

«Методы и алгоритмы
цифровой обработки сигналов
на базе MATLAB»

*Дискретные сигналы.
Z-преобразование*

Клионский Д.М. — к.т.н., доцент кафедры
математического обеспечения и применения ЭВМ (МОЭВМ)

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

1) **Z-преобразование** связано с **преобразованием Лапласа**:

Интегральное преобразование Лапласа

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt$$

$x(t)$ – непрерывная функция времени (функция-оригинал)

$X(p)$ – изображение функции () по Лапласу

p – оператор Лапласа (комплексная частота)

$$p = \sigma + j\omega$$

2) Преобразование Лапласа справедливо в области **абсолютной сходимости несобственного интеграла**.

$$t \rightarrow nT$$

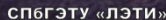
$$X(e^{pT}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-pnT}$$

$$\mathbf{z} = e^{pT}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n}$$

функция дискретного времени

Х(изображение функции () $x nT$



Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ЕГО СВОЙСТВА (1)

Z-преобразование справедливо в области **абсолютной сходимости** ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(nT)z^{-n}| < \infty$$

Свойства Z-преобразования

1) Линейность

$$x(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) + \dots$$

$$X(z) = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z) + \dots$$

2) Теорема о задержке

$$x(n) \leftrightarrow X(z)$$

$$x(n-m) \leftrightarrow X(z)z^{-m}$$

Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ЕГО СВОЙСТВА (2). ОБРАТНОЕ Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

5

3) Теорема о свертке

$$x(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m) \leftrightarrow X(z) = X_1(z)X_2(z)$$

Обратное Z-преобразование

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

C – замкнутый контур на комплексной z -плоскости, охватывающий начало координат и особые точки функции $X(z)$

Если $X(z)$ – **дробно-рациональная функция**, ее особыми точками являются **полюсы**.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБРАТНОГО Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ (1)

1) Теорема Коши о вычетах

$$x(n) = \sum_{k=1}^K \text{Res}_{\alpha_k} [X(z) z^{n-1}]$$

полное

вычет в α_k -м полюсе

$$\text{Res}_{\alpha_k} [X(z) z^{n-1}] = \lim_{z \rightarrow \alpha_k} [(z - \alpha_k) X(z) z^{n-1}]$$

Пример

$$X(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}} \leftrightarrow x(n) = a_1^n$$



ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБРАТНОГО Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ (2). СВЯЗЬ КОМПЛЕКСНЫХ P И Z-ПЛОСКОСТЕЙ (1)

2) Разложение на простые дроби дробно-рациональной функции $X(z)$

$$X(z) = \sum_{k=1}^{M-1} \left(\frac{A_k}{1 - \alpha_k z^{-1}} \right)$$

$$x(n) = \sum_{k=1}^{M-1} A_k \alpha_k^n$$

3) Использование таблицы соответствий

Связь комплексных p и z -плоскостей

$$\begin{aligned} z &= e^{pT} = \\ &= e^{(\sigma + j\omega)T} = \\ &= e^{\sigma T} e^{j\omega T} = e^{\sigma T} e^{j\omega \boxtimes} \end{aligned}$$

СВЯЗЬ КОМПЛЕКСНЫХ Р И Z-ПЛОСКОСТЕЙ (2)

