

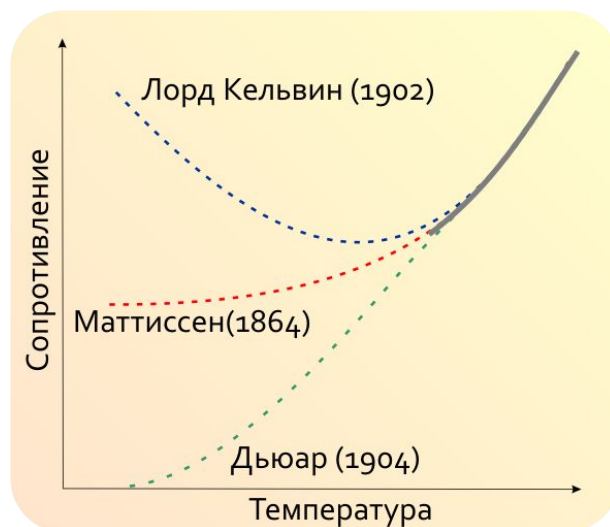


Физико-технические основы электроэнергетики

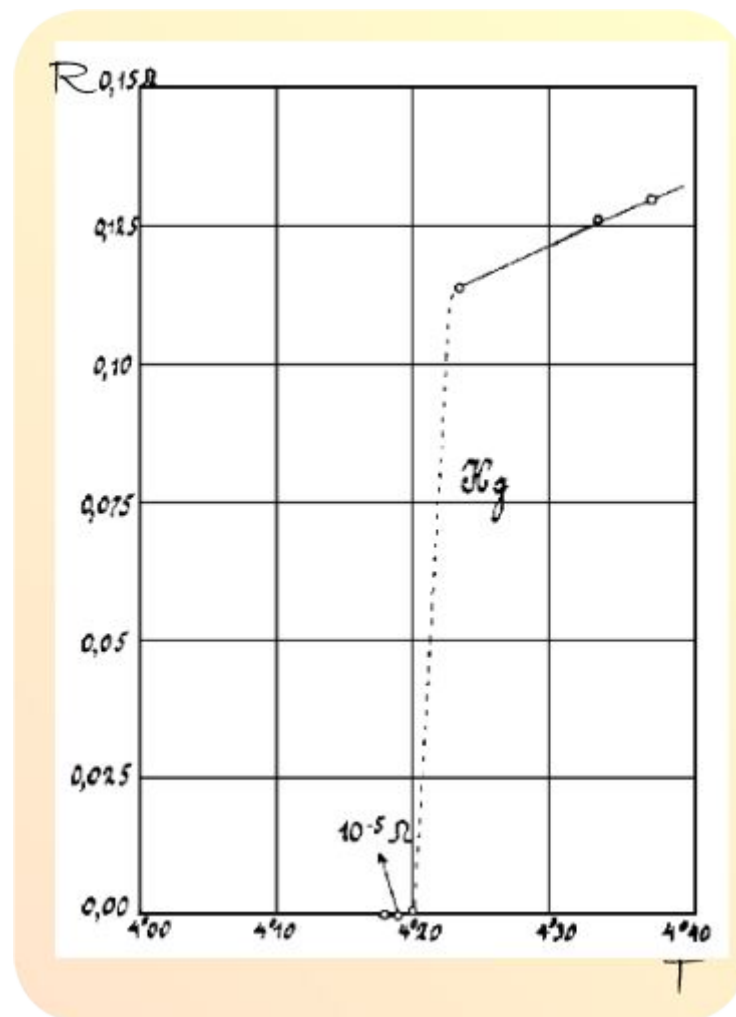
Лекция 9сп

Профессор Е.Ю.Клименко

Открытие сверхпроводимости | 9 | 1

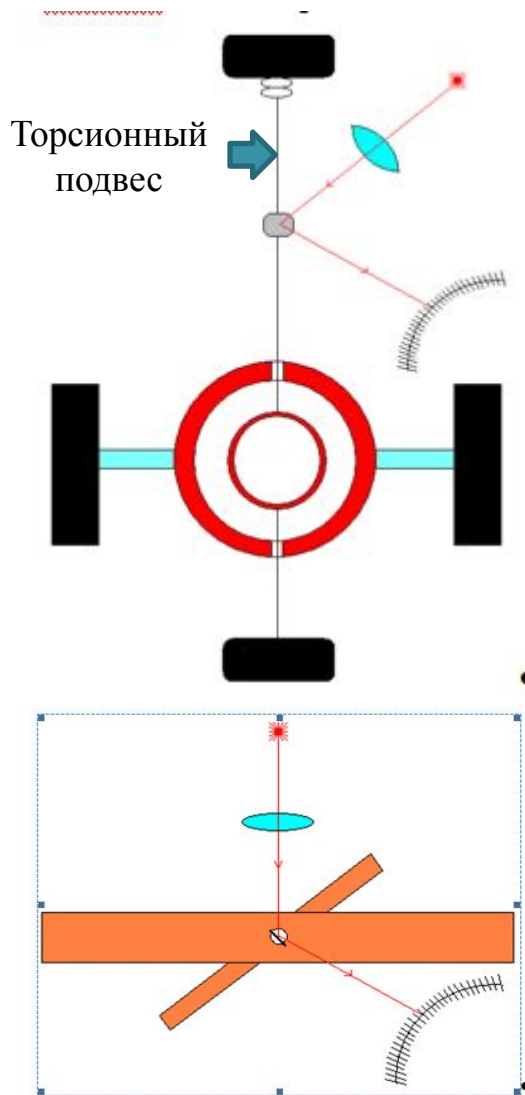


Существовало три гипотезы о зависимости сопротивления металлов от температуры при приближении к абсолютному нулю. Получив в 1908 жидкий гелий, Камерлинг-Оннес взялся за проверку этих гипотез и открыл сверхпроводимость.



Температурный ход сопротивления ртути

Сколько велика проводимость сверхпроводника ?



В теплые коаксиально установленные кольца вводят постоянные магниты, которые удаляют после охлаждения колец, индуцируя в них токи одного направления. Закручивая нить, выводят кольца из одной плоскости. За углом скручивания наблюдают с помощью закрепленного на нити зеркала.

Пока в кольцах есть ток, они стремятся вернуться в одну плоскость. Затухание тока $I(t) = I_0 \exp(-\frac{t}{\tau})$ можно бы обнаружить по перемещению зайчика, но не обнаружено

$$\tau = \frac{L}{R} \quad \rho = \frac{sL}{l t} \ln \left(\frac{I(t)}{I_0} \right)$$

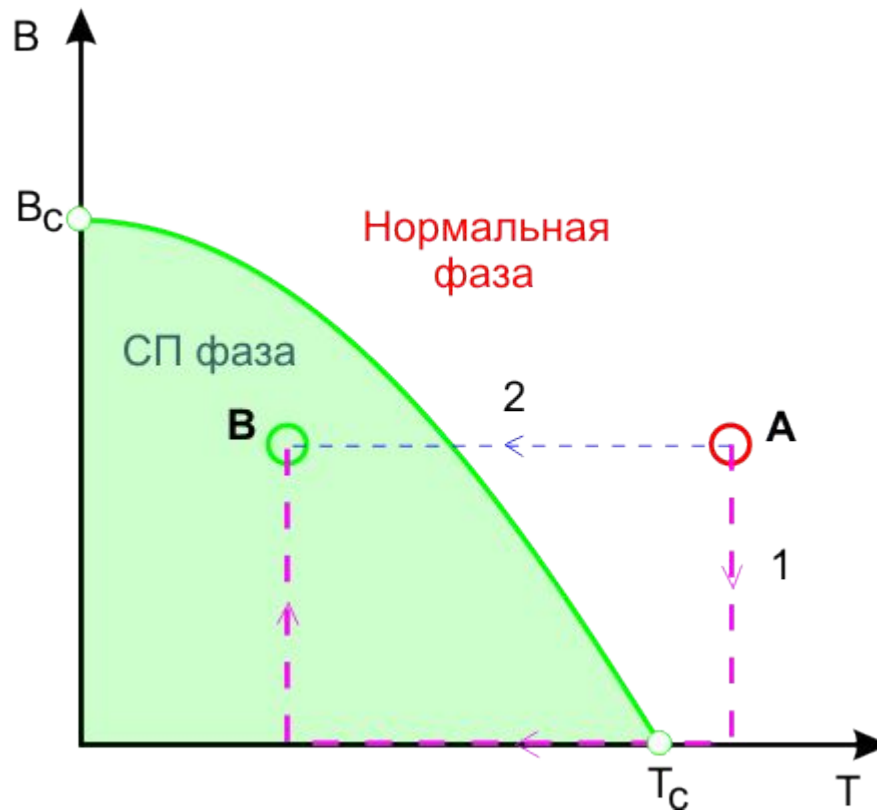
Уменьшая L и s и увеличивая время наблюдения, можно получать все более точные оценки Γ сверху:

Камерлинг_Оннес и Тюин (1924) $R < 10^{-15} R_{\text{комн}}$

Куинн и Иттнер (1962) $r < 4 \cdot 10^{-23} \text{ Ом см}$

Сейчас неприлично полагать, что сопротивление сверхпроводника не равно тождественно нулю.

СП фазовый переход



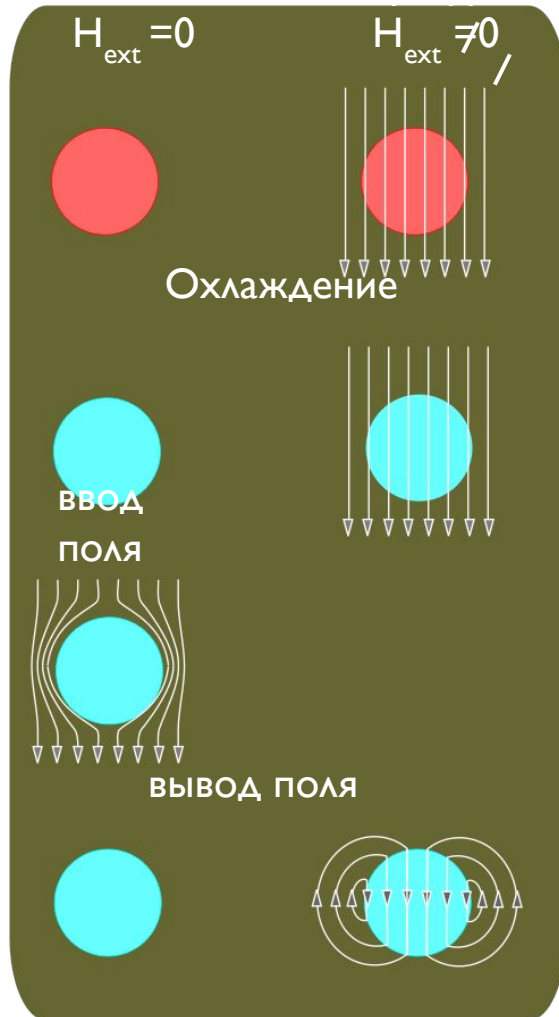
Чтобы можно было говорить о фазовом переходе, нужно чтобы состояние материала не зависело от пути, которым он переведен в это состояние.

Рассмотрим два пути из состояния А в состояние В:

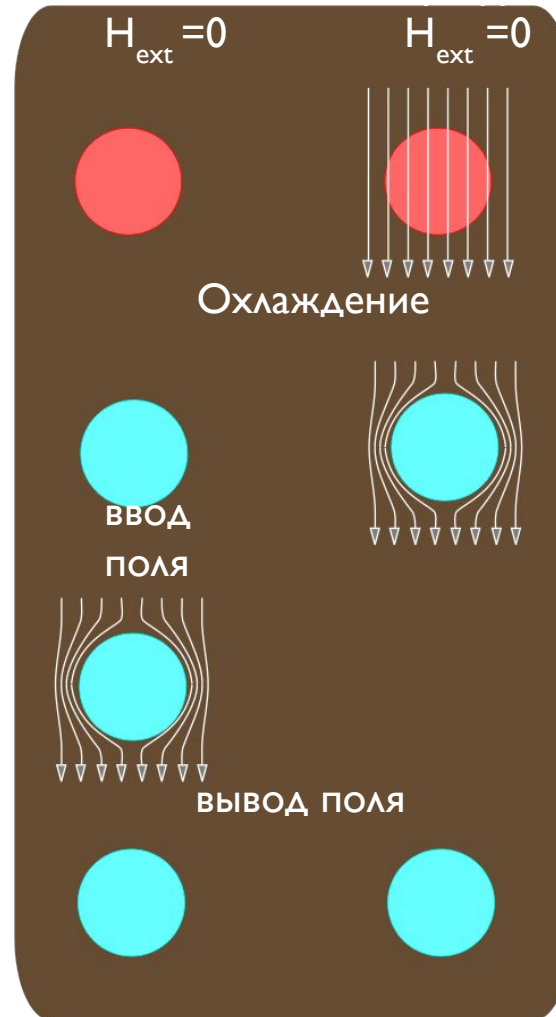
1. Охлаждение в нулевом поле с последующим подъемом поля.
2. Охлаждение в магнитном поле

Эффект Мейснера в сверхпроводнике I рода

Гиперпроводник



Сверхпроводник



Переход гиперпроводника не является термодинамическим переходом

Переход сверхпроводника - термодинамический

В гиперпроводнике магнитное поле замораживается, из сверхпроводника - выталкивается

Электродинамика

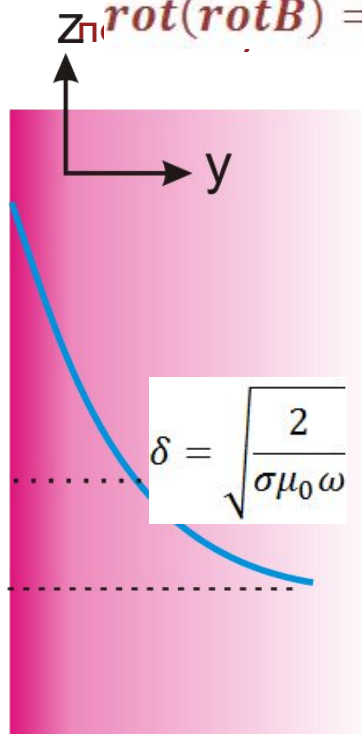
гиперпроводника

Вспомним, как переменное магнитное поле $B_{z0}(t) = B_{z0}e^{i(\omega t)}$ проникает в металл.

Из уравнений Максвелла $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt}$, взяв ротор из первого, получаем

$$\text{rot rot } \mathbf{B} = \mu_0 \text{rot } \mathbf{j} = \sigma \mu_0 \text{rot } \mathbf{E} = -\sigma \mu_0 \frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad \Delta \mathbf{B} = \sigma \mu_0 \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{B}) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - (\nabla \nabla) \mathbf{B} = \text{grad}(\text{div } \mathbf{B}) - \Delta \mathbf{B}$$



Уравнение для B_z $\frac{d^2 B_z}{dy^2} = \sigma \mu_0 \frac{dB_z}{dt}$

$$\frac{d^2 B_z(y)}{dy^2} = i \sigma \mu_0 \omega B_z(y)$$

Решение: $B_z(y, t) = A_1 e^{-ky - i\omega t} + A_2 e^{ky + i\omega t}$

$$k = \sqrt{i \sigma \mu_0 \omega} = (1 + i) \sqrt{\frac{\sigma \mu_0 \omega}{2}} \quad \text{т.к.} \quad \sqrt{i} = \left\{ \frac{1 + i}{\sqrt{2}}, \frac{-1 - i}{\sqrt{2}} \right\}$$

$$B_z(y, t) = B_{z0} e^{-\alpha y} e^{i(\omega t - \alpha y)} \quad A_2 = 0$$

Амплитуда поля убывает экспоненциально. Имеется сдвиг по фазе по мере углубления в металл.

Если в гиперпроводнике $\sigma \rightarrow \infty$, то ток должен течь по поверхности при толщине слоя равной нулю!

До 1933 г. было известно единственное свойство сверхпроводника – бесконечная проводимость.

Электродинамика гиперпроводника

R. Becker, G. Heller и F. Sauter в 1933 г. рассмотрели случай гиперпроводника детальной: Если нет сопротивления, то электроны ускоряются электрическим

полем: $m^* \frac{dv_s}{dt} = e^* E$ причем $J_s = n_s e^* v_s$, тогда $\mu_0 \lambda_L^2 \frac{\partial J_s}{\partial t} = E$

где $\lambda_L^2 = \frac{m^*}{\mu_0 n_s e^{*2}}$ Взяв ротор от обеих частей последнего уравнения, получим:

И, воспользовавшись уравнением Максвелла $\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt}$ получим $\lambda_L^2 \Delta \frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{d\mathbf{B}}{dt}$

Проинтегрировав его по времени получим $\Delta(\mathbf{B} - \mathbf{B}_0) = (\mathbf{B} - \mathbf{B}_0)/\lambda_L^2$

т.е. изменение поля проникает на глубину λ_L . А $\mathbf{B}_0$ – поле, существовавшее в материале до изменения внешнего поля.

После открытия Мейснером явления выталкивания магнитного поля из сверхпроводника Лондоном не оставалось ничего иного, как положить $\mathbf{B}_0 = 0$

Уравнения Лондонов

Классическая электродинамика любого металла описывается уравнениями Максвелла $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ в сочетании с материальным уравнением материала.

Для нормальных металлов материальное уравнение – закон Ома.

Для сверхпроводников I рода – уравнения Лондонов:

$$\frac{d(\mu_0 \lambda_L^2 \vec{j})}{dt} = \vec{E}$$

описывает ускорение носителей электрическим полем

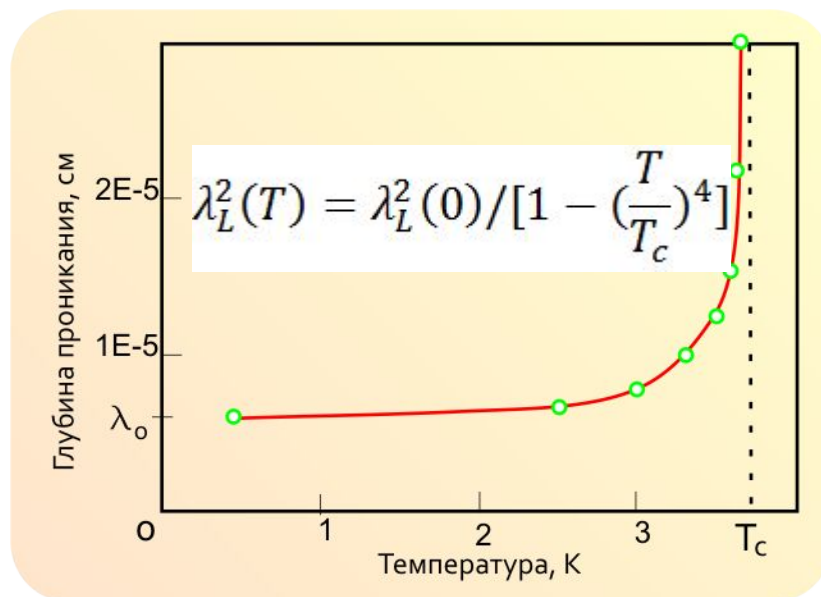
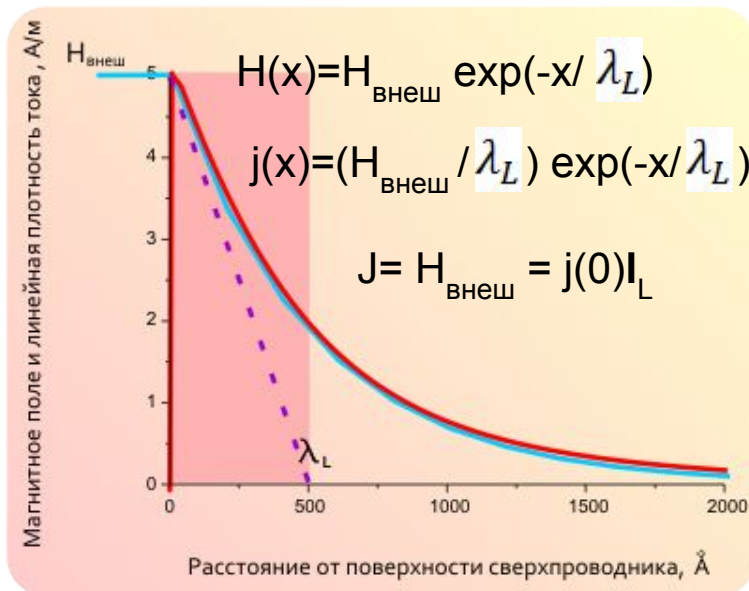
$$\text{rot}(\mu_0 \lambda_L^2 \vec{j}) = -\vec{B}$$

описывает выталкивание поля из объема сверхпроводника.

