характеризующуюся шестью элементами:



Автомат функционирует ***в дискретном автоматном времени***, задаваемом **тактами**.

Алгоритм работы автомата:

- В начальный момент времени в состоянии $\mathbf{z_0}$. В произвольный момент времени – в состоянии $\mathbf{z(t)}$
- При сигнале $\mathbf{x(t)}$ на входе, выдает на выход и переходит в состояние

$$y(t) = \psi[z(t), x(t)]$$

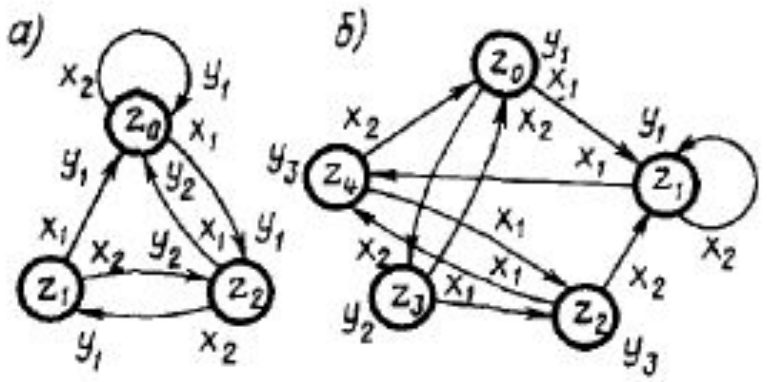
$$z(t+1) = \varphi[z(t), x(t)]$$

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

Описание при помощи направленного графа

Граф представляет собой **набор вершин**, соответствующих различным состояниям автомата, **и дуг**, отражающих тот или иной переход между состояниями.

x_i	z_k		
	z_0	z_1	z_2
Переходы			
x_1 x_2	z_2 z_0	z_0 z_2	z_0 z_1
Выходы			
x_1 x_2	y_1 y_1	y_1 y_2	y_2 y_1



x_i	y				
	y_1	y_1	y_3	y_2	y_3
	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1 x_2	z_1 z_3	z_4 z_1	z_4 z_1	z_2 z_0	z_2 z_0

X - входные сигналы

Y - выходные сигналы

Z - внутренние состояния

$\varphi(z, x)$ -функция переходов

$\psi(z, x)$ - функция выходов

СХЕМЫ)

Примеры Дискретно-стохастических систем:

- Игральные автоматы
- Датчики системы охраны
- Система сортировки готовой продукции на конвейере, чемоданов на транспортировочной ленте в аэропорту и пр.
- Еще примеры?...

X - входные сигналы

Y - выходные сигналы

Z - внутренние состояния

$\varphi(z, x)$ -функция переходов

$\psi(z, x)$ - функция выходов

В чем отличия дискретно-стохастических моделей от дискретно-детерминированных?...

Введем понятие *вероятностного автомата* (англ. **P**robabilistic automat) – **P**-автомата (**P**-схемы):

Пусть G – множество, элементами которого являются всевозможные пары (x_i,z_j) (*вспомнить пример со львом*). Пусть Φ – множество всевозможных пар вида (z_k,y_j). Потребуем, чтобы любой элемент множества G индуцировал на множестве Φ некоторый закон распределения вида:

Элементы из Φ	⋯	(z_1, y_1)...	(z_1, y_2)...	⋯	(z_K, y_{J-1})	(z_K, y_J)
(x_i, z_k)	⋯	b_{11}	b_{12}	⋯	$b_{K(J-1)}$	b_{KJ}

При этом $\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J} b_{kj}=1$, где b_{kj} – вероятность перехода автомата в состояние z_k и появления на выходе сигнала y_i, если он был в состоянии z_k и на его вход поступил x_i

Обозначим множество таких таблиц через B.

