Скалярное произведение векторов

Определение

Скалярным произведением векторов

называется

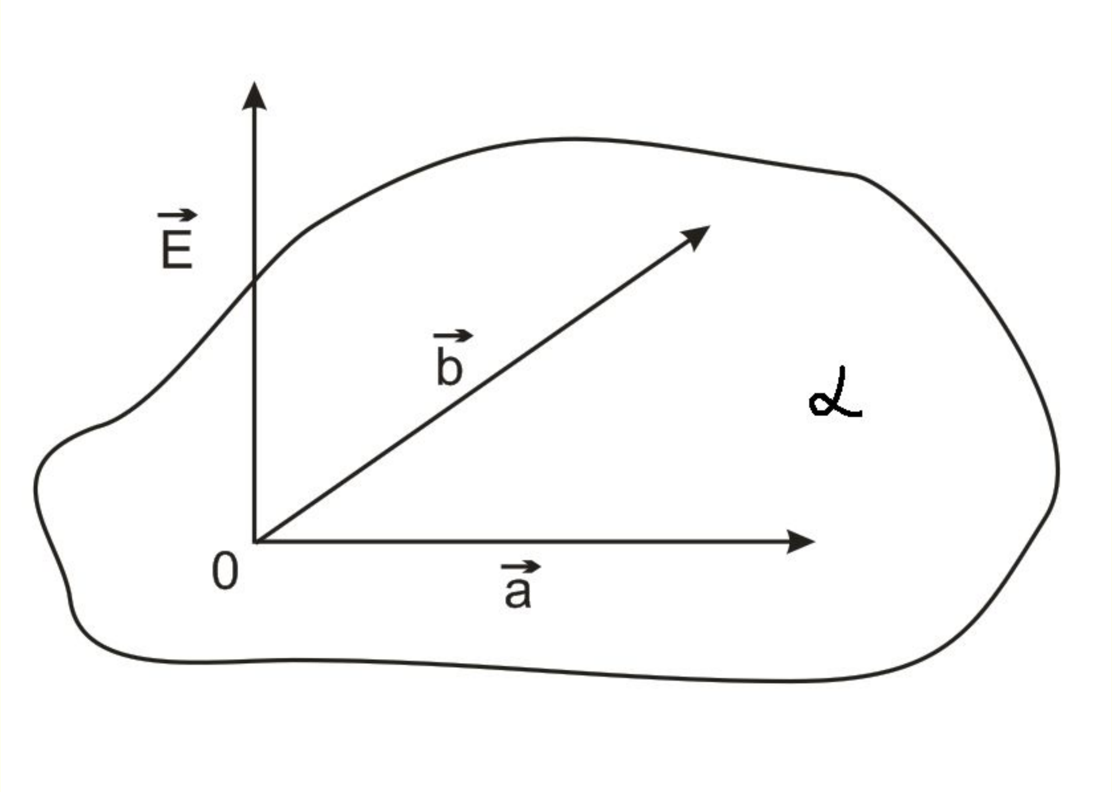
число, равное произведению длин этих векторов

на косинус угла между ними

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a}\wedge\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot Пр_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\cdot Пр_{\vec{b}}\vec{a}$$

Векторное произведение векторов

Пусть вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими геометрическими моделями



Векторное произведение векторов

Определение

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется новый вектор $\vec{E} = \vec{a} \times \vec{b}$, который:

1. $\vec{E} \perp \vec{a} \times \vec{b}$ и плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

2. имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах, $|\vec{E}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$ где $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$

3. $\vec{E}$ направлен так, что если смотреть с его конца, то поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ по кратчайшему углу виден против часовой стрелки