Действительно $\text{rot} \text{rot} \vec{B} = \text{rot}(\mu_0 \vec{j}) = -\frac{\vec{B}}{\lambda_L^2} = -\nabla^2 \vec{B}$ уравнений Максвелла,

Получим:

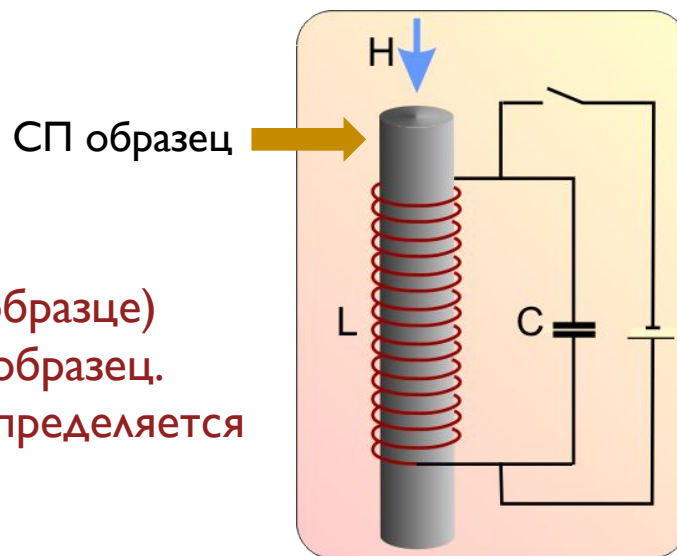
Зависимость глубины проникания от температуры



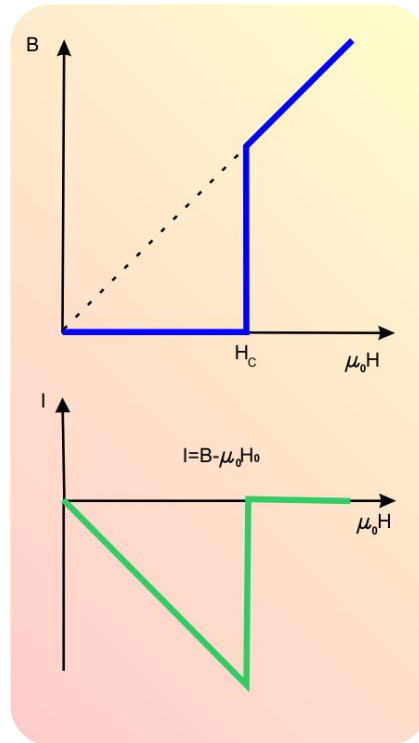
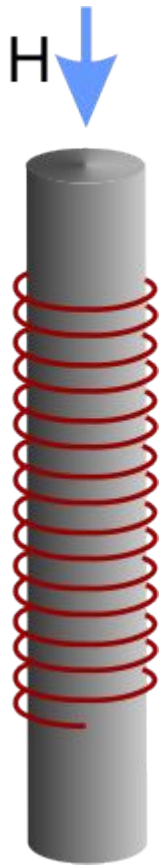
Характер проникания поля и тока в полубесконечный сверхпроводник с плоской границей

Измерение глубины проникания

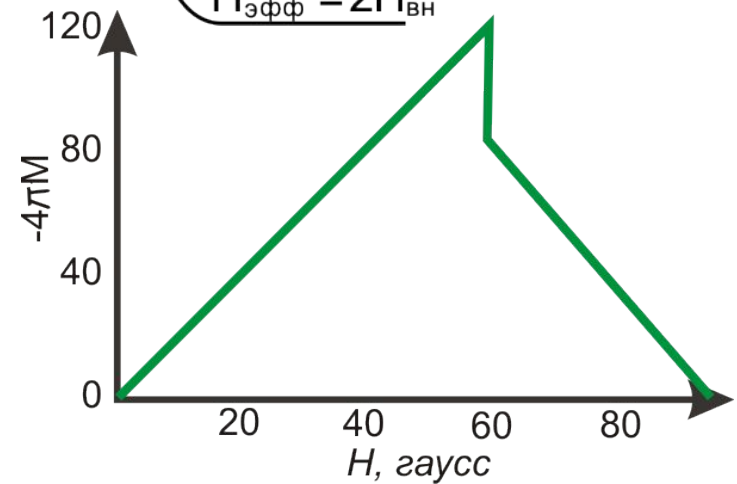
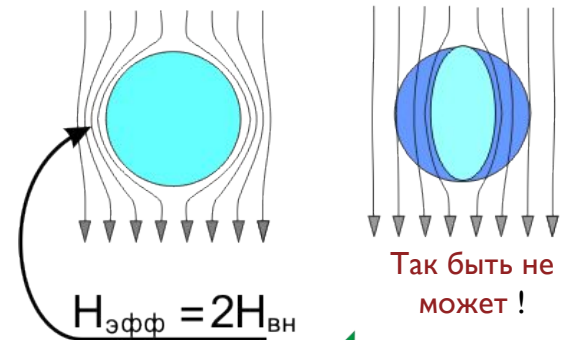
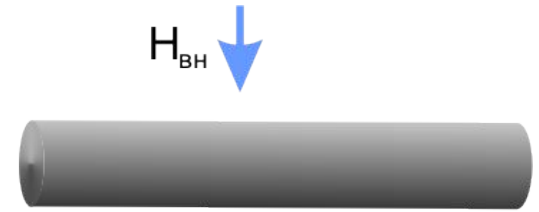
Индуктивность соленоида (поток Φ в образце) зависит от глубины проникания поля в образец. Индуктивность с высокой точностью определяется по частоте колебаний в LC-контуре.



Намагниченность сверхпроводника I рода



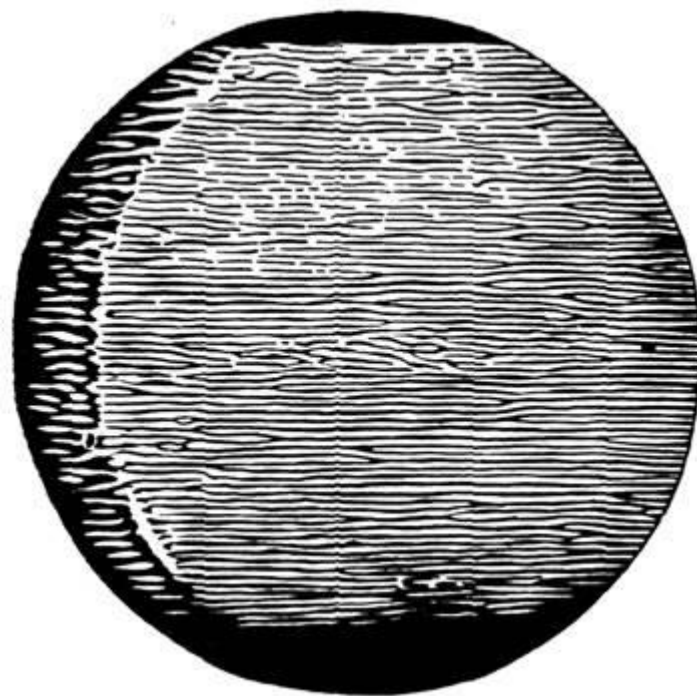
Индукция и
магнитный
момент
сверхпроводника
I рода
 $I = B - \mu_0 H_{BH}$



Обратимый переход в
промежуточное состояние

Промежуточное состояние

При $H_{\text{вн}} < H_c$ возможны ситуации, когда свободная энергия полностью экранированного сверхпроводника больше свободной энергии нормального состояния, а свободная энергия нормального металла с проникшим полем больше свободной энергии сверхпроводника. В этом случае возникает промежуточное состояние: сверхпроводник разбивается на нормальные и сверхпроводящие области. Тонкость разбиения ограничивается тем, что энергия границы в сверхпроводниках I рода положительна.



Фотография промежуточного состояния в сверхпроводящей пластине в перпендикулярном поле, полученная методом ферромагнитных порошков. Тёмные полосы - выход на поверхность n -доменов, светлые - S -доменов.

Критический ток проволоки из сверхпроводника I рода

Правило Силсби: Максимальный ток в проволоке из СП создает на её поверхности критическое поле.

Поле на поверхности проволоки при симметричном распределении тока $B = \mu_0 \frac{I}{2\pi R}$ отсюда $I_c = 2\pi R H_c$.

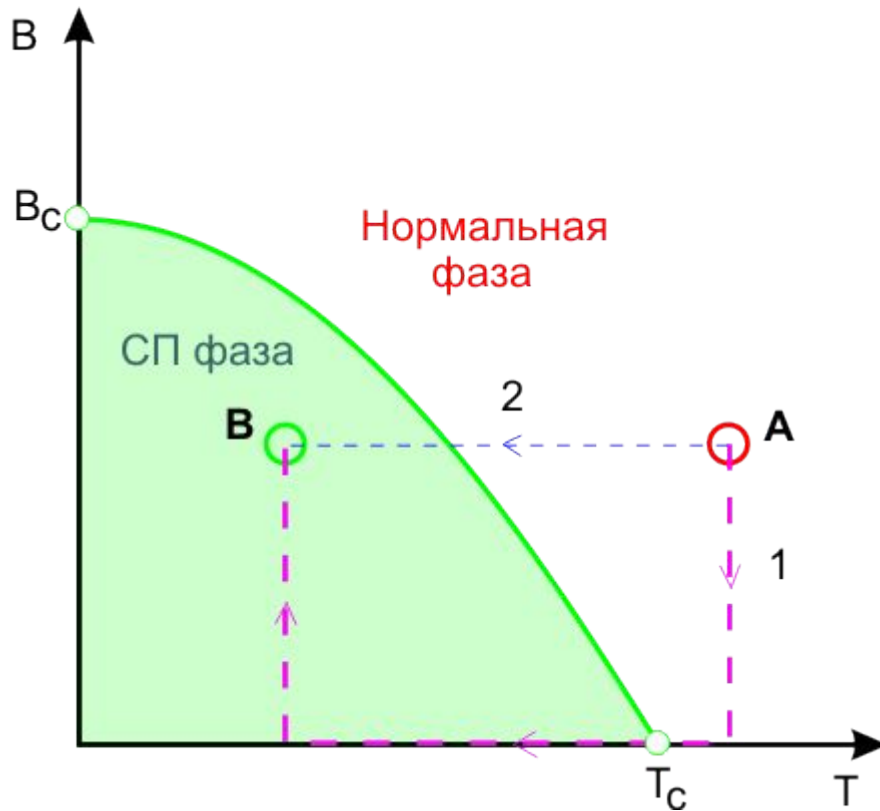
Вычислим плотность критического тока. Он течет на глубине проникания λ_L .

$$j_c = \frac{I_c}{2\pi R \lambda_L} = \frac{B_c}{\mu_0 \lambda_L}$$

У олова $B_c = 0.0305 \text{ Тл}$, $\lambda_L = 5.1 \text{ Е-}8 \text{ м}$ получаем $j_c = 4.76 \text{ Е}^{11} \text{ А/м}^2$. Эта величина соответствует критической скорости носителей и называется «**током распаривания**»

Если рассчитать плотность тока на полное сечение проволоки $j_c^* = \frac{2B_c}{\mu_0 R}$ то для проволоки диаметром 1 мм получим $9.7 \text{ Е}^7 \text{ А/м}^2$.

У технических сверхпроводников эта величина на два порядка выше



Поскольку критический ток сверхпроводника I рода однозначно связан с критическим магнитным полем, нет нужды вводить третье измерение (ток) в фазовую диаграмму.

При описании технических сверхпроводников нам потребуется трехмерное пространство T - B - j .
Увидим, что переход технического сверхпроводника с током в нормальное состояние не является термодинамическим (результат зависит от пути).

Квантование магнитного потока

Сверхпроводимость – квантовое явление. В 1948 г. Г. Лондон предсказал, что магнитный поток дискретен: $\Phi = nh/e = n\Phi_0$.

В действительности нужно иметь в виду, что ток переносится парами электронов

$$\Phi_0 = h/2e = 2,067833636(81) \times 10^{-15} \text{ Вб.}$$

В июне 1961 года две группы экспериментаторов – Б.С. Дивер и У.М. Фэрбенк (Стенфордский ун-т, Калифорния, США), и Р. Долл и М. Нёбауэр (Баварская Академия наук, Германия) объявили об открытии квантования магнитного потока.

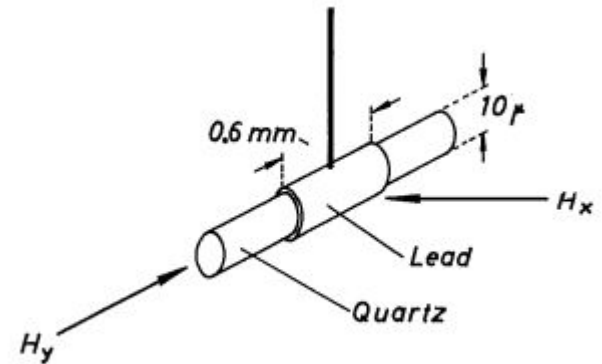


Рис. 1. Схема установки Долла и Нёбауэра.

<http://www.ihst.ru/personal/tomilin/papers/tom04ihst.pdf>

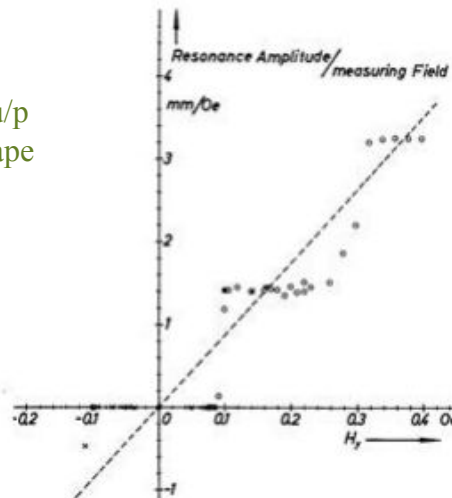


Рис.2 Результаты Р.Долла и М.Нёбауэра

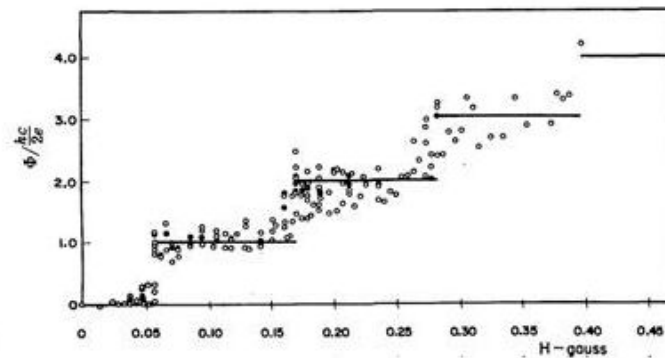


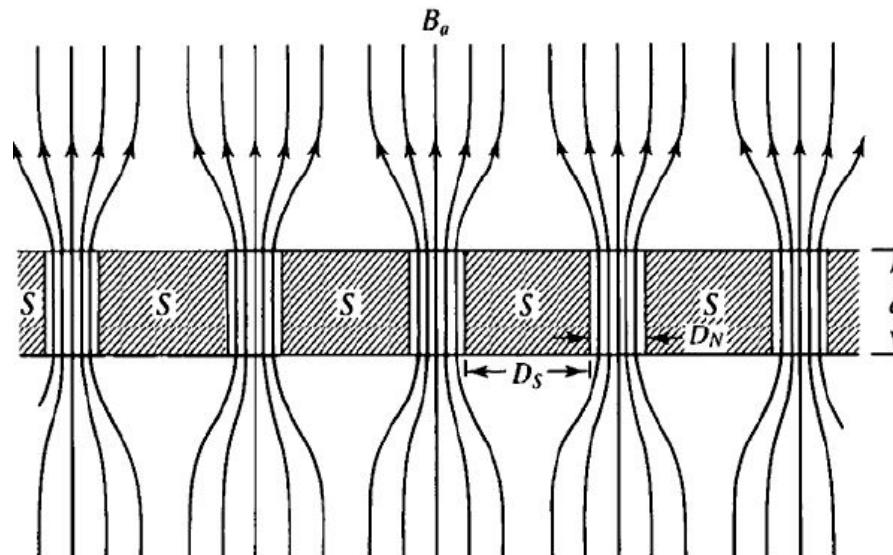
Рис.3 Результаты Б.С.Дивера и У.М.Фэрбенка



Сверхпроводимость II рода

Придется ненадолго вернуться к промежуточному состоянию

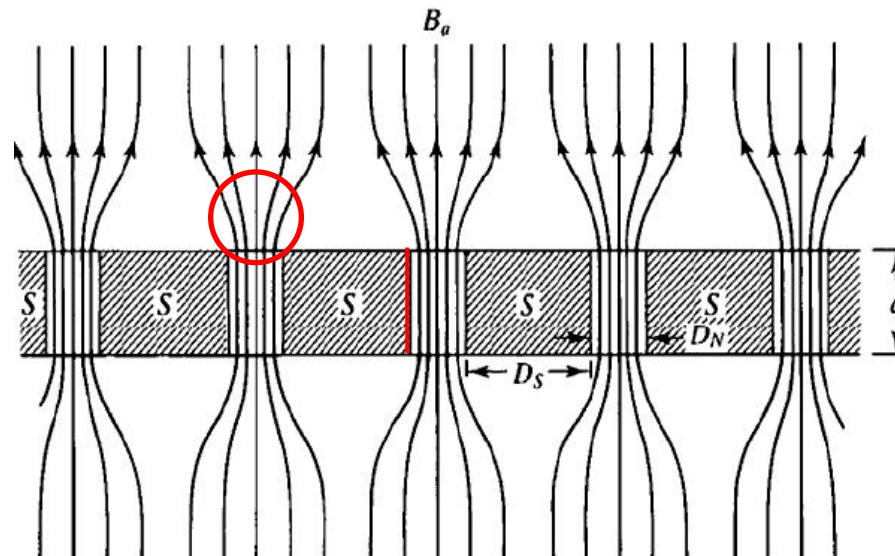
Поле, при котором возникает промежуточное состояние зависит от формы сверхпроводника: Для круглой проволоки в поперечном поле $H_e = 0.5 H_c$, для шара $H_e = 2/3 H_c$, Плоская пластина в любом перпендикулярном поле находится в промежуточном состоянии, т.к. никакой мейснеровский ток, текущий по ее боковой поверхности не может заэкранировать весь ее объем от внешнего поля.



$$B_n = B_0 * (D_s + D_n) / D_n = B_c$$

Это выражение определяет лишь относительные размеры сверхпроводящих и нормальных областей. **Каковы их абсолютные размеры?**

Л.Д.Ландау определил размеры S и N областей, для чего учел поверхностную энергию на границе сверхпроводящей и нормальной фаз и учел изменение энергии поля вблизи поверхности пластины.



Введенное представление о поверхностной энергии сыграло важнейшую роль для развития теории сверхпроводимости и, в частности теории сверхпроводников II рода.

Происхождение и свойства поверхностной энергии на границе S и N фаз

Вдали от SN границы в нормальном металле магнитное поле есть, а в сверхпроводнике — нет. Проникание магнитного поля в сверхпроводник описывается глубиной λ .

