

Численное интегрирование

Цель – приближенно вычислить определенный интеграл: $I = \int_a^b f(x)dx$
на $[a, b]$.

По теореме Ньютона – Лейбница он равен разности верхнего и нижнего пределов первообразной функции $f(x)$ - $F(x)$ ($F'(x) = f(x)$). Но для табличных функций их первообразная не существует и даже для известных $f(x)$ не всегда представима в виде комбинаций элементарных функций.

Интеграл геометрически равен площади криволинейной трапеции.

В численных методах интеграл ищется в виде квадратуры:

$\tilde{I} = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$. Необходимо найти оптимальным образом A_i и x_i . Обычно

коэффициенты подбираются так, чтобы квадратура давала точное значение для полинома максимально возможной степени.

Метод Ньютона – Котеса

Предполагается, что значения аргументов известны и расположены равномерно с шагом h . Требуется найти коэффициенты A .

Рассмотрим интервал: $[\xi_0, \xi_n]$, $\xi_i = \xi_0 + hi$.

На интервале $[\xi_0, \xi_n]$ заменим $f(x)$ интерполяционным полиномом Лагранжа (2.1.1), подставляя в него переменную q , равную:

$$q = \frac{\xi - \xi_0}{h} \left(h = \frac{b-a}{n} \right), \text{ получим } P_r(q) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \prod_{j=0, j \neq i}^n [q - j],$$

где штрих означает отсутствие в произведении сомножителя с $j=i$

$$\int_{\xi_0}^{\xi_n} f(\xi) d\xi \approx \int_{\xi_0}^{\xi_n} P_n(\xi) d\xi = \sum_{i=0}^n y_i A_i$$

коэффициенты A_i равны:

$$A_i = \frac{b-a}{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{(q-i)} dq = (b-a) H_i,$$

где H_i не зависящие от интервала $[a, b]$ – коэффициенты Котеса.

В дальнейшем рассматривается равномерная сетка узлов с шагом h .

• Метод прямоугольников.

- Степень полинома $n = 0$. Коэффициент Котеса (4.1.1) при $n = 0$ (вычисляется как предельный переход при) равен 1. Интервал неопределен, т.к. есть только одна точка - . Геометрически это обозначает, что $f(x)$ заменяется на интервале каким-то значением ординаты. Если интервал $[a, b]$ велик, то его разбивают точками на n интервалов и на каждом применяют метод прямоугольников. Для первого интервала приближенное значение интеграла равно , где .

- В качестве обычно применяют:
- - метод левых прямоугольников;
- - метод правых прямоугольников,
- $x_1 - h/2$ – метод прямоугольников со средней точкой.
- На [] повторяют ту же процедуру и результат суммируют

- $$I_{л.п.} = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \quad I_{п.п.} = h \cdot \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

$$I_{ср..т.} = h \cdot \sum_{i=1}^n f(x_i - h/2)$$

Погрешность методов

Погрешность метода на интервале длиной h равна: $R(h) = \int_x^{x+h} f(t)dt - f(x)h$

разлагая подынтегральную функцию в ряд Тейлора, получим:

$$R(h) = \int_x^{x+h} (f(x) + f'(x)(t-x))dt - f(x)h = f'(x)\frac{h^2}{2}, \quad \theta \in [x, x+h].$$

Абсолютная погрешность на n интервалах суммируется. В результате,

учитывая, что $h = \frac{(b-a)}{n}$ получим: $|I - I_{np}| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} M_1$, где

$$M_1 = \max |f'(x)|.$$

• • Погрешность методов

- Погрешность метода на интервале длиной h равна: разлагая подынтегральную функцию в ряд Тейлора, получим: , . Абсолютная погрешность на n интервалах суммируется. В результате, учитывая, что получим: , где .
- Прямоугольник со средней точкой:

$$R(h) = \int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} (f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{1}{2}f''(x) \cdot (t-x)^2) dt - h \cdot f(x) = \frac{1}{24} h^3 f''(x)$$

- Абсолютная погрешность на n интервалах суммируется. В результате,

$$\bullet \text{ учитывая, что получим: } |I - I_{\text{ср.т.}}| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} M_2$$

- $M_2 = \max |f''(x)|$. Тол есть это метод с повышенной точностью.