Векторное произведение векторов

Обозначение векторного произведения

$$\vec{a}\times\vec{b} \text{ или } \left[\vec{a},\vec{b}\right]$$

Свойства векторного произведения

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$$

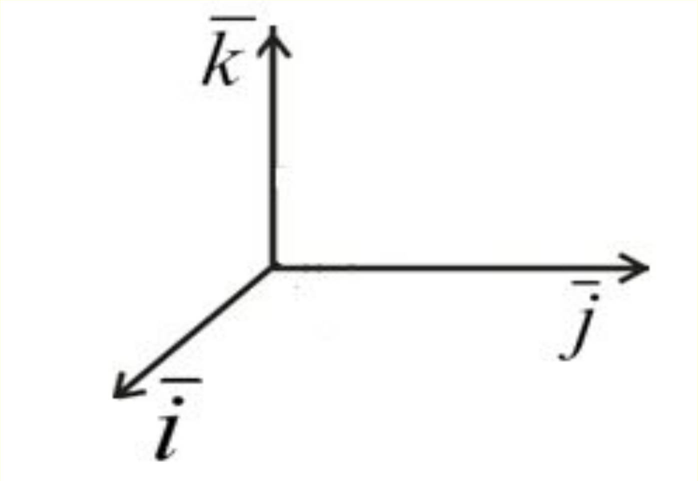
$$\vec{a}\times\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}\,//\,\vec{b}$$

$$\forall\vec{a},\vec{b},\lambda \quad \lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \left(\lambda\vec{a}\right)\times\vec{b} = \vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}\right)$$

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$$

Векторное произведение векторов

Соотношения между ортами



$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0} \qquad \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k} \qquad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k} \qquad \vec{j}\times\vec{j}=\vec{0} \qquad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$$

$$\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j} \qquad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i} \qquad \vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$$

Векторное произведение векторов

Пусть заданы два вектора

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \qquad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

Выражение векторного произведения через координаты

$$\vec{a}\times\vec{b} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right)\times\left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\cdot\vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\cdot\vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\cdot\vec{k}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Векторное произведение векторов

$$\vec{a} \,//\, \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

$$S = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right|$$ **- площадь параллелограмма**

$$S = \frac{1}{2} \left| \vec{a} \times \vec{b} \right|$$ **- площадь треугольника**

Смешанное произведение векторов

Рассмотрим произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, составленное следующим образом:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$$

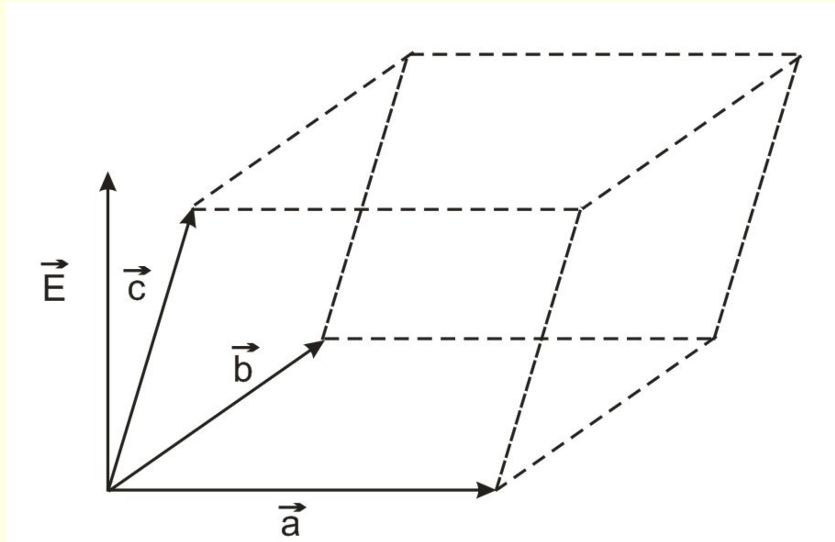
Первые два вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ перемножаются векторно а их результат скалярно умножается на вектор $\vec{c}$

Такое произведение называется смешанным произведением векторов

ОБОЗНАЧЕНИЕ $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$

В результате смешанного произведения получается число

Геометрический смысл смешанного произведения векторов



$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{E}\cdot\vec{c}=\left|\vec{E}\right|\cdot \text{ïð}_{\vec{E}}\,\vec{c}=V_{\text{ïàð}-\text{äà}}$$

Смешанное произведение трех векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах

$$\boxed{V_{\text{ïàð}-\text{äà}}=\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|}$$

Свойства смешанного произведения векторов

Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке его сомножителей

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}$$

Смешанное произведение не меняется при перемене местами скалярного умножения

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$$

Свойства смешанного произведения векторов

Если $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$, то $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - компланарны

Выражение смешанного произведения через координаты

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$