Куперовских пар нет в глубине нормального металла, их концентрация равна равновесной в глубине сверхпроводника и плавно меняется с постоянной длины ξ вблизи границы. Проникание поля вглубь сверхпроводника уменьшает его

энергию (на единицу площади границы) на величину $\sigma_\lambda = \frac{\mu_0 H_c^2}{2} \lambda_L$.

С другой стороны, понижение количества куперовских пар вблизи границы

увеличивает эту энергию на величину $\sigma_\xi = \frac{\mu_0 H_c^2}{2} \xi_{GL}$

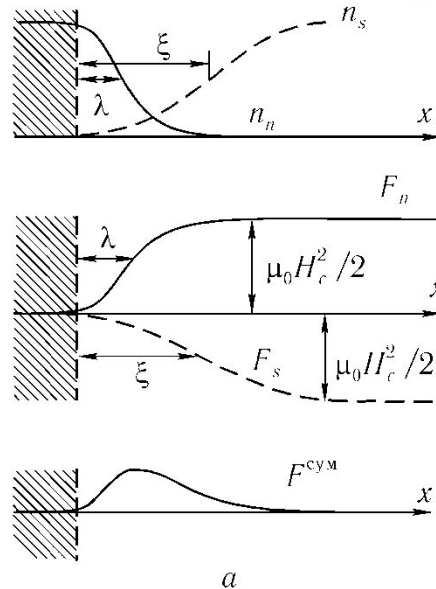
$$\kappa = \frac{\lambda}{\xi}$$

Параметр Гинзбурга-Ландау

СП I рода

$$\kappa = \frac{\lambda}{\xi} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

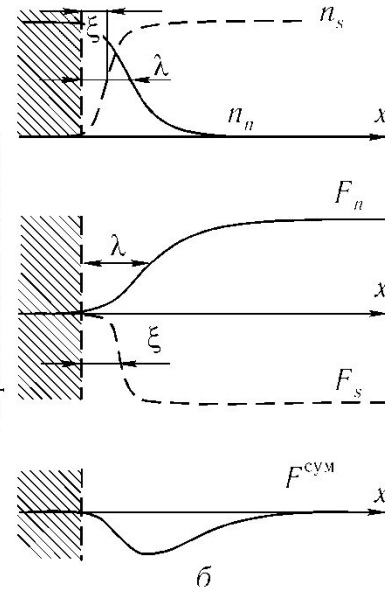
Нормальная область



СП II рода

$$\kappa = \frac{\lambda}{\xi} > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Нормальная область

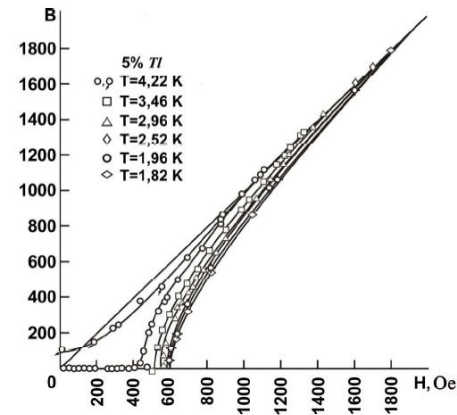
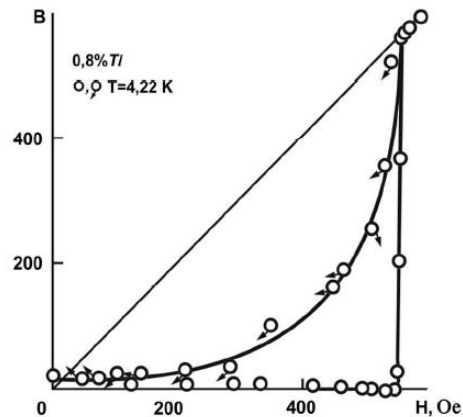


Если поверхностная энергия положительна, сверхпроводник получает ее от внешнего поля – возникает промежуточное состояние (размеры S и N областей определяются балансом поверхностной энергии на границе фаз и энергии концентрации внешнего потока).

Если поверхностная энергия отрицательна, она выделяется при дроблении фаз и сверхпроводник распадается на фазы минимального размера. При этом поток в N области имеет минимально возможную величину, т.е. $\Phi_0 = 2.07 \cdot 10^{-15} \text{ Вб}$.
(вебер= тесла/кв. м)

В чем состояло открытие Л.В.Шубникова ?

- Магнитные свойства сплавов изучали в 1929-1936 г.г. многие ученые и они обнаружили проникание магнитного поля в эти сплавы. Это явление они объясняли неоднородностью сплавов. Шубников с сотр. изучал гомогенизированные сплавы Рb-Tl и обнаружил существенное влияние концентрации примеси таллия на магнитные свойства однородных сплавов:



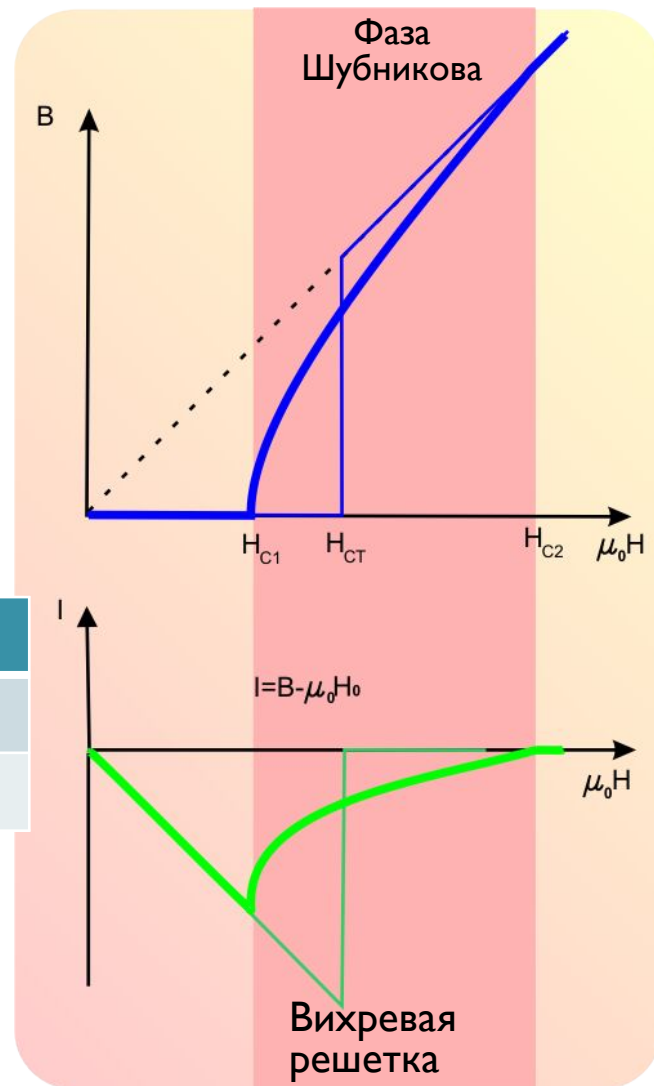
- Он первый понял, что имеет дело с новым типом сверхпроводимости. Ландау и Гинзбург, даже создавая свою теорию (ГЛ), считали сплавы грязью и полагали работы Шубникова ошибочными. Его работы были оценены в 1957 г. Абрикосовым, создавшим теорию сверхпроводников II рода, используя теорию ГЛ.
- Проникание магнитного поля в сверхпроводник II рода было естественно истолковать как отсутствие эффекта Мейснера. Но это, мягко говоря, не вполне верно. **Поле проникает, но мейснеровский ток сохраняется!**

Сверхпроводники II рода

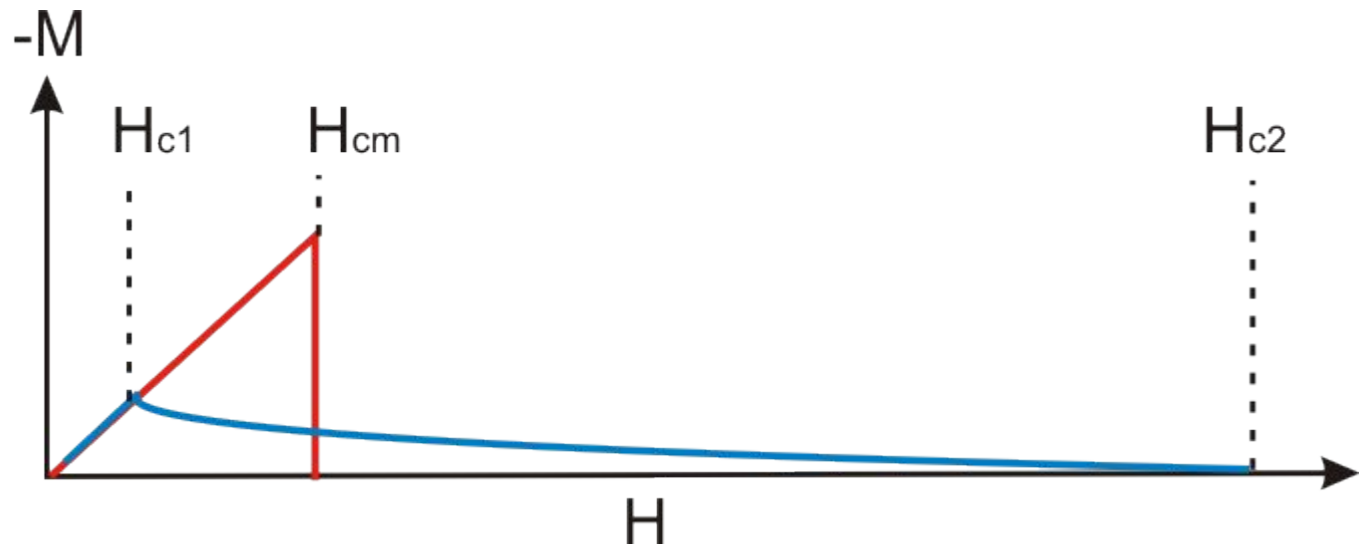
Свойства сверхпроводника зависят от соотношения глубины проникания λ_L и длины когерентности ξ_{GL} ($\sim$ размер пары).

При $\lambda_L > \sqrt{2} \xi_{GL}$ сверхпроводник расслаивается на области нормальной и сверхпроводящей фаз, переходит в «смешанное состояние» или «фазу Шубникова»

СП		Pb	Sn	Nb	Nb-Ti	Nb ₃ Sn
λ_L	нм	32	30	32		290
ξ_{GL}	нм	510	170	39		



Магнитный момент сверхпроводника II рода



$$H_{cm} = \frac{\Phi_0}{\sqrt{8}\pi\lambda\xi}$$

$$H_{c1} = H_{cm} \frac{\ln\kappa}{\kappa}$$

$$H_{c2} = \kappa \sqrt{2} H_{cm}$$

$$M(B) = \frac{B_{c2} - B}{(2\kappa^2 - 1)\beta_A} \quad \beta_A = 1.16$$

$$\text{При } \kappa = 50 \quad M(B) = 3.453 \cdot 10^{-4} (B_{c2} - B)$$

При построении электродинамики технических сверхпроводников будем считать $M=0$



Выше мы показали, что из-за отрицательности поверхностной энергии нормальная фаза в промежуточном состоянии должна дробиться на фрагменты, вмещающие один квант потока.

В 1957 г. Абрикосов показал, что магнитное поле проникает в сверхпроводник в виде вихрей и в однородном сверхпроводнике вихри образуют периодическую решетку. Такое состояние называли **смешанным**

Мир заметил эту работу лишь в 1962 г.

Одиночный вихрь



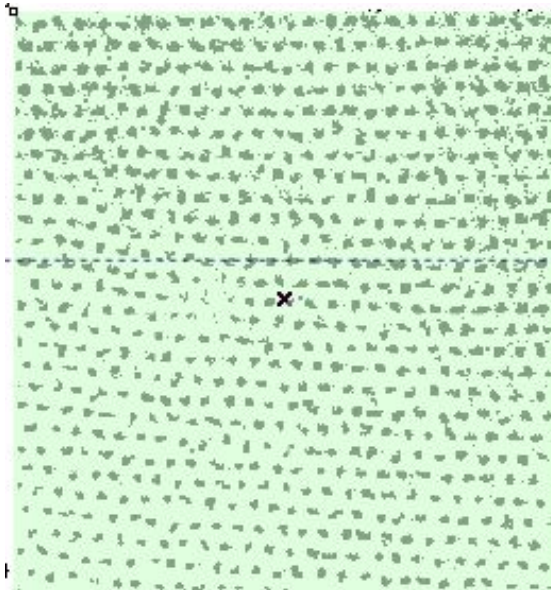
Вихревая решетка в сверхпроводнике II рода

В каждом вихре заключен квант магнитного потока:

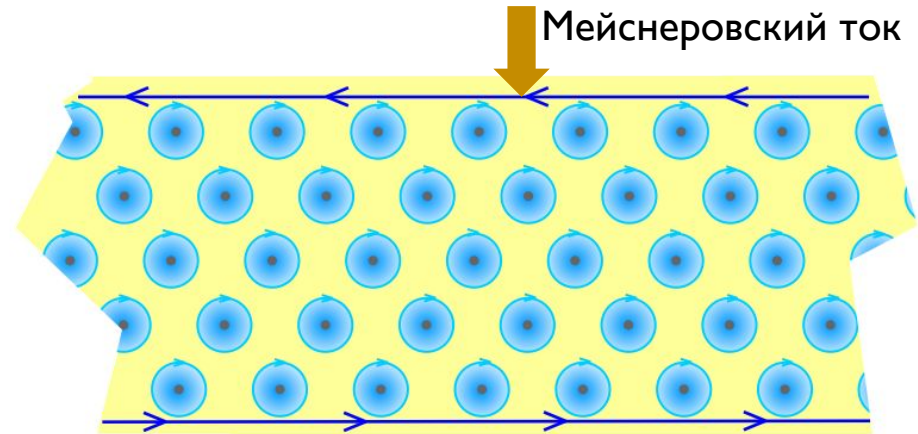
$$\Phi_0 = 2.07 \times 10^{-15} \text{ Вб}$$

Индукция в сверхпроводнике $n\Phi_0$, где n – плотность вихрей. Никаких других (неквантованных) полей в теле сверхпроводника нет !

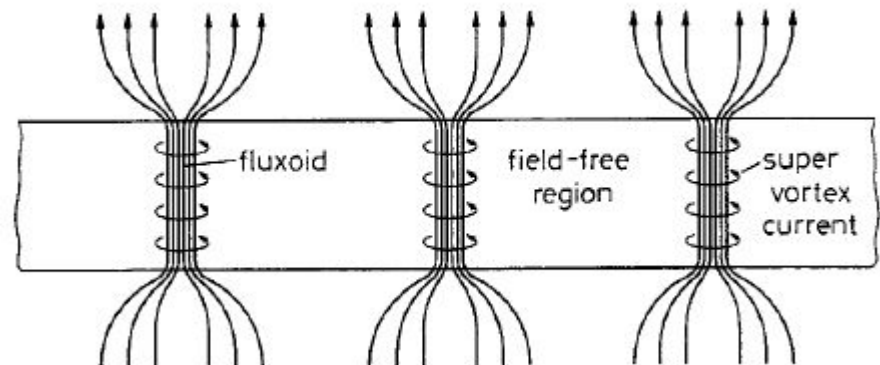
Экспериментальное наблюдение
вихревой решетки
(Тробль и Эссманн, 1966).



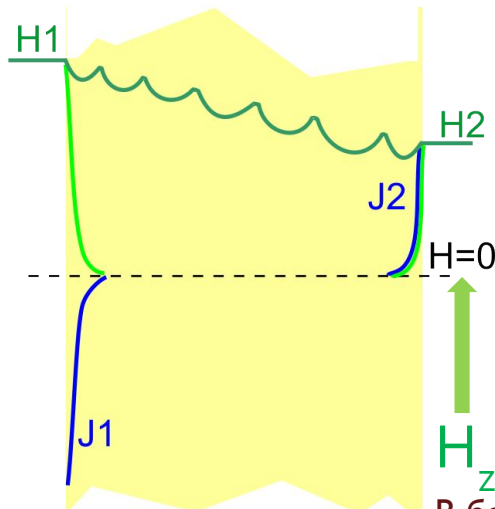
Решетка вихрей в ниобии.
Точки выхода вихрей из пластины
декорированы напылением частиц
железа.



В большинстве пособий мейснеровский ток не показан. Но, если бы его не было, ничто не препятствовало бы прониканию внешнего неквантованного поля в тело сверхпроводника!



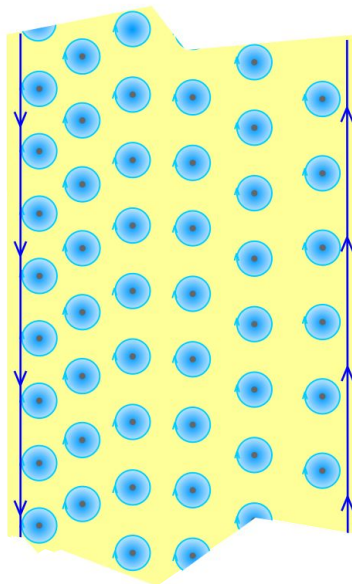
Ток в идеальном сверхпроводнике II рода (правило Сильсби не действует)



Плотность тока в объеме СП пластины $j_x = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial n}{\partial y} \Phi_0$, однако, замкнутые токи вихрей не могут создать результирующего тока. Результирующий ток возникает из-за разности мейснеровских токов на разных сторонах пластины, компенсирующих токи соответствующие скачкам плотности вихрей на краях пластины. Давление, возникающее из-за различия плотности вихрей соответствует силе Лоренца:

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{B_z^2}{2\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial n}{\partial y} \Phi_0 B_z = j_x B_z$$

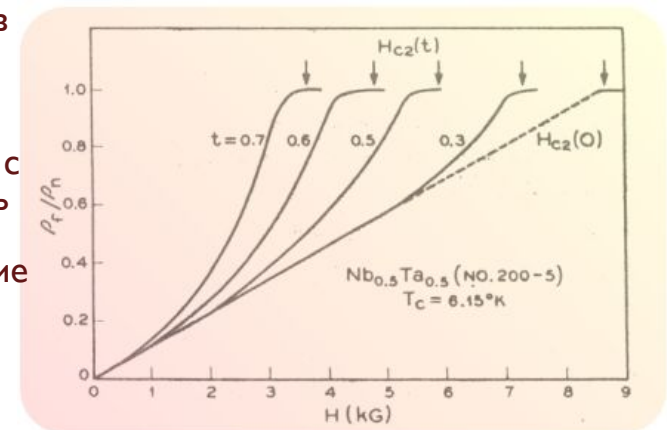
$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$$



В бездефектном СП II сколь угодно малая сила вызывает движение вихревой решетки в сторону меньшего поля. При этом возникает электрическое поле, совпадающее по направлению с током, что можно истолковать как возникновение сопротивления («сопротивление течения потока») r_f . Принято считать (Бардин и Стефен):

$$\rho_f = \rho_n \frac{B}{B_{c2}}$$

но экспериментально эту зависимость в чистом виде никто не наблюдал.