Формы представления переменной z

1) алгебраическая

$$z = \xi + j\eta$$

2) показательная

$$z = re^{j\varphi}$$

Сравнение форм представления переменной z

$$r = e^{\sigma T}$$

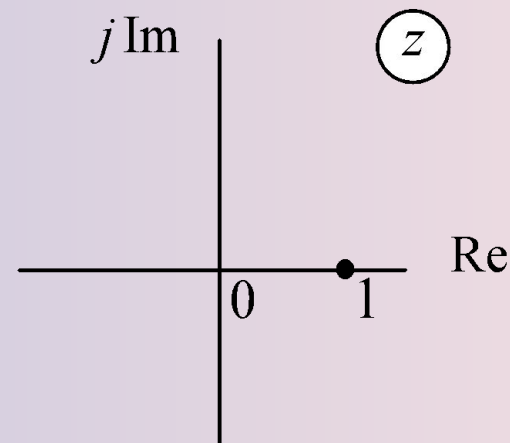
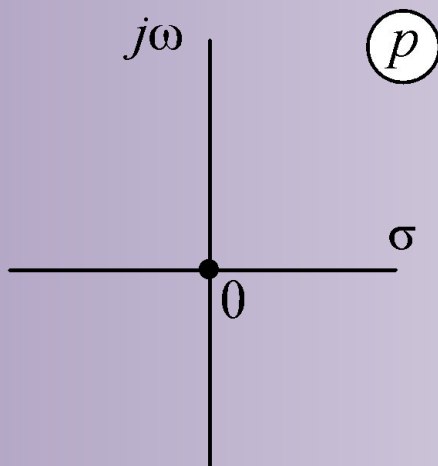
$$\varphi = \omega$$

Смысл нормированной частоты – угол на комплексной z -плоскости, измеряемый в радианах.

ПРИМЕРЫ (1)

1) Начало координат p -плоскости: $p=0$; $\sigma=0$; $\omega=0$;

$$z = e^{pT} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = 1e^{j0} = 1$$

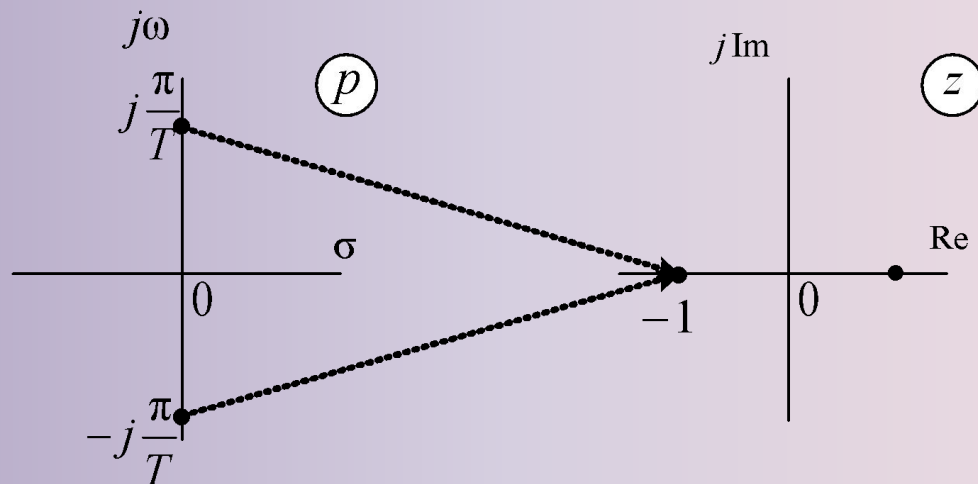


ПРИМЕРЫ (2)

2) Точки на оси ординат p -плоскости

$$p = \pm j \frac{\pi}{T} \quad \sigma = 0; \omega = \pm \frac{\pi}{T}$$

$$z = e^{pT} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = 1e^{\pm j \frac{\pi}{T} T} = 1e^{\pm j\pi} = -1$$



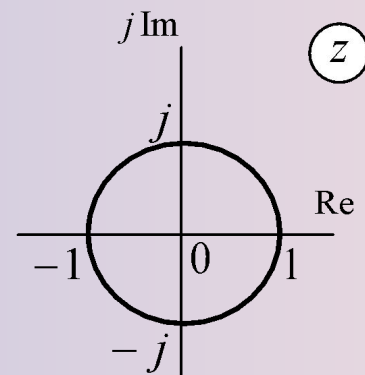
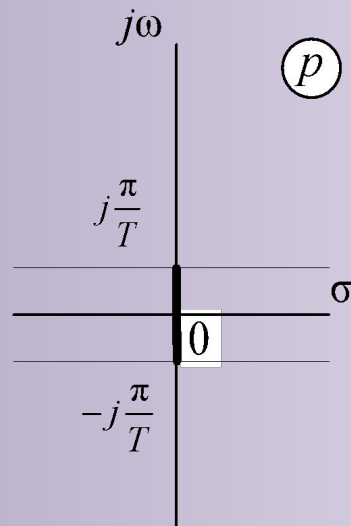
ПРИМЕРЫ (3)