Метод трапеций

На частичном интервале функция заменяется линейной, т.е. $n=1$.

$$H_0 = \int_0^1 (q-1) dq = \frac{1}{2}, H_1 = \int_0^1 q dq = \frac{1}{2}. \text{ На интервале } |x_i, x_{i+1}|, \text{ заменяя } f(x)$$

на $P_1(x)$, получим для равноотстоящих узлов: $I = h(f_i + f_{i+1})/2$. То есть, площадь криволинейной трапеции заменена площадью прямоугольной трапеции.

Суммируя по всем интервалам, приходим к выражению:

$$I_{mp} = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (f_i + f_{i+1}), \text{ в котором внутренние ординаты встречается}$$

дважды. Окончательно получим:

$$I_{mp} = ((f(a) + f(b))/2 + \sum_{i=1}^{n-1} f_i)h.$$

Между методом трапеций и методом прямоугольников существует простая связь:

$$I_{mp} = \frac{I_{л.н.} + I_{п.н.}}{2}$$

Погрешность метода:

$$R = \int_x^{x+h} f dx - \frac{h}{2}(f(x) + f(x+h)),$$

разлагая функцию в ряд Тейлора, получим:

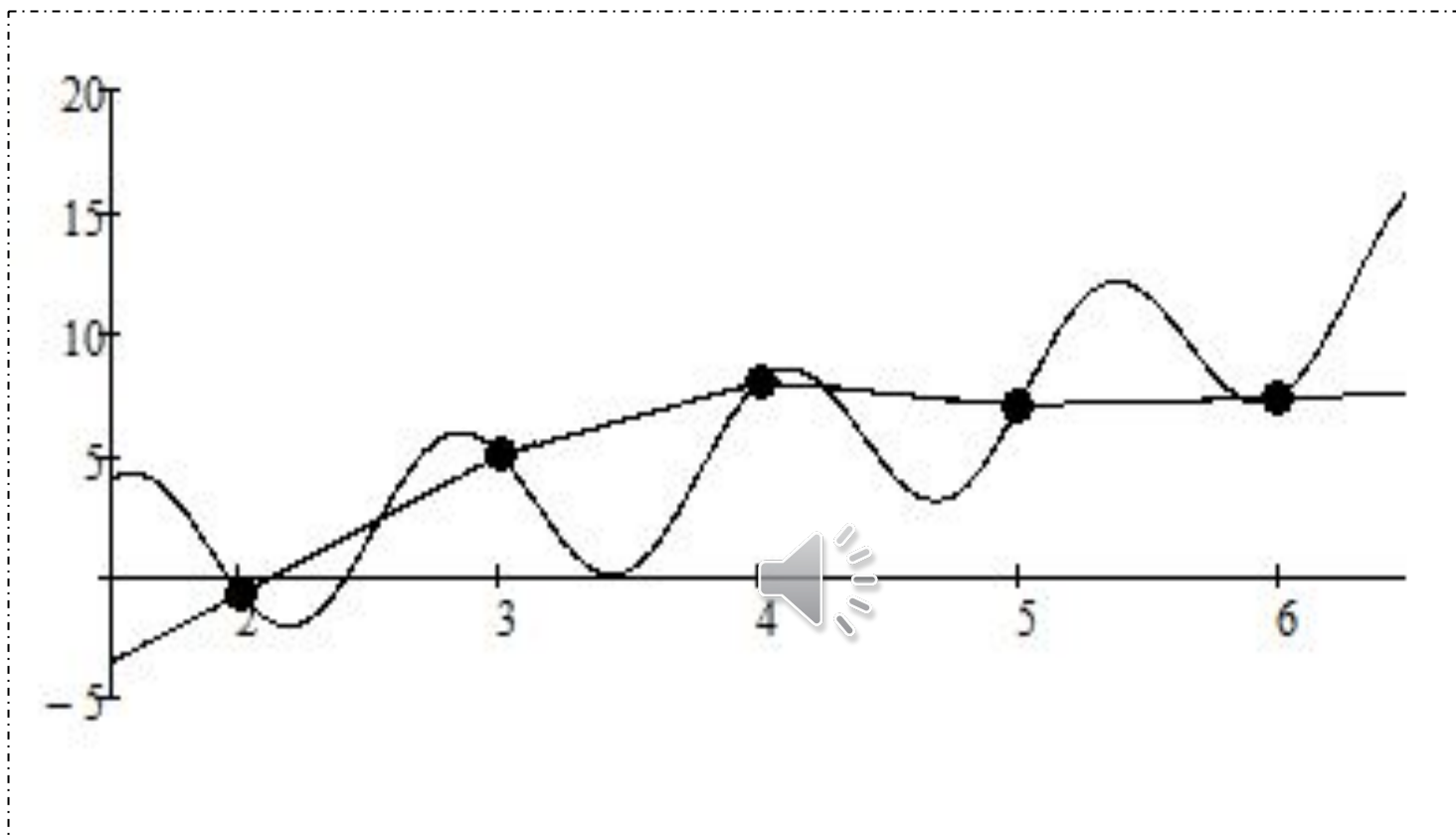
$$R(h) = \int_x^{x+h} (f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{1}{2}f''(x)(t-x)^2) dt -$$