Зависимость r_f от поля
(Ким и др. 1967)

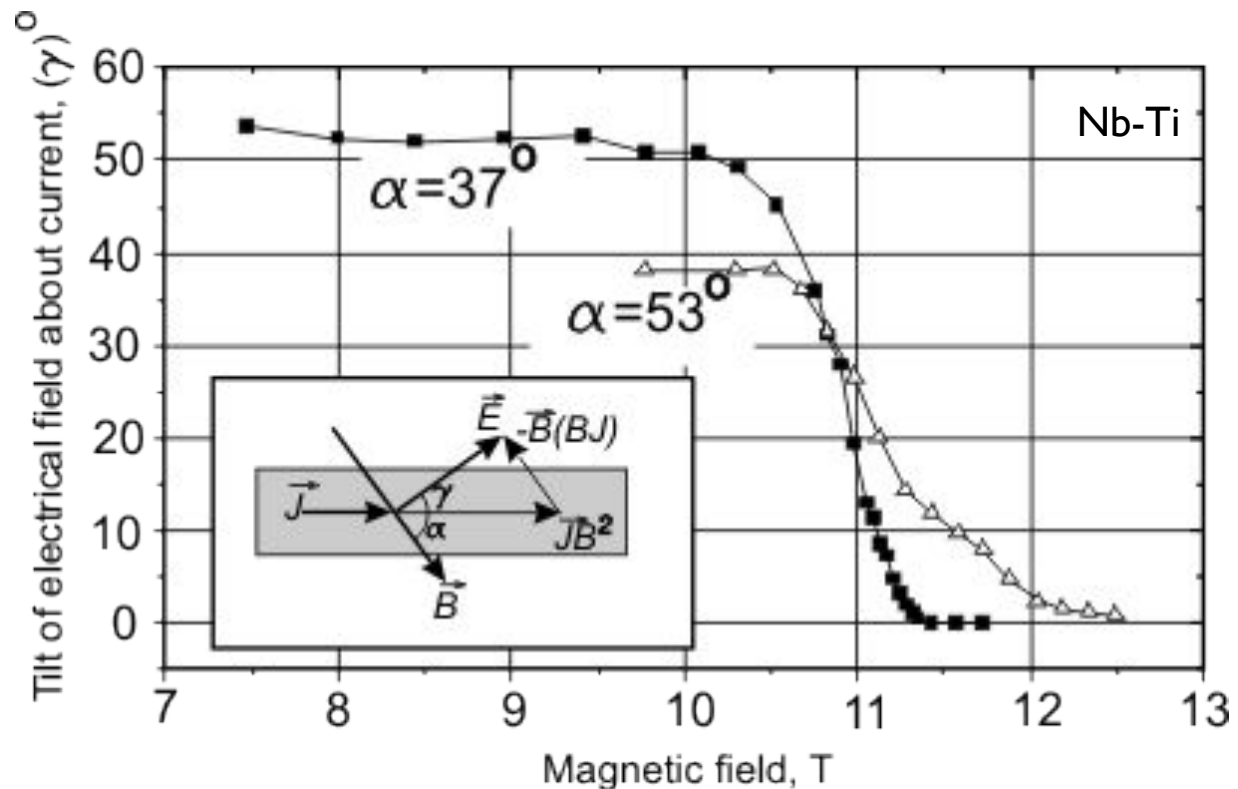
Доказательство того, что электрическое поле в сверхпроводнике генерируется движением вихрей

В наклонном магнитном поле в сверхпроводящем состоянии возникает сопутствующее электрическое поле, направленное навстречу магнитному. Это является наглядным подтверждением того, что электрическое поле в сверхпроводнике генерируется движением квантованного магнитного потока. В нормальном же состоянии компоненты магнитного потока независимы, ток вызывает движение только нормальной к нему компоненты, и электрическое поле направлено по току.

При снижении магнитного поля от B_{c2} угол между током и электрическим полем увеличивается от

$$\text{нуля до } \gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

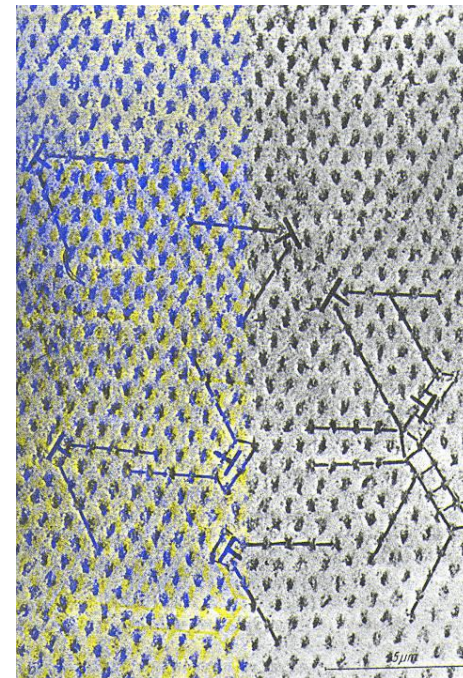
на протяжении 1.5-2 Тл, что свидетельствует о сильной макроскопической неоднородности материала



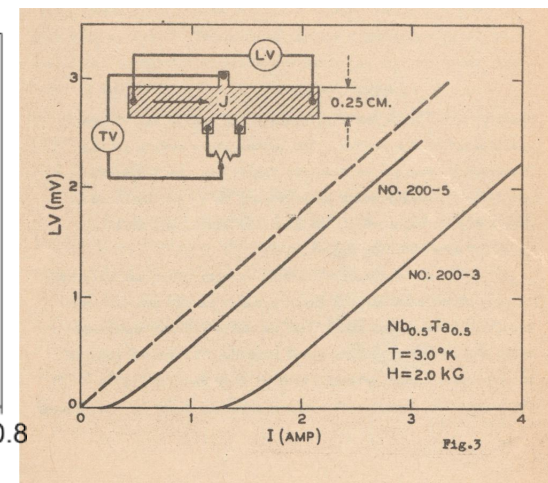
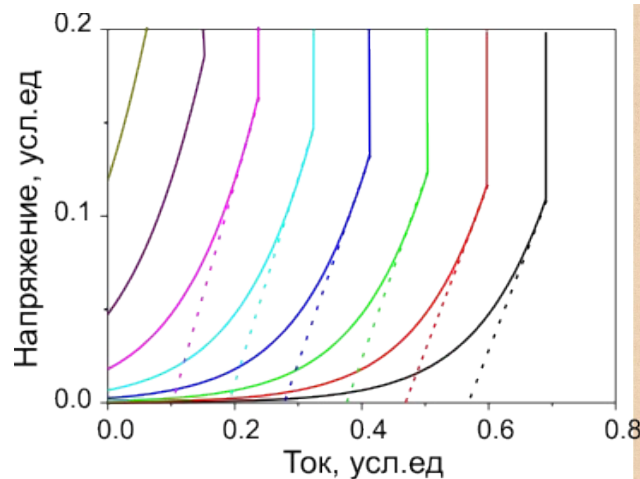
Пиннинг вихрей в дефектном СПИ

Даже небольшие дефекты структуры сверхпроводника нарушают регулярность решетки вихрей и ограничивают ее подвижность. Если при протекании тока вихри неподвижны, то не возникает электрического поля и ток течет без сопротивления. Чем прочнее закреплены вихри, тем выше токонесущая способность сверхпроводника.

До сих пор существует заблуждение, что более или менее регулярная решетка вихрей существует в сверхпроводниках с высокой токонесущей способностью. Введено понятие силы пиннинга решетки F_p , после преодоления которой силой Лоренца решетка двигается как целое с сопротивлением течения потока r_{flow} . Единственный, как бы подтверждающий это утверждение эксперимент приведен на нижнем рисунке справа.



ВАХ технических сверхпроводников обычно экспоненциальна и ограничена сверху тепловым срывом. Верхнюю часть экспоненты при желании можно принять за прямую линию (левый рисунок внизу).





Структура промышленного сплава НТ-50 в сопоставлении с решеткой вихрей. Очевидно, никакая решетка не может существовать в такой структуре, но квантование магнитного потока сохраняется (так хочется думать).



Сверхпроводники с сильным пиннингом

В 1961 г. практически одновременно опубликованы две статьи в журнале *Phys.Rev. Letters*:

Kunzler J.E., Buehler E., Hsu F.S.L., Wernick J.H, **6**, p.89,(1961).

Berlincourt T.G., Hake R.R., Leslie D.H., **6**, p. 671,(1961).

В первой описывали сверхпроводимость Nb₃Sn при больших плотностях тока в магнитном поле 88 кЭ.

Во второй, сверхпроводимость в сильных магнитных полях и при больших плотностях тока в некоторых Nb-Zr сплавах.

Так стартовала прикладная сверхпроводимость.

В СССР работы по прикладной сверхпроводимости стартовали в 1962 г. в нескольких институтах. Наиболее успешной оказалась кооперация Курчатовского института и ВНИИ Неорганических материалов. Промышленное производство сверхпроводящей проволоки началось на Ульбинском металлургическом заводе в Г. Усть-Каменогорске в 1965 г. Практически одновременно с другими странами.

Основоположники прикладной сверхпроводимости в СССР

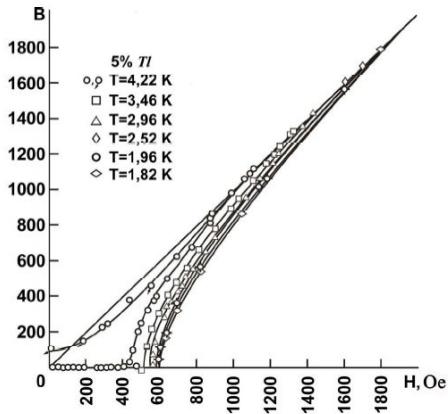


Б.Н.Самойлов
1920-1975



В.Я.Филькин
1930-2002

Повторение



- Наблюдение Л.В.Шубниковым проникания магнитного поля в сверхпроводник II рода естественно привело его к мысли об ограниченности эффекта Мейснера в этих сверхпроводниках.

Результат А.А.Абрикосова (обнаружение квантованных вихрей, в виде которых магнитный поток проникает в тело сверхпроводника) появился через 20 лет. Он заставляет пересмотреть мнение о неполном эффекте Мейснера. Чтобы в объеме сверхпроводника были только квантованные вихри, нужно чтобы он был полностью экранирован от континуального поля вплоть до B_{c2} .

- Таким образом, в сверхпроводнике II рода сосуществуют два явления: полный эффект Мейснера и проникание квантованных вихрей в заэкранированное от внешнего поля тело сверхпроводника.

Повторение

В сверхпроводниках II рода поверхностная энергия на границе раздела нормальной и сверхпроводящей фаз отрицательна. Сверхпроводнику выгодно пропустить через себя магнитный поток, распавшись на смесь нормальной и сверхпроводящей фаз. Размер нормальных областей ограничен снизу тем, что проходящий через эту область магнитный поток не может быть меньше **кванта магнитного потока** $\Phi_0 = 2.07 \cdot 10^{-15} \text{ Вб}$.

Вихри отталкиваются друг от друга и в однородном сверхпроводнике образуют правильную решетку.

При усреднении по областям, размеры которых превышают период решетки к сверхпроводнику можно применять классические уравнения Максвелла: Плотность вихрей в решетке пропорциональна индукции $B = n\Phi_0$.

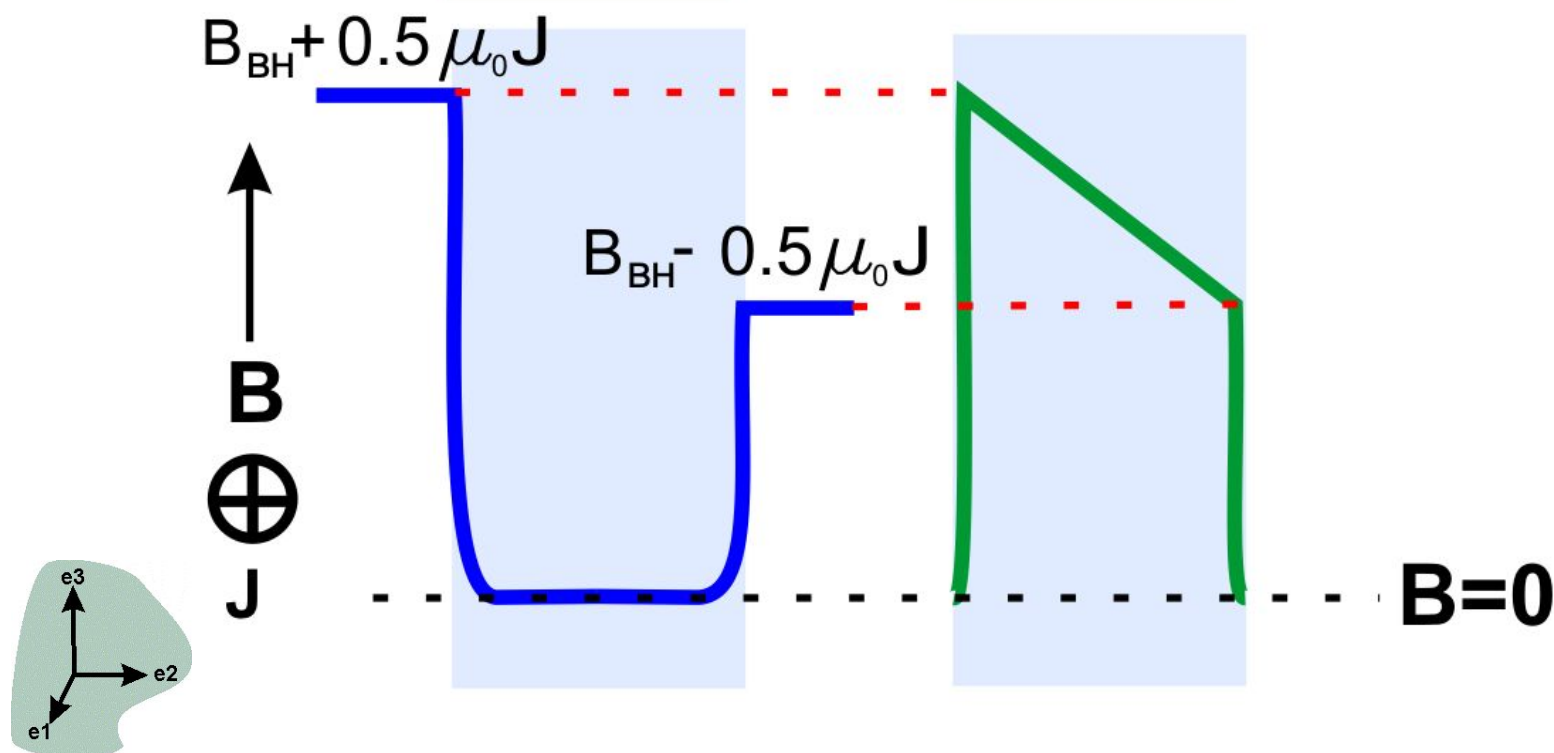
Ток, протекающий по сверхпроводящей пластине, пропорционален $\text{rot} B / \mu_0 \sim dn/dy$.

Из-за перепада плотности вихрей возникает давление, направленное в сторону градиента плотности и численно равное силе Лоренца $F_L = j \times B$.

Под действием этой силы вихри приходят в движение и генерируют электрическое поле $E = -v \times B$ в направлении тока.

В неоднородном сверхпроводнике вихри цепляются за неоднородности структуры и приходят в движение только при превышении силой Лоренца некоторого критического значения. До достижения этой величины ток течет без сопротивления.

Протекание тока по сверхпроводнику



Ансамбль вихрей (замкнутых токов) сам по себе не может создать транспортного тока.

Транспортный ток создается разностью мейснеровских токов.

Однако, поскольку плотность вихрей на границах СП пластины совпадает с внешним полем, перепад плотности вихрей в теле пластины равен μ_0 , а плотность тока $\mu_0 \mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{e}_1 dB/dy$. Чем крепче закреплены вихри, тем больше допустимый перепад индукции в теле пластины.

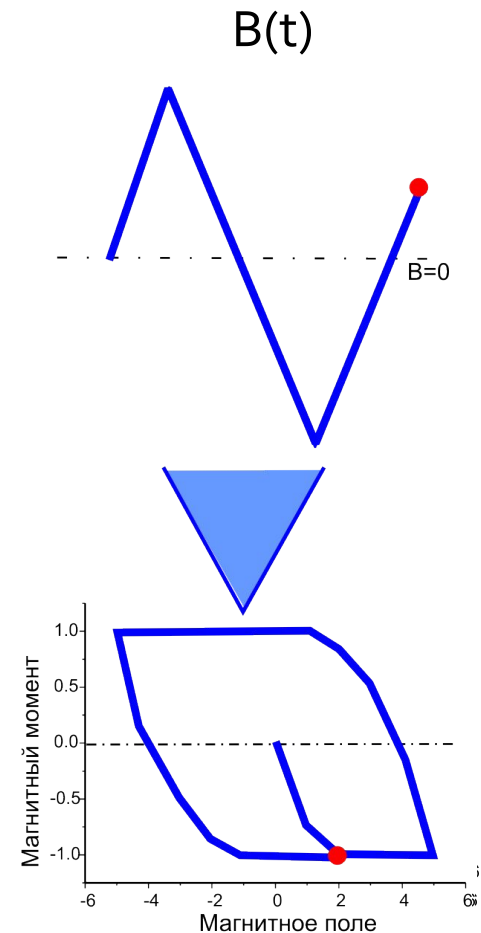
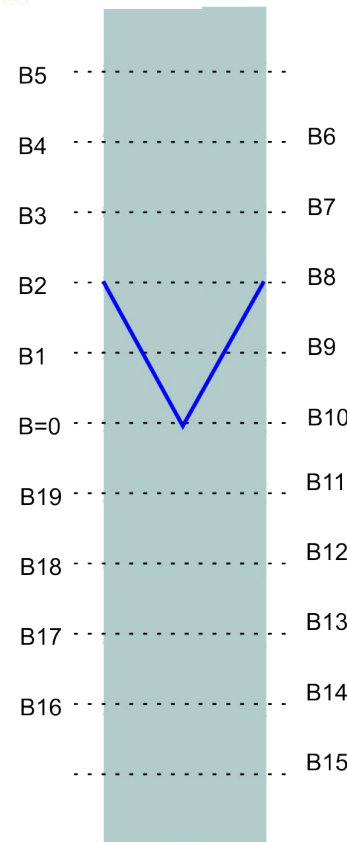
Намагниченность технического сверхпроводника

Построим магнитный момент пластины в магнитном поле $M = 2 \int_0^a J(y) dy$, пользуясь простыми правилами

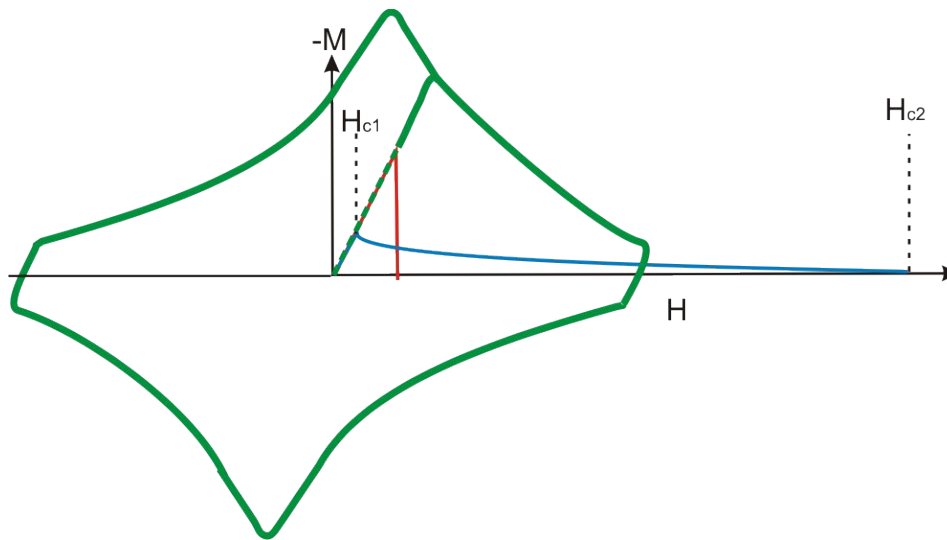
1. Индукция на поверхности пластины равна индукции поля вне пластины.

2. Магнитный поток перемещается в направлении меньшей индукции (в эту сторону действует давление). Аналогия с песчаным каньоном.

3. Ток (наклон профиля поля) течет с критической плотностью. (для упрощения допустим, что критический ток не зависит от магнитной индукции).
Такую модель предложил в 1962 г. Ч. Бин, она называется **моделью критического состояния (МКС)**



Площадь гистерезисной петли равна тепловыделению при перемагничивании сверхпроводника



Магнитный момент сверхпроводников с сильным пиннингом радикально отличается от магнитного момента сверхпроводников I и II рода:

1. Много больше по абсолютной величине
2. Необратим

Естественно такие сверхпроводники стали называть сверхпроводниками III рода.