Четверка элементов P=<Z, X, Y, B> называется *вероятностным автоматом* (P-автоматом)

ПРИМЕР Р-АВТОМАТА

- Рассмотрим модель работы оператора-контролера какой-либо системы за пультом управления…

Имеется:

1. *световой индикатор 1 (перед глазами)*
2. *световой индикатор 2 (на периферии)*
3. *сирена*

Состояние оператора:

1. *бодрый*
2. *усталый*

Реакция на сигнал

1. *правильная*
2. *ошибочная*

X - входные сигналы

Y - выходные сигналы

Z - внутренние состояния

$\varphi(z, x)$ -функция переходов

$\psi(z, x)$ - функция выходов

Всевозможные пары:

1-1 2-1 3-1 1-2 2-2 3-2 - множество ***G***

Тогда:

Элементы из *Ф*	*бодрый-правильная*	*бодрый-ошибочная*	*усталый-правильная*	*усталый-ошибочная*
1-1	0,4	0,2	0,3	0,1
2-1	0,35	0,25	0,25	0,15
…	…	…	…	…
2-2	0	0	0,15	0,75
3-2	?	?	?	?

СХЕМЫ)

- ***P-автомат*** можно представить в виде:

Элементы из Y	$\cdots$	y_1	y_2	$\cdots$	y_{J-1}	y_J
(x_i, z_s)	$\cdots$	q_1	q_2	$\cdots$	q_{J-1}	q_J
Элементы из Z	$\cdots$	z_1	z_2	$\cdots$	z_{K-1}	z_K
(x_i, z_s)	$\cdots$	z_1	z_2	$\cdots$	z_{K-1}	z_K

При этом $\sum_{k=1}^{K} z_k = 1 \quad \sum_{k=1}^{J} q_k = 1,$

где z_k *и* q_k – вероятность перехода Р-автомата в состояние z_k и появления на выходе сигнала y_i, при условии, что автомат находился в состоянии z_j и на его вход поступил x_i

Если для всех элементов выполняется соотношение $q_k z_i = b_{kj}$, P-автомат называется ***вероятностным автоматом Мили***.

Указанное требование – **выполнение условий независимости распределений** для нового состояния *Р-автомата* и его выходного сигнала (теорема умножения вероятностей независимых испытаний в статистике)

По аналогии можно ввести понятие ***вероятностного автомата Мура*** (выходной сигнал зависит только от состояния z_k):

Элементы из Y	$\cdots$	y_1	y_2	$\cdots$	y_{K-1}	y_K
z_K	$\cdots$	s_1	s_2	$\cdots$	s_{I-1}	s_I

$$\sum_{i=1}^{I} s_i = 1, \qquad z_k s_i = b_{ki}$$

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ Р-АВТОМАТОВ

- Частным случаем Р-автомата являются автоматы, у которых либо переход в новое состояние, либо выходной сигнал **определяются детерминированно**.

- Если **выходной сигнал** Р-автомата определяется детерминированно, то такой автомат называется **Y-детерминированным вероятностным автоматом** (пример: *охранная система, подающая сигнал тревоги на сирену*).

- Аналогично, **Z-детерминированным вероятностным автоматом** называется Р-автомат, у которого выбор **нового состояния** является **детерминированным** (пример: *стрельба орудия с ограниченным боезапасом по различным целям. Можно ли такую систему описать автоматом Мили?*)

Свои примеры?....

X - входные сигналы

Y - выходные сигналы

Z - внутренние состояния

$\varphi(z, x)$ -функция переходов

$\psi(z, x)$ - функция выходов

НЕПРЕРЫВНО-СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ (Q- СХЕМЫ)

- Пример процесса - *стрельба из орудия по мишени (параметры наводки и координата попадания – непрерывные величины)*

- Краткий экскурс в **Системы Массового Обслуживания** (**СМО**) (англ. ***Queueing system***) – ***Q-схемы***.

X - входные сигналы

Y - выходные сигналы

Z - внутренние состояния

$\varphi(z, x)$ -функция переходов

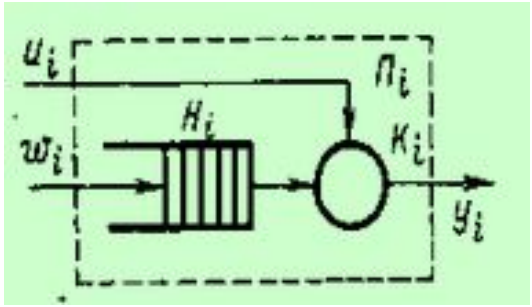
$\psi(z, x)$ - функция выходов

СМО предназначены для формализации процессов обслуживания.