$$\frac{h}{2}(f(x) + f(x) + f'(x)h + \frac{h^2}{2}f''(x)) = f''(x)\frac{h^3}{12}$$

Погрешность на интервале интегрирования есть сумма погрешности на каждом частичном интервале, в результате получим:

$$|I - I_{mp}| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2, \quad M_2 = \max |f''|. \text{ Очевидно, что метод трапеций}$$

точен для линейной функции.



Геометрическая интерпретация метода трапеций.

Метод парабол. (Метод Симпсона)

Степень полинома n равна двум. Рассмотрим интервал длиной $2h$: $[x_{i-1}, x_{i+1}]$. Коэффициенты Котеса (4.1.1) равны:

$$H_0 = \frac{1}{4} \int_0^2 (q-1)(q-2) dq = \frac{1}{6}, \quad H_1 = -\frac{1}{2} \int_0^2 q(q-2) dq = \frac{2}{3},$$

$$H_2 = \frac{1}{4} \int_0^2 (q-1)q dq = \frac{1}{6}.$$

В результате квадратурная формула имеет вид:

$$\int_{x-h}^{x+h} f(t) dt = \frac{h}{3} (f(x+h) + 4f(x) + f(x-h)).$$

Для применения метода парабол на $[a, b]$, его необходимо разбить на $2n$ интервала, т.е. число интервалов должно быть четно. При суммировании по частичным интервалам внутренние четные точки удваиваются. В результате окончательная формула имеет вид:

$$I_{nap} = \frac{2}{3} h ((f_0 + f_{2n})/2 + 2 \sum_{i=1}^n f_{2i-1} + \sum_{i=1}^{n-1} f_{2i}),$$

где $f_0 = f(a)$, $f_{2n} = f(b)$.

Оценка точности метода парабол:

$$R = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} yf(t)dt - \frac{h}{3}(f(x-h) + 4f(x) + f(x+h)) \text{ и разлагая функции в ряд}$$

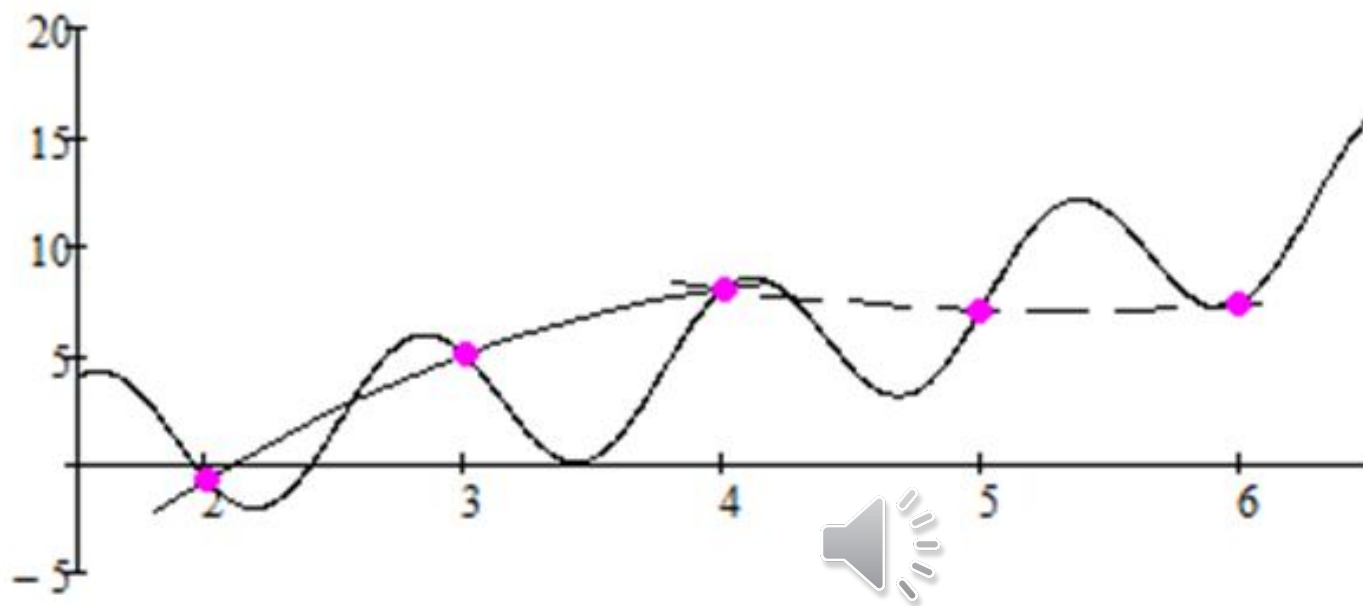
Тейлора до четвертой производной, получим:

$$R = -\frac{h^5}{90} f^{IV}(x) -$$

погрешность R зависит не от третьей, а от четвертой производной, т.е. приближение имеет повышенную точность и формула парабол верна для полиномов третьей степени. Окончательно, погрешность имеет вид:

$$|R| = \frac{h^5 n}{90} |y^{IV}(\theta)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} M_4, M_4 = \max_{[a,b]} y^{IV}.$$

На практике, достижение заданной точности определяется путем сравнения значений интеграла, рассчитанных для текущего и удвоенного числа разбиений интервала.



Геометрическая интерпретация метода парабол.

Квадратурные формулы Гаусса

Предварительно необходимо рассмотреть свойства полиномов

Лежандра: $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{d^n x} (x^2 - 1)^n$ - полином степени n , $x \in [-1, 1]$.

Полиномы ортогональны, то есть: $\int_{-1}^1 P_n(x) \cdot P_m(x) dx = \delta_{n,m}$, где $\delta_{n,m}$ -

символ Кронекера.

Имеют n корней на $[-1, 1]$.

Для любого полинома $Q_k(x)$: $\int_{-1}^1 P_n(x) \cdot Q_k(x) \cdot dx = 0$, если $k < n$,

так как полином степени k представим в виде линейной комбинации полиномов Лежандра до степени k включительно.

Исходим из формулы общего вида:

$$\int_{-1}^1 f(t) \cdot dt = \sum_{i=1}^n A_i \cdot f(t_i)$$

Для произвольного отрезка $[a, b]$ замена переменных $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot t$ переводит его в отрезок $[-1, 1]$, и квадратурная формула Гаусса имеет вид:

$$I_g = \left[\frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n A_i f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_i\right) \right]$$

Потребуем, чтобы квадратурная формула была точна для полиномов максимальной степени $2 \cdot n - 1$, а, следовательно, должна быть точна для $1, t,$

$\dots, t^{2 \cdot n - 1}$. Система уравнений: $\sum_{i=1}^n A_i \cdot t_i^k = \frac{1 + (-1)^k}{k + 1}$ нелинейная.

Используем свойство полинома Лежандра:

$$\int_{-1}^1 t^k \cdot P_n(t) \cdot dt = \sum_{i=1}^n A_i \cdot t_i^k \cdot P_n(t_i) = 0 \text{ при } k=0, 1, \dots, n-1.$$

Равенство интеграла нулю возможно, если t_i - корни полинома Лежандра, которые известны.

Полученные t_i , подставляются в первые n уравнений системы для определения коэффициентов A_i :

$$A_1 \cdot t_1^i + A_2 \cdot t_2^i + \dots + A_n \cdot t_n^i = \frac{[1 + (-1)^i]}{i + 1}, \quad 0 \leq i \leq n - 1.$$

Определитель системы – определитель Вандермонда $\neq 0$ и система имеет единственное решение.

Оценка точности квадратурной формулы Гаусса проводится по формуле:

$$\left| I - \overline{I_g} \right| \leq \frac{(b - a)^{2n+1} \cdot (n!)^4 M_{2n}}{(2n!)^3 (2n + 1)}, \quad \text{где } M_{2n} = \max_{[a,b]} f^{(2n)}.$$