Это сильно задело самолюбие авторов деления сверхпроводников на два рода по величине

$$\kappa = \frac{\lambda}{\xi} > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \kappa = \frac{\lambda}{\xi} < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad . \text{ Не помню}$$

всего в ЖЭТФ, появилась статья Н.В.Заварицкого, где он утверждал, что Сверхпроводники III рода следует относить ко II роду, а никакого III рода быть не может. Так похоронили очень удобный термин.



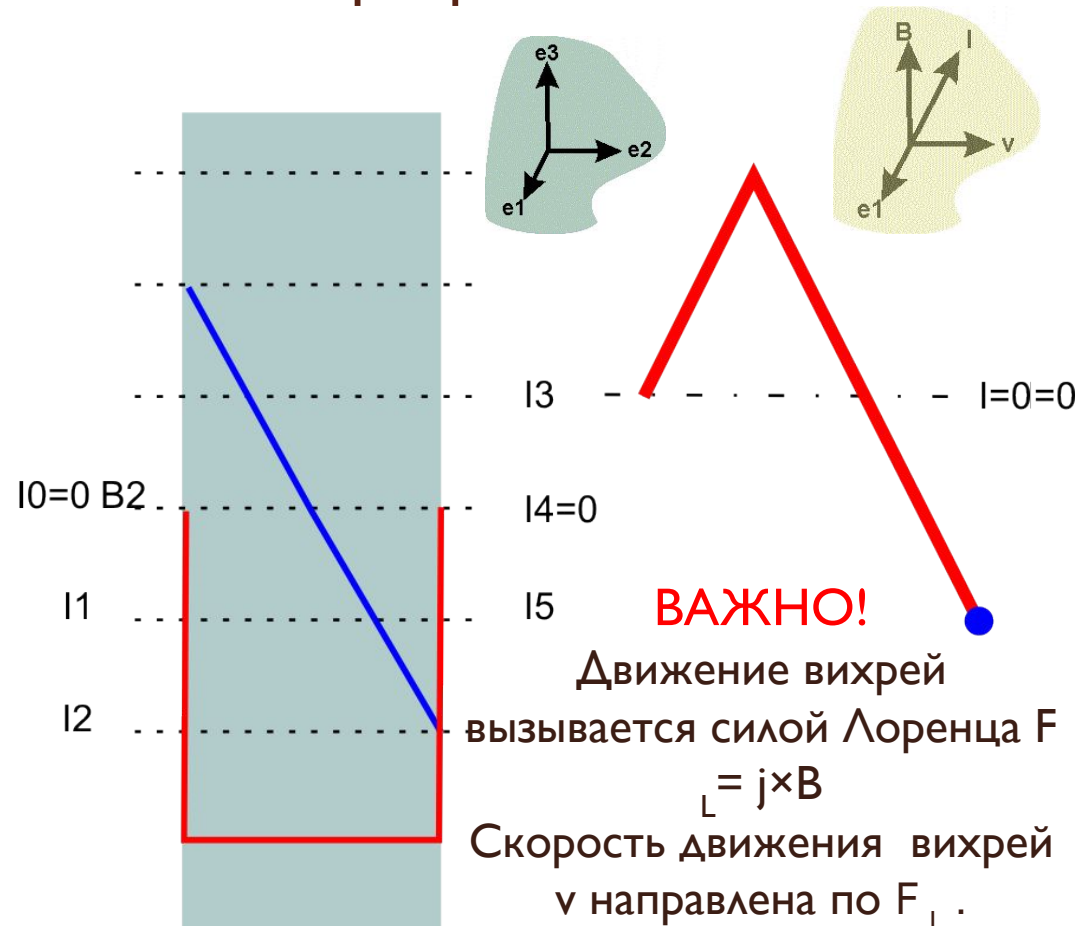
Н.В.Заварицкий
1925-1997

Ток в техническом сверхпроводнике

- Наиболее просто изучать распределение тока в пластине, поскольку магнитное поле на ее поверхности зависит от величины полного тока и не зависит от его распределения.
- Для построения распределения полей в этом случае, как и в предыдущем мы воспользовались моделью «критического состояния» (Ч.Бин 1962)

Модель критического состояния (МКС) :

**ток течет по
сверхпроводнику
с критической плотностью**



ВАЖНО!

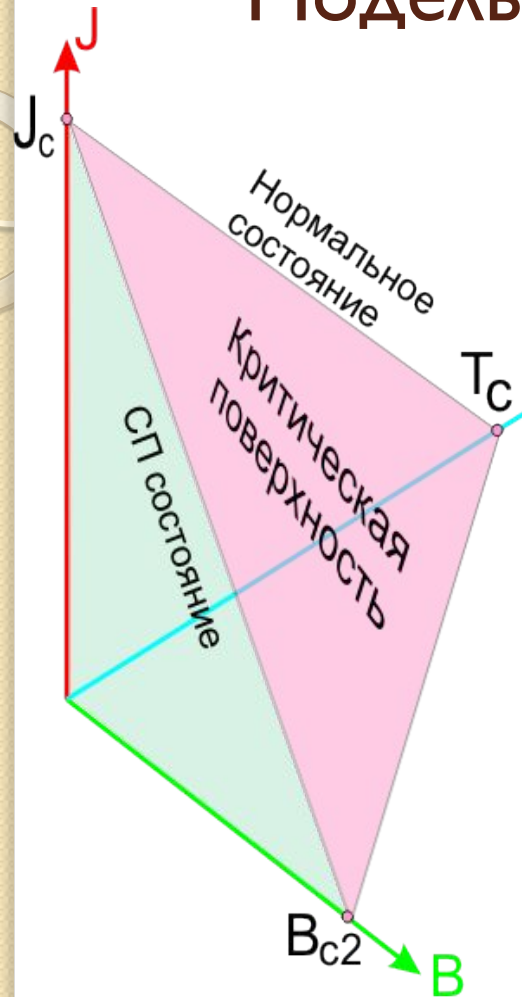
Движение вихрей
вызывается силой Лоренца $F_L = j \times B$

Скорость движения вихрей v направлена по F_L .

Электрическое поле $E = -v \times B$ направлено по току, т.е. при всех изменениях полей и токов генерируется тепло:

$$Q = jE > 0$$

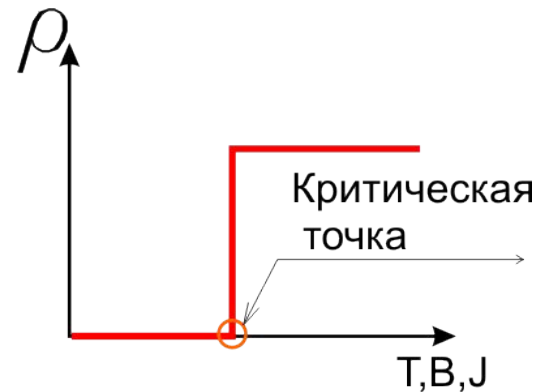
Модель критического состояния



$$T/T_c + B/B_{c2} + J/J_c = 1$$

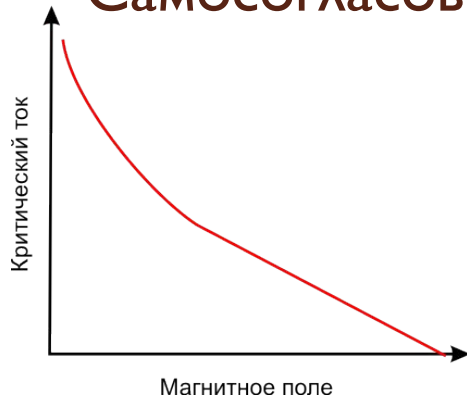
Уравнение критической поверхности в отрезках

МКС допускает, что при переходе из сверхпроводящего состояния в нормальное сопротивление возрастает скачком от нулевого значения до сопротивления в нормальном состоянии.



Это вроде бы соответствовало эксперименту, пока он проводился с низкой чувствительностью (на уровне ~ 10 мВ/см, поскольку за критический ток принимали скачок сопротивления, вызываемый перегревом провода. При повышении чувствительности измерений обнаружили, что скачку предшествует участок экспоненциального нарастания напряжения с ростом тока.

Самосогласованные распределения полей и токов



$$j_c(\mu_0 H_s) = \frac{I_c(H_s)}{S}$$

Критический ток зависит от индукции. Вклад собственного поля тока бывает достаточно большим. Поэтому плотность критического тока зависит от координаты в сечении провода. Определение зависимости критической плотности тока от индукции делением критического тока на сечение провода не всегда корректно, т.е. равенство не всегда верно. Оказывается, что в больших

внешних полях это выражение можно применять. Если же внешнее поле мало, а поле тока столь велико, что внутри сечения провода имеется точка с нулевой индукцией, то необходимо решать самосогласованную задачу.

Рассмотрим критический ток провода в нулевом поле. Пусть $j_c = \alpha/B$. Уравнение $\text{rot } H = j_c$ в цилиндрических координатах имеет $\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rH_\varphi) = \frac{\alpha}{H_\varphi}$. Решив это линейное уравнение, можем рассчитать критический ток

$$I_c(0) = 2\pi \int_0^R r j_c(r) dr = 2\pi \sqrt{R^3 \frac{2\alpha}{3}}$$

I_c не имеет в нуле особенности, хотя j_c обращается в бесконечность

Рассмотрим вопрос о распределении тока в сечении провода подробнее. Поскольку причиной преодолевающей пиннинг считаем силу Лоренца, то более физически оправданным считается изучение зависимости критической силы Лоренца от поля. Её принято представлять в виде

купола
$$|\mathbf{j}_c \times \mathbf{B}| = F(b) = A \cdot b^\gamma (1 - b)^\delta \quad b = \frac{B}{B_{c2}}$$
$$F(0) = F(1) = 0$$

и это кажется естественным, если под B понимать внешнее поле, а под критической плотностью тока критический ток, деленный на сечение, поскольку слева нулю равно поле, а справа нулю равен критический ток.

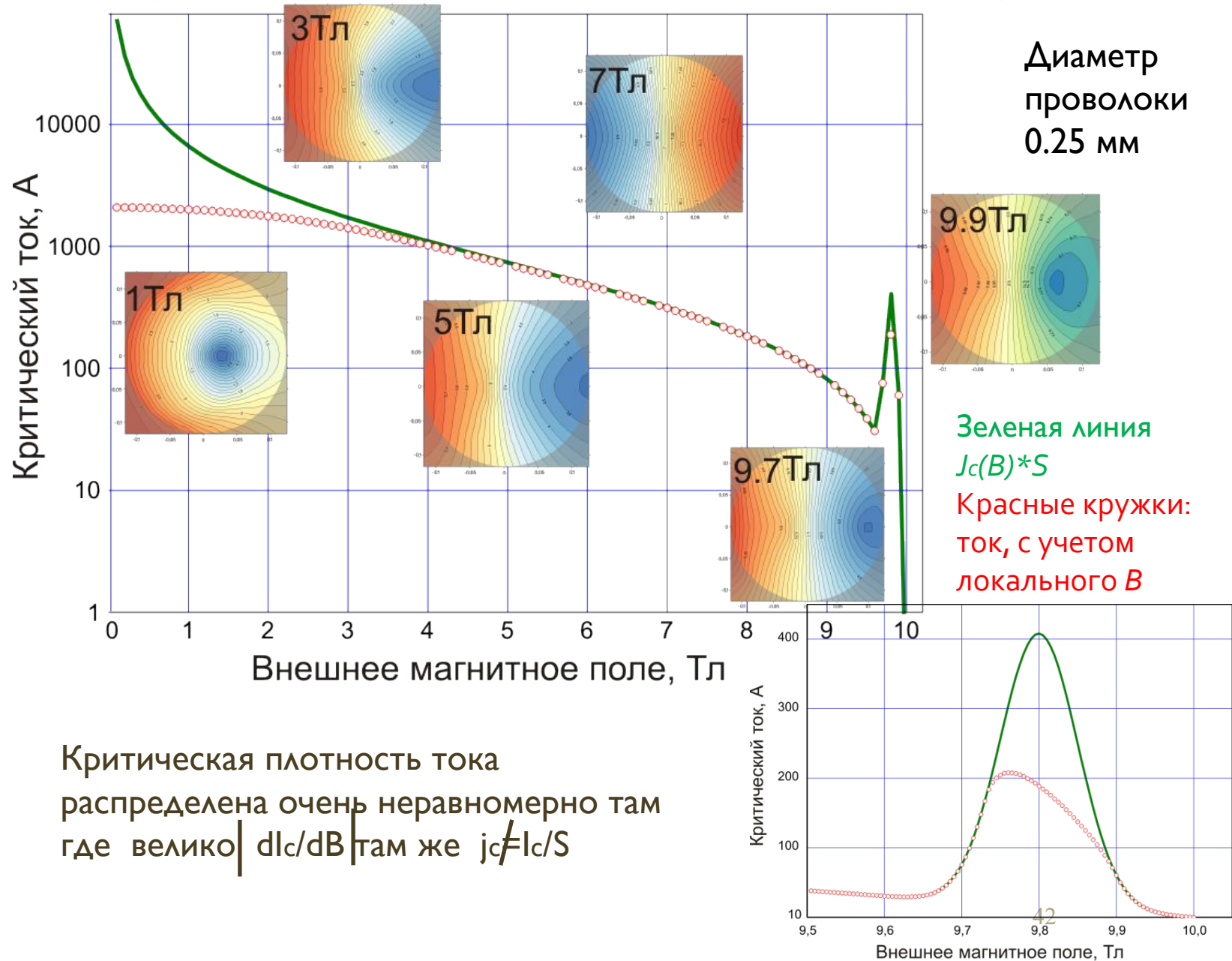
Но это не так!

Физика заключается в том, что локальное значение плотности тока взаимодействует с локальным полем, являющимся геометрической суммой внешнего поля и поля тока.

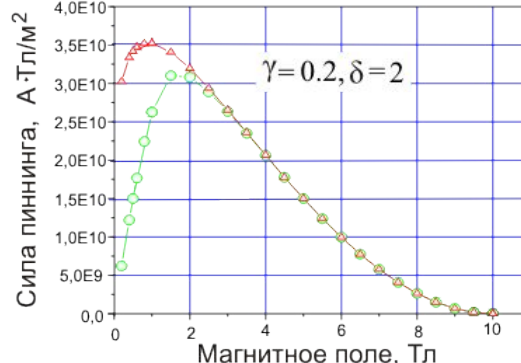
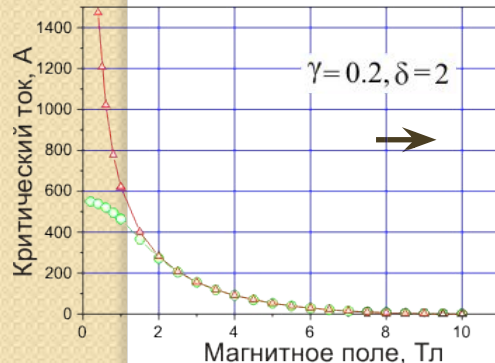
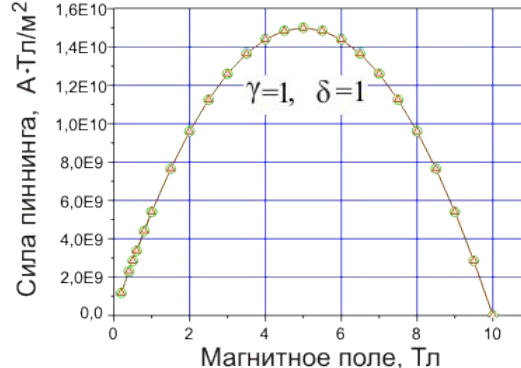
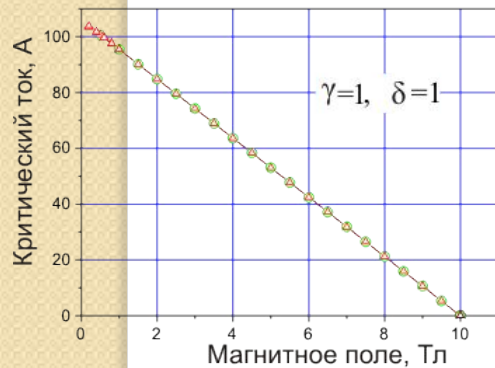
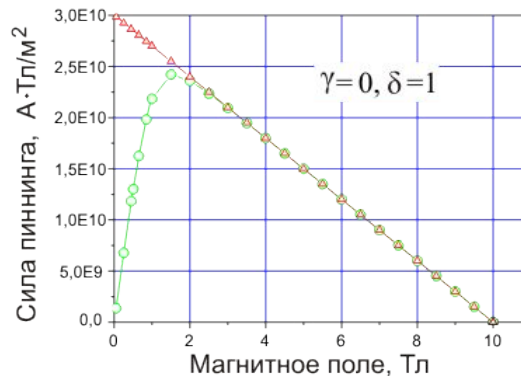
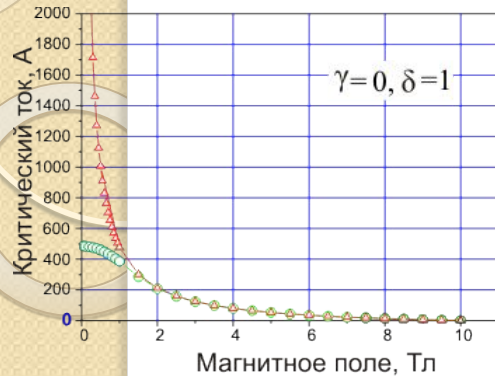
Поэтому, прежде чем что-либо подставлять в выражение для $F(b)$ надо решить самосогласованную задачу и определить распределения плотности тока по сечению провода.

Задача эта, как правило легко решается итерациями: в нулевом приближении принимаете плотность критического тока однородной, рассчитываете распределение поля в сечении и подправляете распределение плотности тока и так много раз.

Неоднородность распределения j и B по сечению СП проволоки



Проверка адекватности формулы, описывающей силу пиннинга.



Красными линиями обозначены сила пиннинга, рассчитанная по формуле и критический ток, рассчитанный как отношение $F(b)/b$.

Зелеными линиями ток (I_c), определенный итерациями, и $F(b)=B \cdot I_c / S$

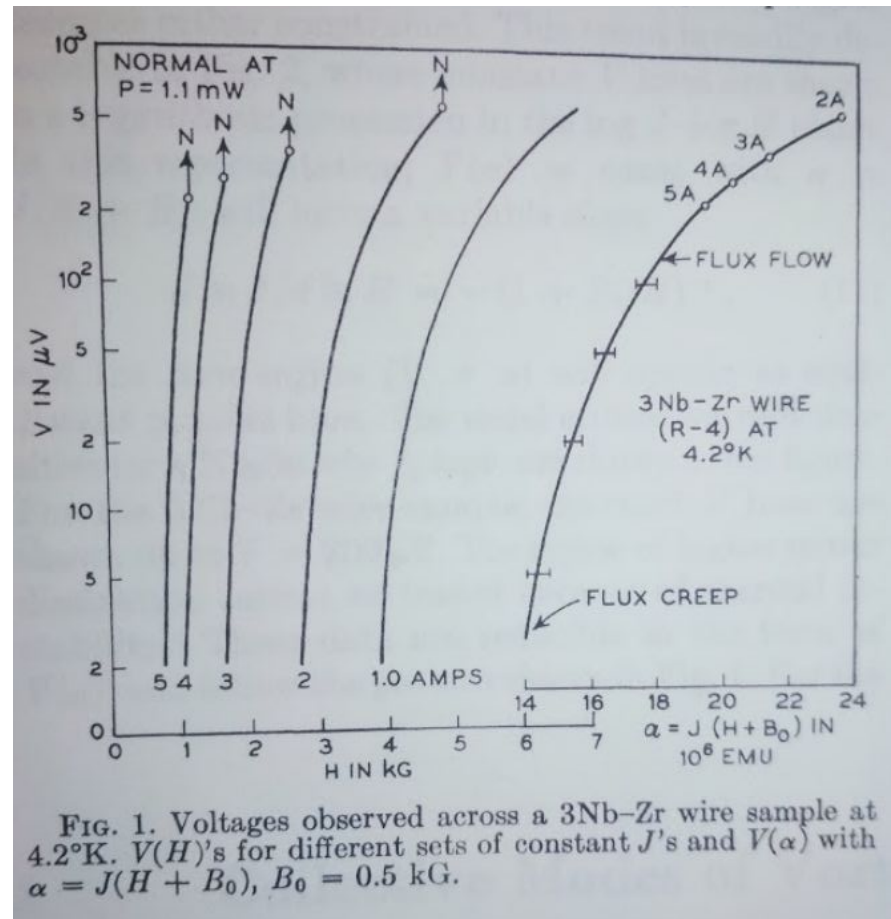
Видим, что $F(0)$ не всегда равно нулю.