3) Отрезок на оси частот p -плоскости

$$-j\frac{\pi}{T} < p \leq j\frac{\pi}{T} \quad \sigma = 0; -\frac{\pi}{T} < \omega \leq \frac{\pi}{T}$$

$$z = e^{pT} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = e^{j\omega T} \quad \text{единичная окружность}$$

(дин оборот)



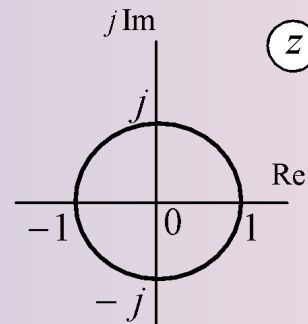
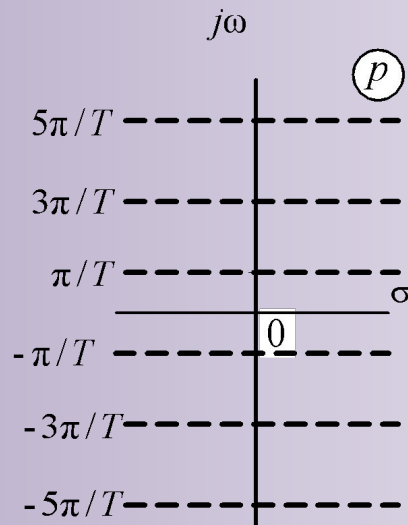
ПРИМЕРЫ (4)

4) Ось частот p -плоскости

$$-j\infty < p \leq j\infty \quad \sigma = 0; -\infty < \omega < \infty$$

$$z = e^{pT} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = \overset{\text{единица}}{1} \overset{\text{число оборотов}}{+j\omega T}$$

(бесконечное число оборотов)



ПРИМЕРЫ (5)

5) Левая p -полуплоскость

$$-j\infty < p \leq j\infty$$

$$\sigma \leq 0; -\infty < \omega < \infty$$

$$z = e^{pT} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = re^{\pm j\omega T} \text{ единичный круг}$$

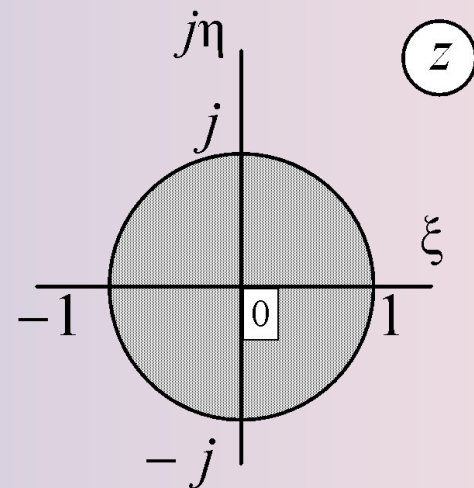
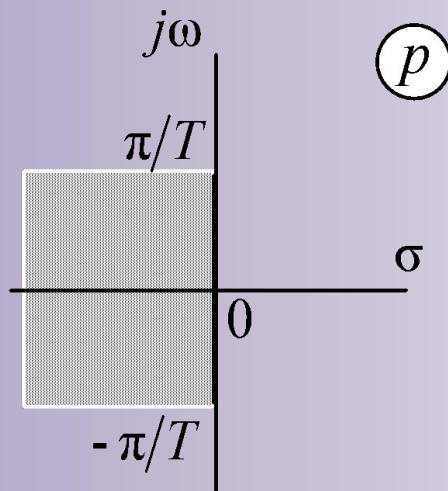


ТАБЛИЦА СООТВЕТСТВИЙ

№	Последовательность	z -изображение
1	$u_0(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$	$U_0(z) = 1$
2	$h(n) = (\pm a)^n$	$H(z) = \frac{1}{1 \mp az^{-1}}$
3	$h(n) = r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*}$	$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}},$ $a_1 = -2r_* \cos \varphi_*, \quad a_2 = r_*^2$



«Методы и алгоритмы
цифровой обработки сигналов
на базе MATLAB»

*Дискретные сигналы.
Z-преобразование*

Клионский Д.М. — к.т.н., доцент кафедры
математического обеспечения и применения ЭВМ (МОЭВМ)