Примеры СМО: *обслуживание в магазине в торговом зале и на кассах; проезд перекрестка на светофоре; учет товара на складе; работа маршрутизаторов в глобальных компьютерных сетях; шлюзование судов; выполнение задач процессором* и пр.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СМО

- В основе системы массового обслуживания лежит **понятие прибора**, который может выполнять конечное множество операций.



выполняет заявку («занят»)

ждет - прибор «свободен»

Прибор:

H_i -*накопитель заявок* **,** в котором может одновременно находиться L_i заявок;

L_i - *емкость* i-го накопителя;

K_i - *канал обслуживания* заявок (или просто канал);

Потоки событий:

u_i - *поток обслуживаний* на входе канала (интервалы времени между началом и окончанием обслуживания);

w_i - *поток заявок* на входе i-го накопителя (интервалы времени между моментами появления заявок);

y_i - *выходной поток* заявок (обработанных или снятых) (интервалы времени между моментами выхода заявок).

КЛАССИФИКАЦИЯ И ТЕРМИНОЛОГИЯ СМО

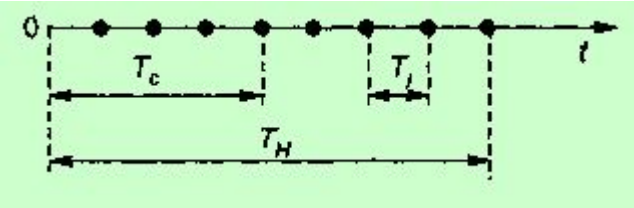
- Поток событий называется **однородным**, если он характеризуется только моментами поступления этих событий

задается:

- последовательностью $\{t_n\} = \{0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \ldots \leqslant t_n \leqslant \ldots\}$
- промежутками времени $\tau_n = t_n - t_n - t_{n-1},\ n \geqslant 1,\ t_0 = 0,$

- Поток называется **неоднородным**, если он характеризуется моментами поступления событий и их признаками (*есть приоритеты*)

КЛАССИФИКАЦИЯ И ТЕРМИНОЛОГИЯ СМО



- **Интенсивность потока событий** – это среднее число событий, приходящееся на единицу времени

$$\lambda = \frac{N}{T_н}$$

  - N- число событий, произошедших за время наблюдения $T_н$;
  - T_j - интервал между событиями;
  - T_c - момент совершения события.

Поток событий ***детерминированный*** - интервал между событиями T_j постоянен или определен по какой-то формуле.

Поток событий ***случаен*** - если интервал между событиями - есть случайная величина.

МОДЕЛЬ

Процесс функционирования прибора обслуживания $П_i$ можно представить как **процесс изменения состояний его элементов во времени** $z_i(t)$.

Переход в новое состояние для $П_i$ означает изменение количества заявок, которые в нем находятся (в канале $К_i$, и в накопителе $Н_i$). Таким образом, **вектор состояний** для $П_i$ имеет вид

$$z_i = (z_i^H, z_i^K)$$

где z_i^H — **состояние накопителя :**

- =0 — накопитель пуст,
- z_i^H =1 —в накопителе имеется одна заявка,
- = L_i — накопитель полностью заполнен,

L_i - емкость накопителя , измеряемая числом заявок, которые в нем могут поместиться;

z_i^K — **состояние канала** :

- = 0 — канал свободен,
- z_i^K = 1 — канал занят.

***Сети массового обслуживания, или Q-схемы*, -** композиции многих элементарных приборов обслуживания для формализации **СМО**.

ССЫЛКА НА РЕСУРС

http://yadi.sk/d/DkzYhU6Q9nGs7

Советов Б.Я., Яковлев С.А. **Моделирование систем**