Действительно, разумно говорить лишь о пределе F при $b \rightarrow 0$.

Вообще -то этот расчет компрометирует исходную формулу $F(b) = A \cdot b^\gamma (1 - b)^\delta$

«крип» магнитного потока (история заблуждений)

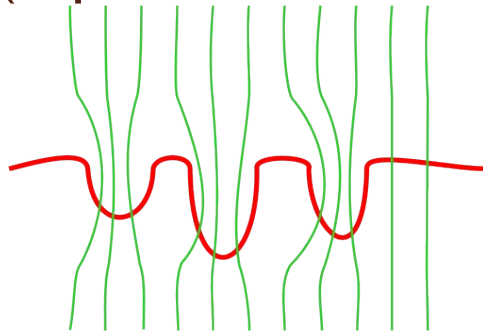
В начале шестидесятых группа из *Bell Telephone Lab* (Y. Kim, C. Hempstead, A. Strnad) активнее других экспериментально изучали сверхпроводящие проволоки. Возможно, они имели более чувствительные приборы, но, скорее, они имели руководящую идею, а такая идея позволяет планировать эксперимент. В 1962 году они обнаружили, что скачкообразному переходу образца предшествует экспоненциальный участок вольт-амперной характеристики.



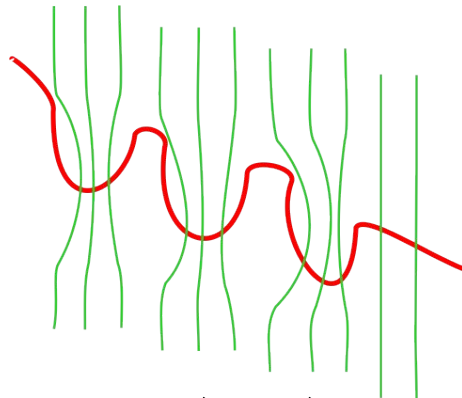
На основании этих результатов P. Anderson предложил модель крипа магнитного потока по аналогии с ранее изучавшимся им крипом дислокаций.

Модель Андерсона

(вариант объяснения экспоненциальной формы ВАХ)



$$B \neq 0, I = 0$$



$$B \neq 0, I \neq 0$$

Неоднородности материала (поры, включения нормальной фазы) размером более диаметра нормальной сердцевины вихря ($\sim 10-50$ нм) являются потенциальными ямами для вихрей. Они пиннингуют (to pin - пригвоздить, прищипливать) вихри.

Если по сверхпроводнику идет ток, на вихри действует сила Лоренца $F_L = j \times B = dU/dy$. Она перекашивает потенциальный рельеф. При этом высота барьера с одной стороны потенциальной ямы повышается, а с другой понижается. Если вихри способны воспринимать тепловые возмущения, то вероятность выброса их из потенциальной ямы в сторону пониженного барьера выше.

$$E = v_0 B l \exp \left(\frac{U_0 - j B V_c r_p}{k_B T} \right)$$

Параметры: v_0 - частота колебаний связки вихрей, l - длина скачка связки вихрей, U_0 - глубина потенциальной ямы, V_c - объем связки вихрей, r_p - характерный размер вариации потенциального рельефа.

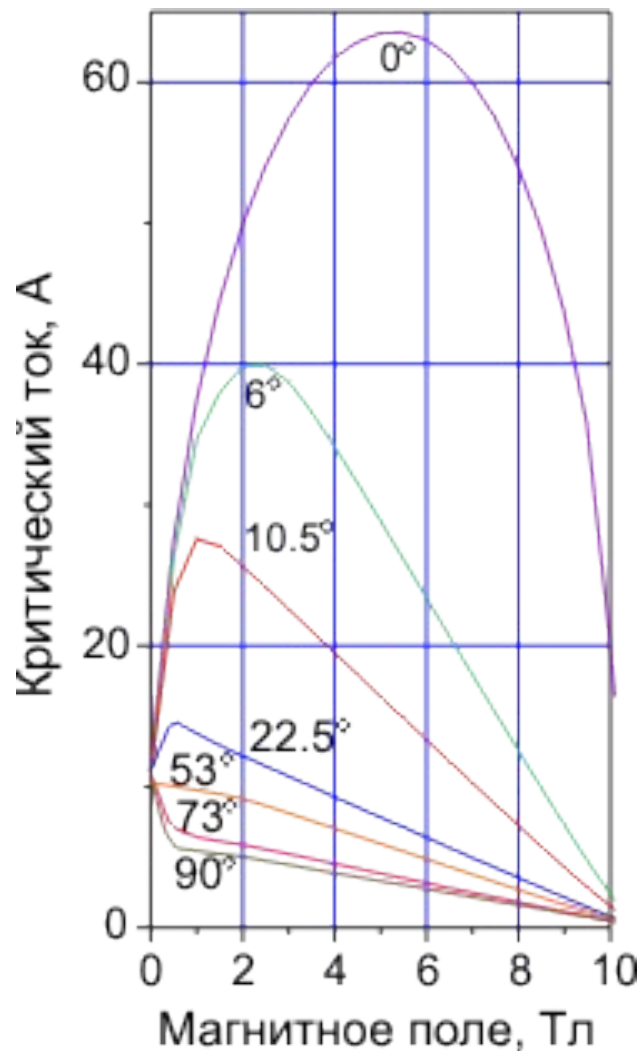
Следствия модели Андерсона

1. Критический ток стал условной величиной, он зависит от электрического поля, при котором фиксируется:

$$j_c = \frac{1}{BV_c r_p} [U_0 - k_B T \ln \left(\frac{E_c}{v_0 B l} \right)]$$

2. Модель предсказывает линейную зависимость критического тока от температуры. Однако в эксперименте действительно существующая линейная зависимость пересекает ось температур в точке T_c , зависящей лишь от состава сплава, а у Андерсона точка пересечения зависит от глубины потенциальной ямы.
3. Величина U_0 достаточно просто определяется в эксперименте. Оказалось, что она зависит от температуры и магнитного поля.
4. Модель предсказывает существование конечного электрического поля при нулевом токе.
5. Вместо экспериментальной проверки модели, экспериментаторы стали изучать зависимости ее параметров от температуры, магнитного поля и тока.
6. Будучи в 1962 г. единственной моделью, объясняющей экспоненциальный ход ВАХ, она вошла во все монографии. Новые поколения воспринимают эту модель как каноническую.

Ориентационная зависимость критического тока



Критический ток зависит от угла между направлениями тока и магнитного поля.

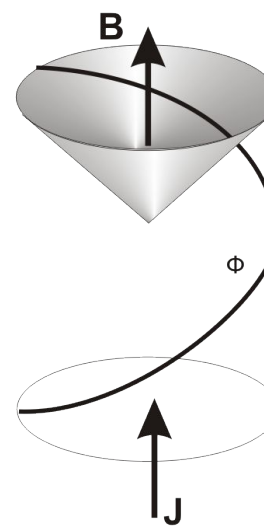
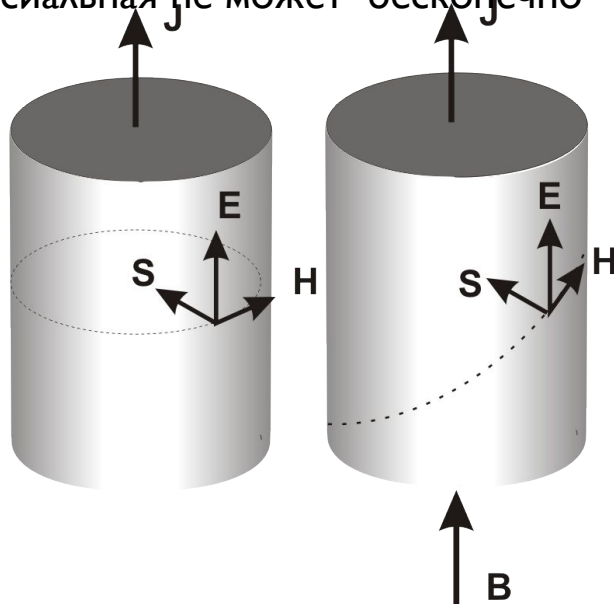
В первом приближении можно считать, что это обусловлено уменьшением силы Лоренца при уменьшении угла между полем и током, в то время как критическая сила Лоренца остается постоянной.

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{J} \times \mathbf{B} = JB \sin \alpha \quad J_c = F_L / B \sin \alpha$$

Это приближение неприменимо к случаю малых углов, согласно ему критический ток стремился бы к бесконечности при уменьшении угла до нуля.

Сверхпроводник с током в продольном поле

Тепло, генерируемое током равно интегралу от вектора Пойнтинга по поверхности провода, в сверхпроводнике также как и в нормальном металле. В случае провода в продольном магнитном поле силовые линии имеют форму винта. В случае сверхпроводника такую форму имеют вихри. Двигаясь к оси проволоки, они несут с собой азимутальную и аксиальную компоненты. Азимутальные схлопываются на оси. Их движение генерирует продольное электрическое поле. Аксиальная не может бесконечно



накапливаться, она должна уходить наружу. Есть основания считать, что винтовой флюксод распадается на компоненты, для каждой из которых возникает свое критическое состояние. Движение аксиальной компоненты наружу должно генерировать азимутальное электрическое поле. Эксперимента не было.

$$\frac{dW}{dt} = \int_{S_{\text{очн}}} j E ds = \oint_{S_{\text{цил}}} S dl$$

модель Андерсона

Это первая модель, попытавшаяся объяснить круг известных тогда явлений, и относиться к ней надо с уважением.

Исходная идея: Объяснить линейную зависимость критического тока от температуры. Действительно, вроде бы удалось:

$$j_c = \frac{U_0}{BV_c r_p} - k_B T \cdot \ln \frac{E_c}{v_0 B l}$$

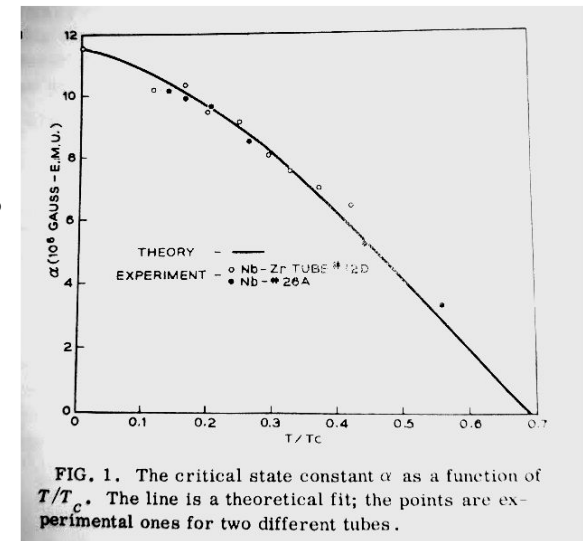
Но сам Андерсон в этой же статье указывает на грубость модели, в частности на то, что не учтена зависимость $U_0(B, T)$.

На СП сообщество произвело впечатление объяснение экспоненциальной формы вольт-амперной характеристики и к этому свелась экспериментальная проверка модели.

Предложенная модель дает связь между током и электрическим полем, что могло бы позволить построить электродинамику этих новых материалов, но большое количество произвольно введенных параметров и их зависимость от B, T, j не позволили это сделать. Усилия экспериментаторов свелись к изучению этих зависимостей, а вера в истинность модели не позволяла искать другое материальное уравнение.

Модель часто упрекали в том, что она предсказывает конечное электрическое поле при нулевом токе. Но дело в том, что приведенная формула имеет ограниченную область применения. Подправленное выражение:

$$E = E_0 \exp\left(\frac{U_0}{k_B T}\right) \operatorname{sh}\left(-\frac{j B V_c r_p}{k_B T}\right)$$



Критический эксперимент

Этот эксперимент провел А.В.Митин в 1987 г. Он изучал зависимость крутизны вольт-амперной характеристики проволоки от температуры. Из модели Андерсона следовало бы :

$$\frac{\partial \ln E}{\partial j} = - \frac{BV_c r_p}{k_B T}$$

Т.е. крутизна должна быстро увеличиваться со снижением температуры. В эксперименте она оставалась постоянной.

К сожалению Митин отверг простейшее объяснение, что вид вольт-амперной характеристики определяется неоднородностью сверхпроводника и выдвинул удивительную «физическую» идею о том, Что вихри могут тунелировать при низких температурах.

Увы, эта идея была подхвачена СП сообществом и породила сотни статей о тунелировании вихрей!

Альтернативная модель

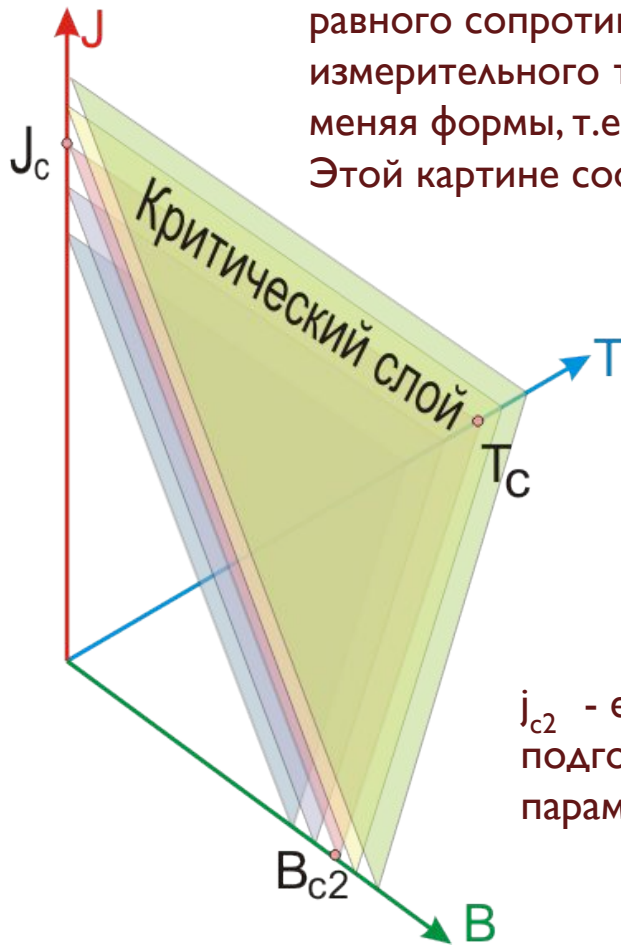
Реальная размытость перехода заставляет заменить критическую поверхность переходным слоем, состоящим из поверхностей равного сопротивления. Кривые перехода $r(T)$ и $r(B)$ с увеличением измерительного тока, смещаются в сторону уменьшения T и B не меняя формы, т.е поверхности параллельны.

Этой картине соответствует материальное уравнение:

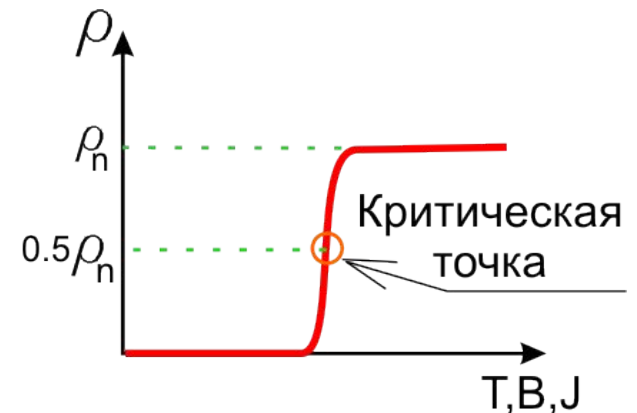
$$\sigma_{eff} = \sigma_n \left\{ 1 + \exp \left[\left(1 - \frac{T}{T_c} - \frac{B}{B_{c2}} - \frac{j}{j_{c/2}} \right) \frac{1}{\delta} \right] \right\}$$

Cryogenics **20**, 307, (1980).

Это выражение описывает переход такой формы:



j_{c2} - единственный подгоночный параметр

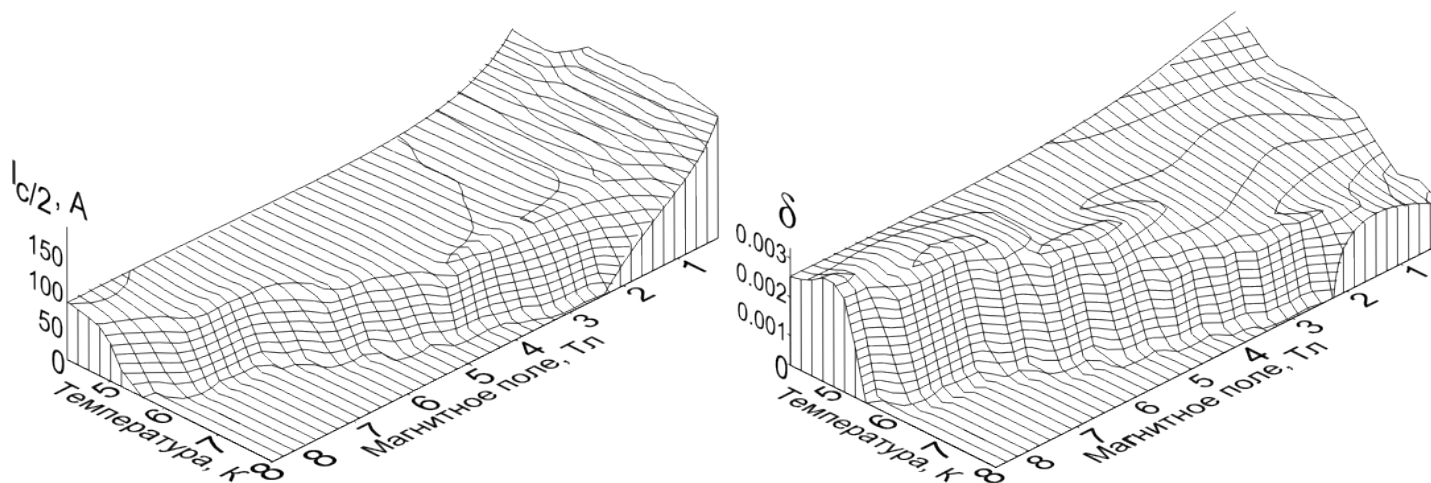


Переходы по температуре и полю имеют именно такую форму. Полный переход по току снять не удастся из-за перегрева образца током.

Постоянство параметров ОАХ (проволока НТ)

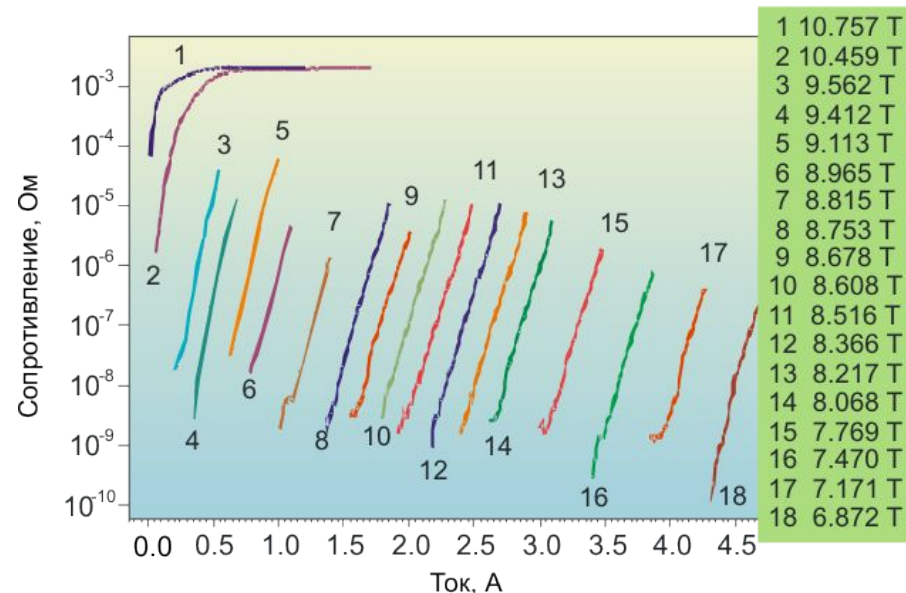
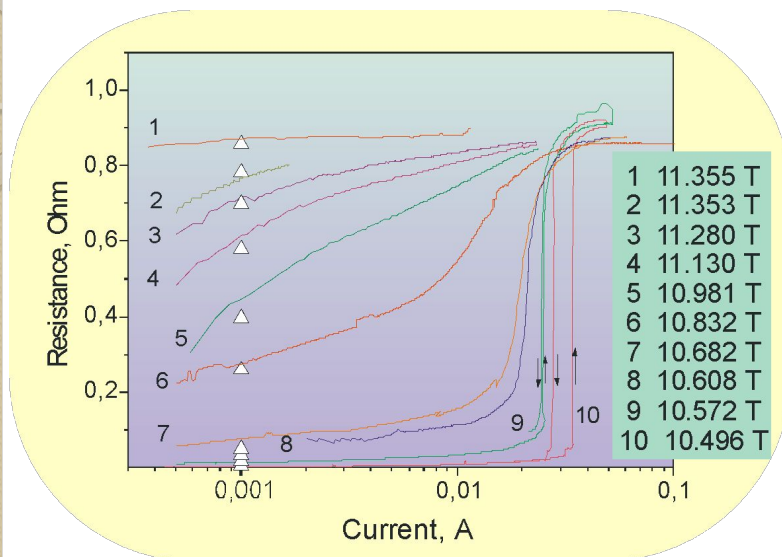
Причиной размытости перехода является **неоднородность зерен**. Кинетические переходы по температуре, магнитному полю и току равноправны и описываются зависимостью сопротивления от этих параметров. Вместо вольт-амперной характеристики (ВАХ) следует использовать ом-амперную характеристику (ОАХ).

Обработка большого массива ОАХ ниобий-титановой и ниобий-циркониевой проволок в широком диапазоне полей и температур показала, что j_{c2} и δ являются хорошими константами

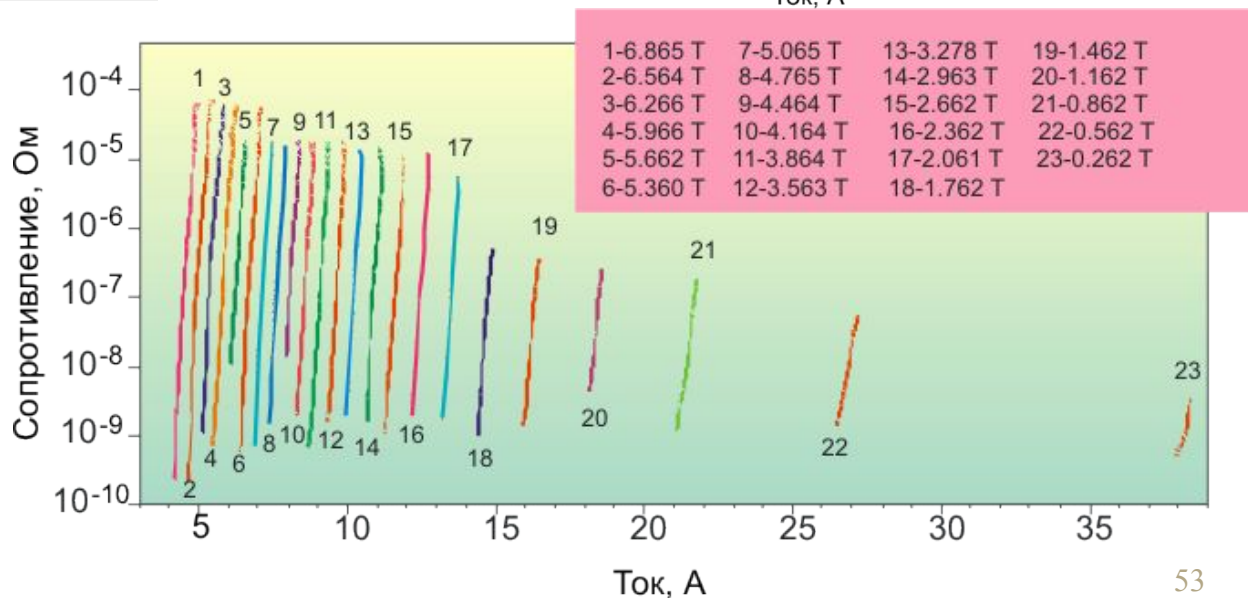


Таким образом, приближение плоского критического слоя хорошо описывает свойства ниобий-титановой проволоки. Параметры T_c и B_{c2} близки к термодинамическим значениям, а $j_{c/2}$ и δ постоянны в широкой области полей и температур. Нарушение постоянства в малых полях обусловлено анизотропией материала (см. слайд)

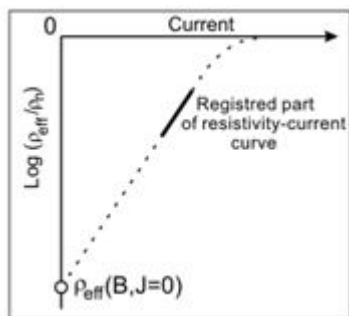
Модель Андерсона объясняет экспоненциальный характер ВАХ, альтернативная модель предсказывает экспоненциальный характер ом-амперной х-ки (ОАХ). Противоречия между ними, однако, нет, поскольку ВАХ достаточно круты



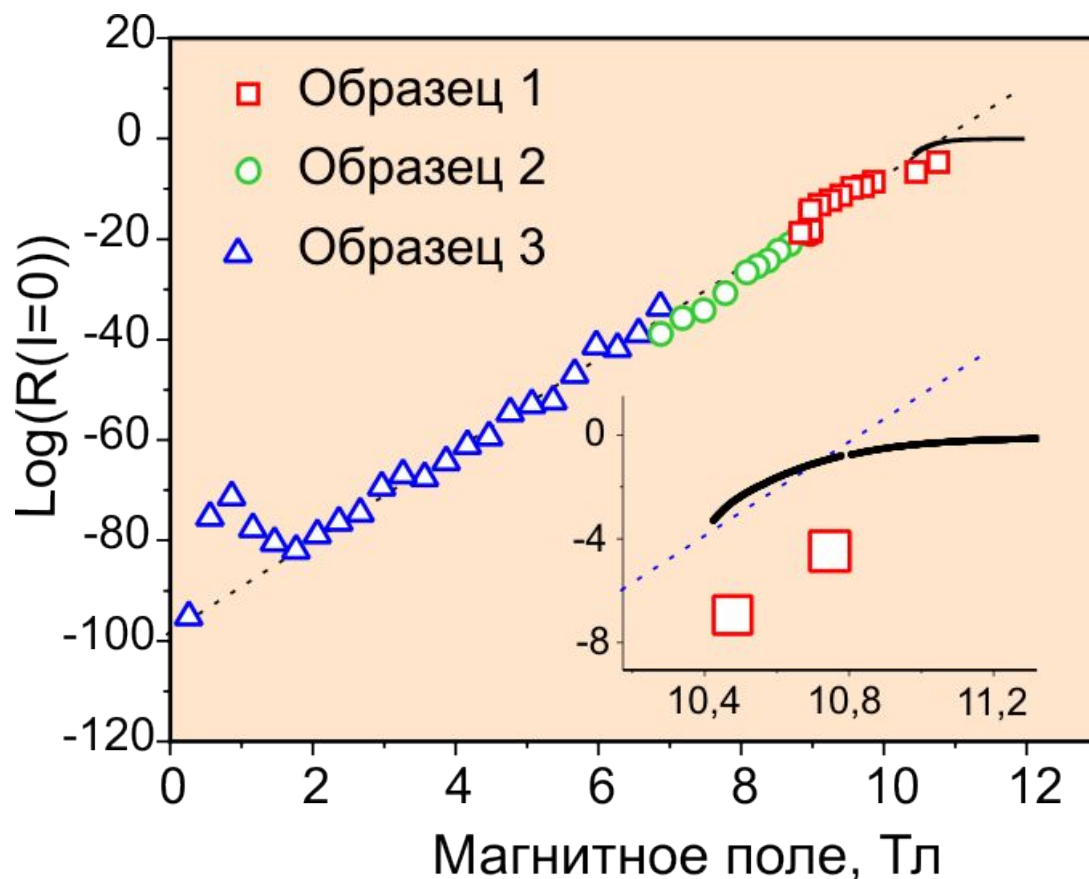
Детальные исследования ниобий-титановой проволоки свидетельствуют об адекватности альтернативной модели.



Экстраполяция ОАХ к нулевому току не столь бессмысленна, как экстраполяция ВАХ.

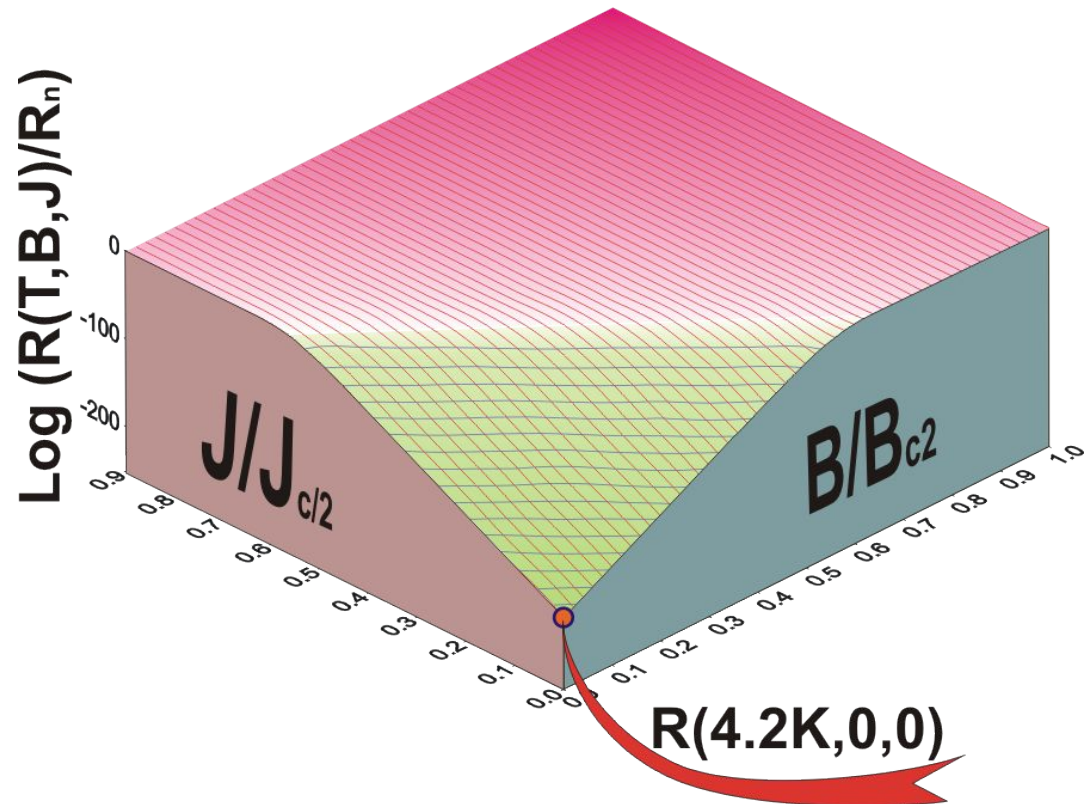


Такая экстраполяция позволяет обнаружить сопротивления, которые невозможно измерить другими способами. Ее результат не противоречит приведенному выше описанию ОАХ, даваемую альтернативной моделью.



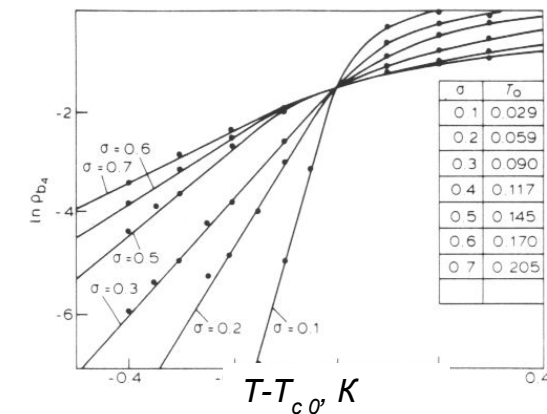
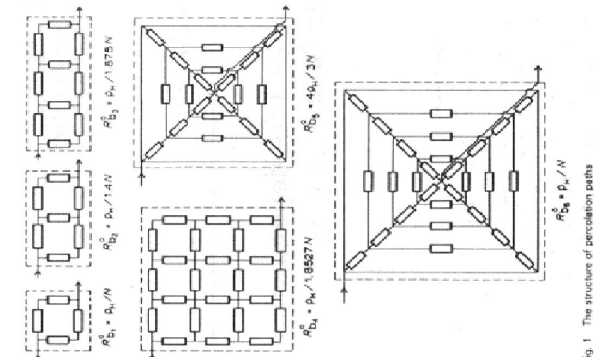
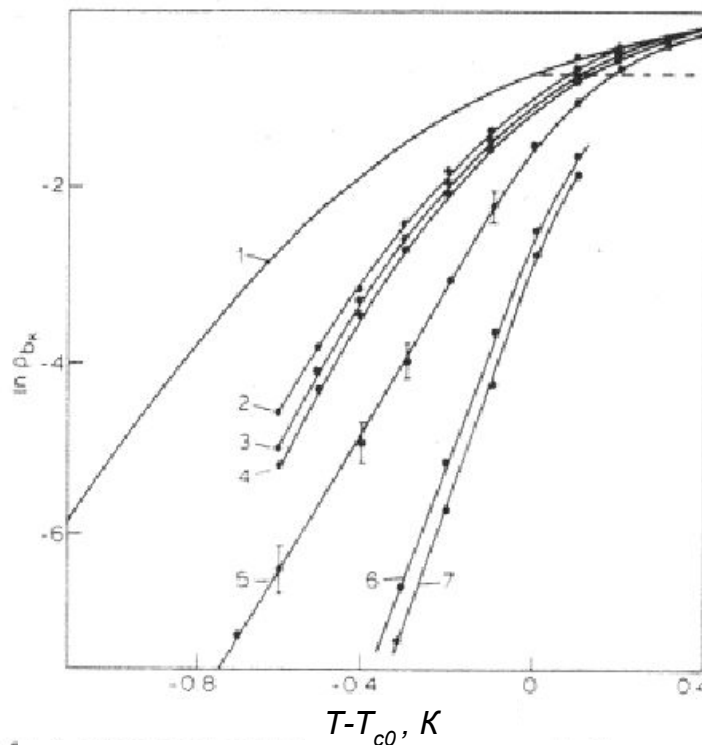
Материальное уравнение технического сверхпроводника

Сопротивление
технического
сверхпроводника,
по-видимому, нигде не
становится абсолютным
нулем, но ниже
критической точки оно
ничтожно мало.
Это противоречит
широко известной
договоренности, но
только ей и ничему
больше.



$$\rho_{eff} = \frac{\rho_n}{1 + \exp \left[\left(1 - \frac{T}{T_c} - \frac{B}{B_{c2}} - \frac{j}{j_{c2}} \right) \frac{1}{\delta} \right]}$$

Перколяционная модель объемной неоднородности сверхпроводника (расчет ом-температурной характеристики ОТХ)



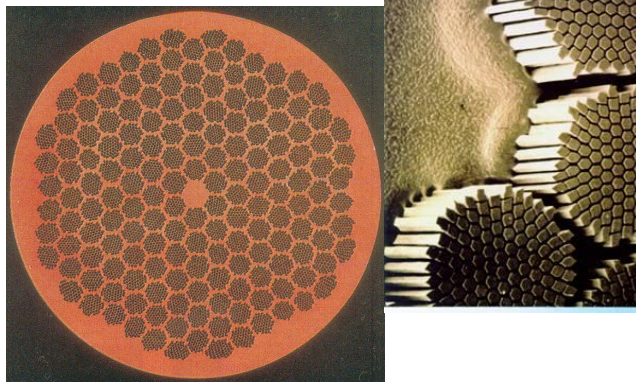
Рассматриваются ОТХ многосвязных схем, состоящих из сверхпроводящих элементов, сопротивление которых при критической температуре возрастает скачком от нуля до единицы. Критические температуры элементов распределены по Гауссу:

$$f(T_c) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(T_c - T_{c0})^2}{2\sigma^2}\right)$$

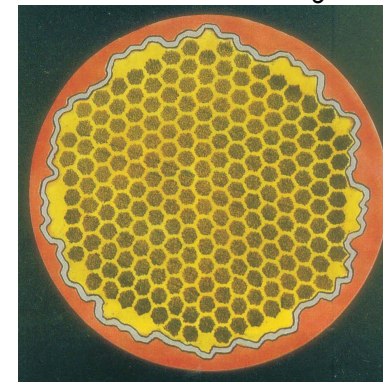
По мере усложнения эквивалентной схемы ОТХ приближается к экспоненте.

ОАХ продольно неоднородных проводов

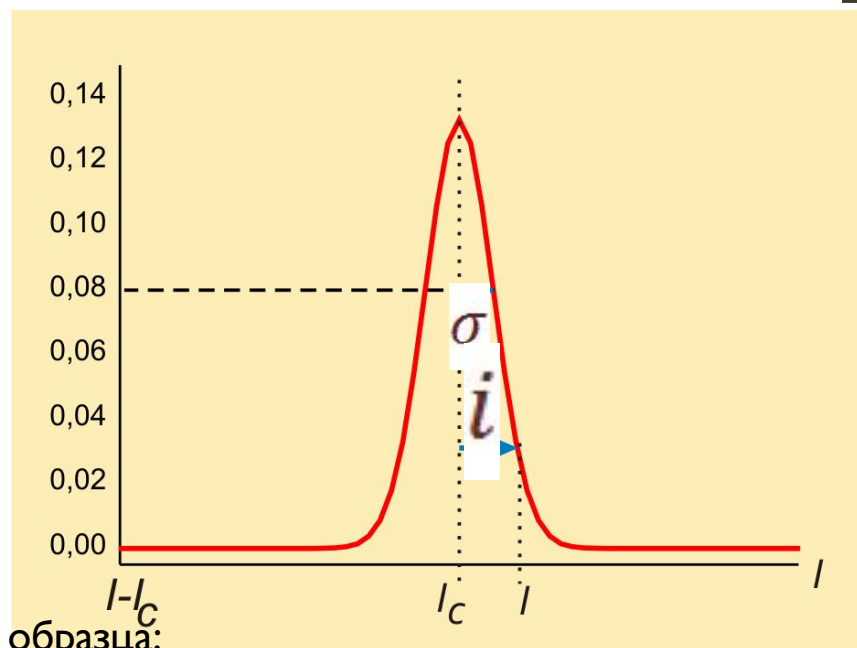
Ниобий-титан



Nb_3Sn



Из-за случайных обрывов волокон при волочении проволоки ОАХ размыта. Это одномерная, продольная неоднородность.



ОАХ продольно неоднородного образца:

$$\frac{R_{eff}(I/I_c)}{R_m} = \frac{E}{R_m I} = \frac{I_c}{I} \int_{-I_c}^{I-I_c} \left(\frac{I}{I_c} - 1 - \frac{i}{I_c} \right) \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{i^2}{2\sigma^2}\right) di$$

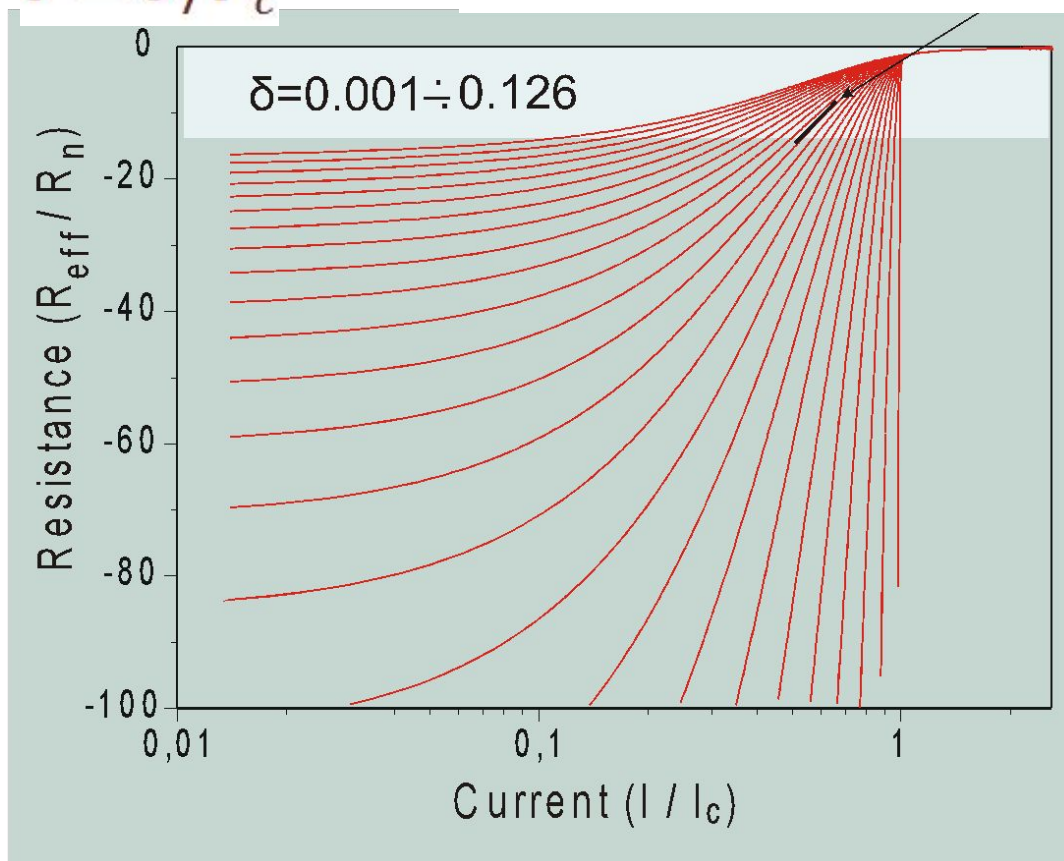
Модель линейной неоднородности сверхпроводника

$$\delta = \sigma / I_c$$

При измерении ВАХ
многоволоконных проводов
получают не
экспоненциальную, а
степенную зависимость

$$E = E_c \left(\frac{I}{I_c} \right)^n$$

Казалось бы, это надо
пытаться объяснить
обрывностью волокон,
но так же описывают ВАХ
ВТСП образцов. Скорее
всего они также продольно
неоднородны, но «физики»
тут же придумали
«логарифмическую яму»



Электродинамика технических сверхпроводников

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Уравнения Максвелла

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \varphi$$

$$j_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} E_\beta$$

Материальное уравнение

$$G(T) = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

Генерация тепла

$$C(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \left(k_{\alpha\beta}(T) \frac{\partial T}{\partial r_\beta} \right) + G(T)$$

Уравнение теплопроводности

Все особенности электродинамики связаны с видом тензора проводимости

Электродинамика технических сверхпроводников

- Ближайшим электродинамическим аналогом сверхпроводника с сильным пиннингом является плазма (сильная зависимость проводимости от температуры, величины и направления магнитного поля и тока, самосогласованность распределений этих параметров.)

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(sc)} = \sigma_t \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{B_\alpha B_\beta}{B^2} \right) + \sigma_l \frac{B_\alpha B_\beta}{B^2}$$

σ_t - проводимость в поперечном магнитном поле,

σ_l - проводимость в поперечном магнитном поле.

Этот тензор при больших углах между магнитным полем и током соответствует представлению о критической силе Лоренца как причине перехода сверхпроводника с током в резистивное состояние и, ограничивая продольную проводимость, не допускает бесконечной плотности тока при параллельном магнитному полю токе, когда сила Лоренца равна нулю.

Поперечная проводимость (из эксперимента)

$$\sigma_t = \sigma_n \left(1 + e^{\frac{K_t}{\delta}}\right) \quad K_t = \left(1 - \frac{T}{T_c} - \frac{|\mathbf{B}|}{B_{c2}} - \frac{|\mathbf{j}_t|}{j_{c/2}^t}\right)$$

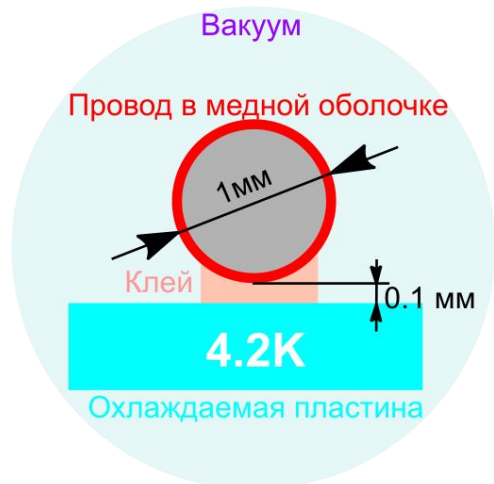
Продольная проводимость (по аналогии)

$$\sigma_l = \sigma_n \left(1 + e^{\frac{K_l}{\delta}}\right) \quad K_l = \left(1 - \frac{T}{T_c} - \frac{|\mathbf{B}|}{B_{c2}} - \frac{|\mathbf{j}_l|}{j_{c/2}^l}\right)$$

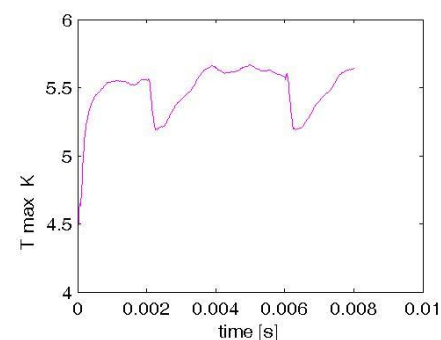
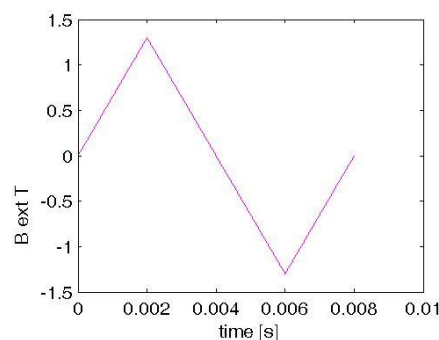
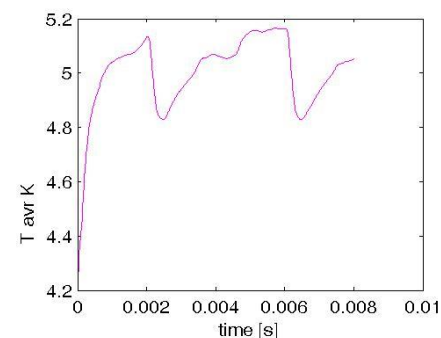
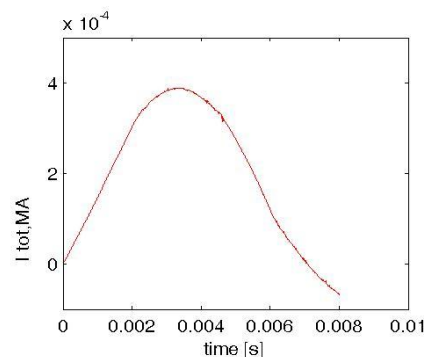
Применение развитой модели

Аналитических методов решения системы уравнений не существует.
Результаты получены численно.

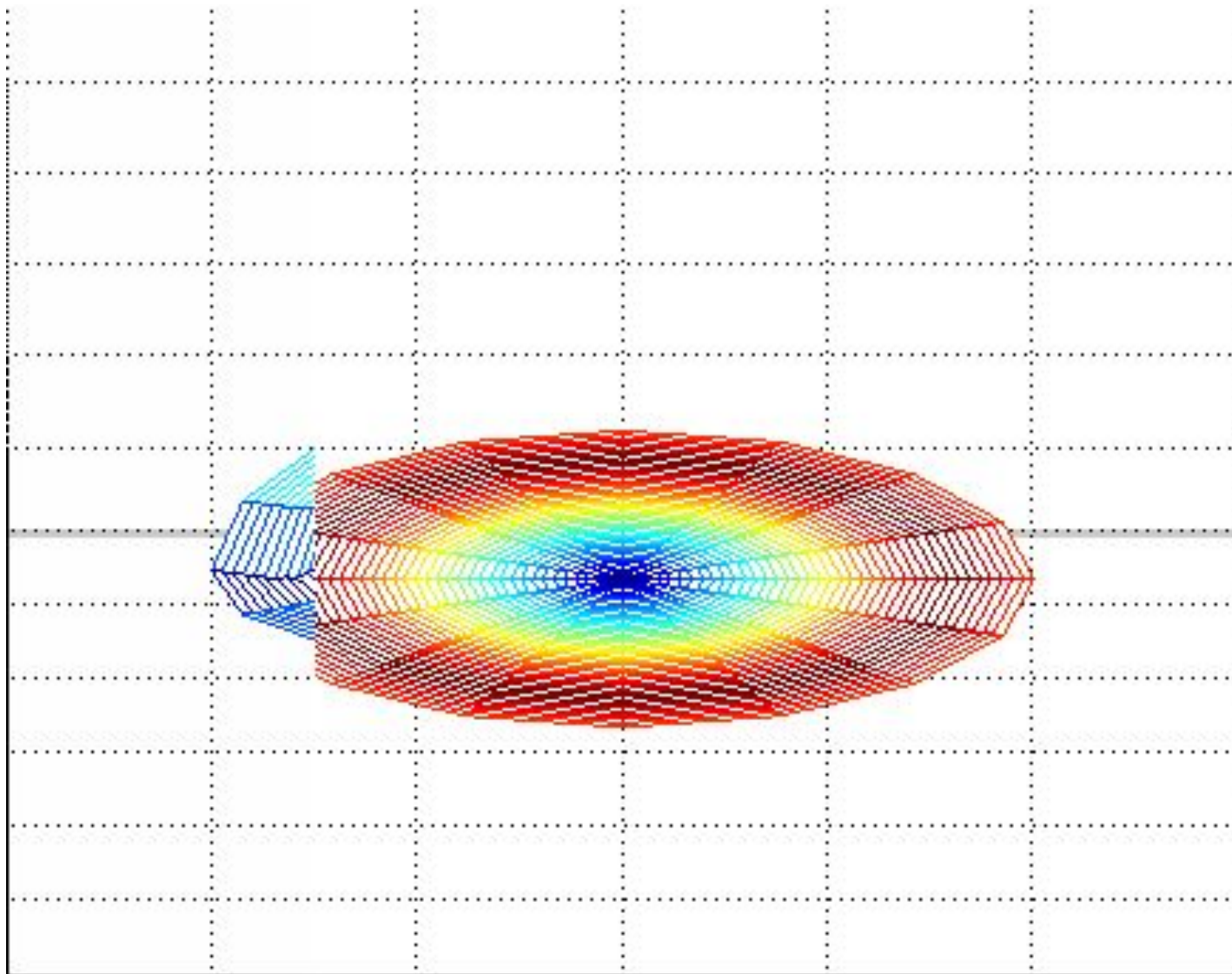
Одновременное
изменение внешнего
поля и тока не в фазе.



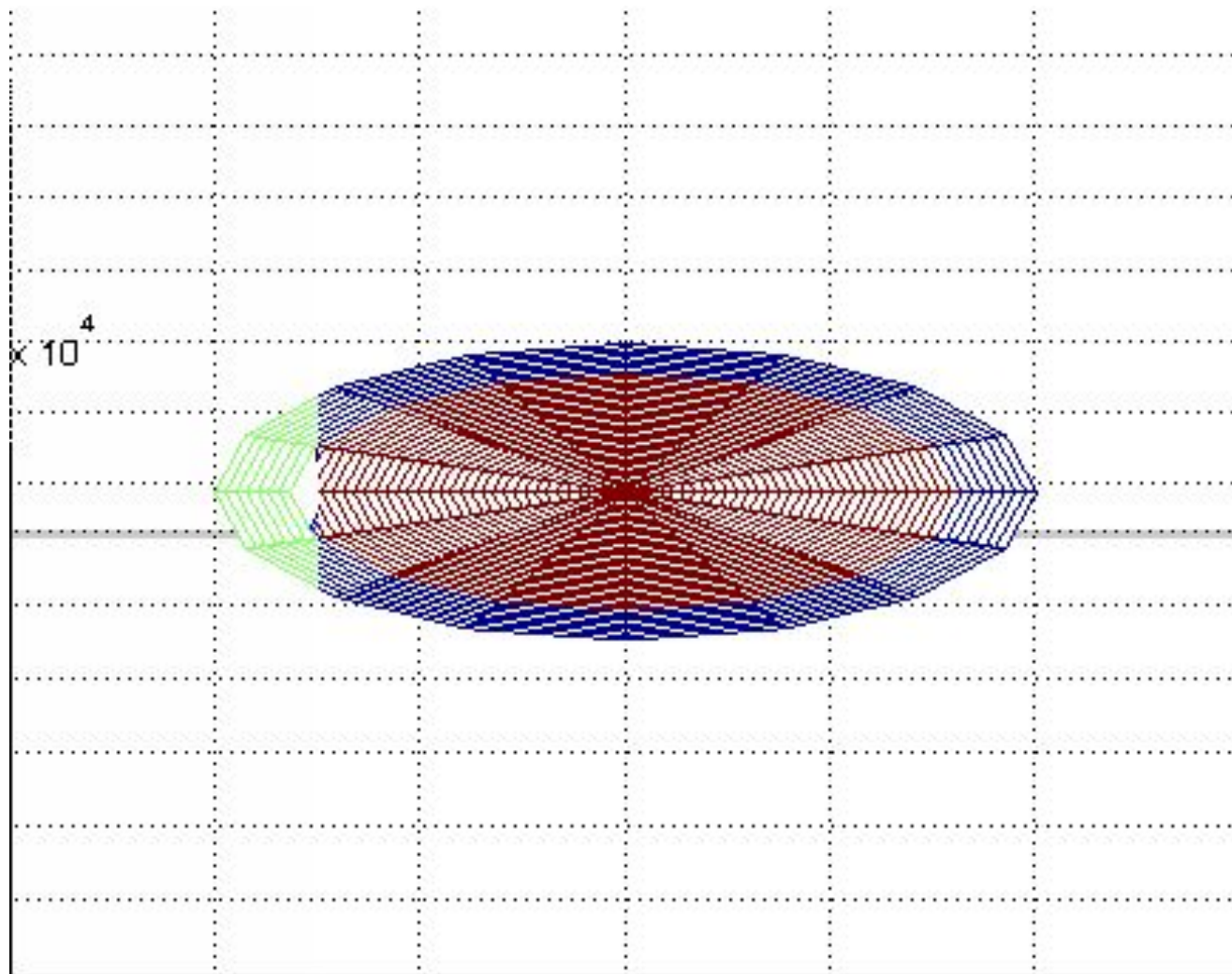
Условия теплоотвода



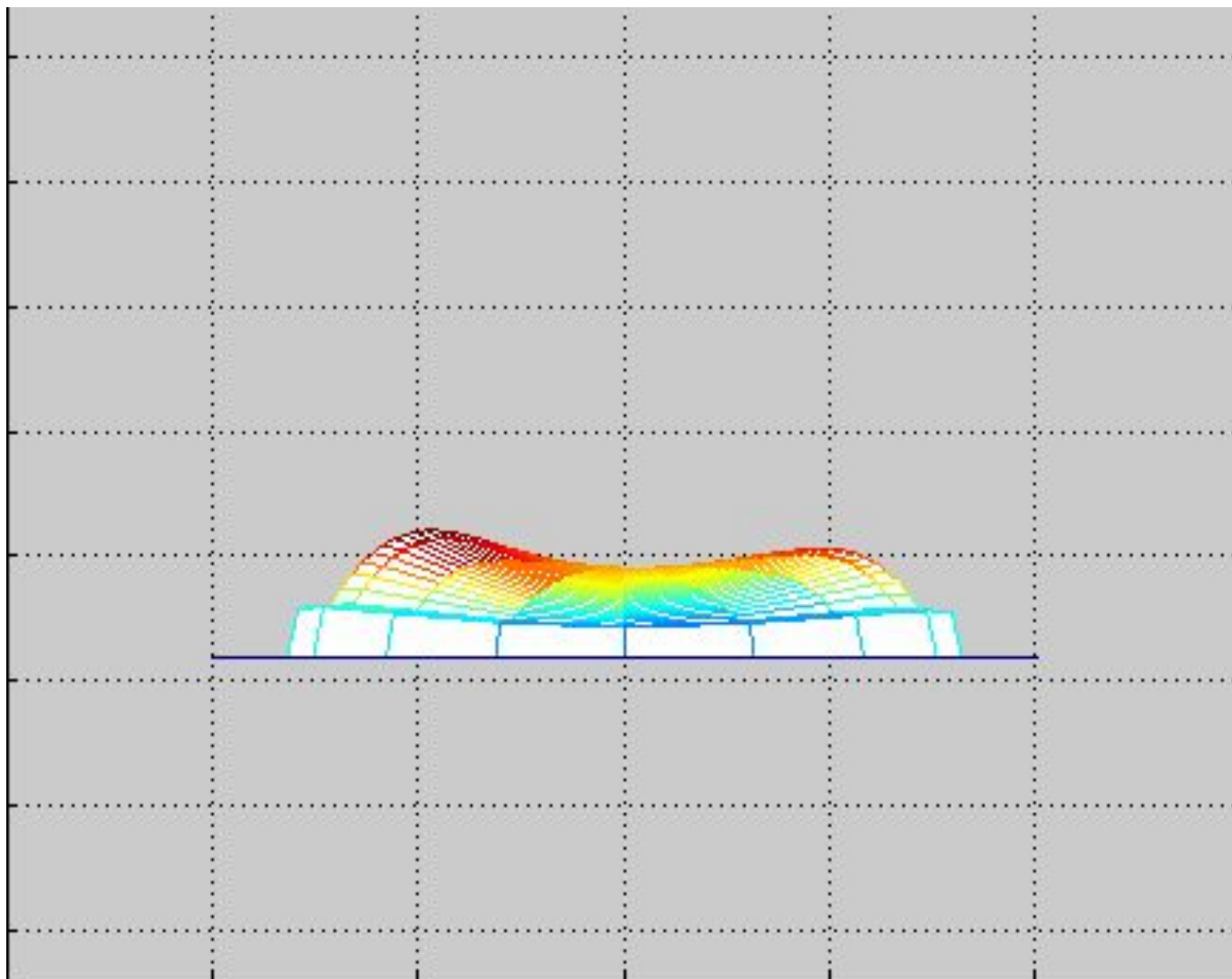
Индукция



Ток

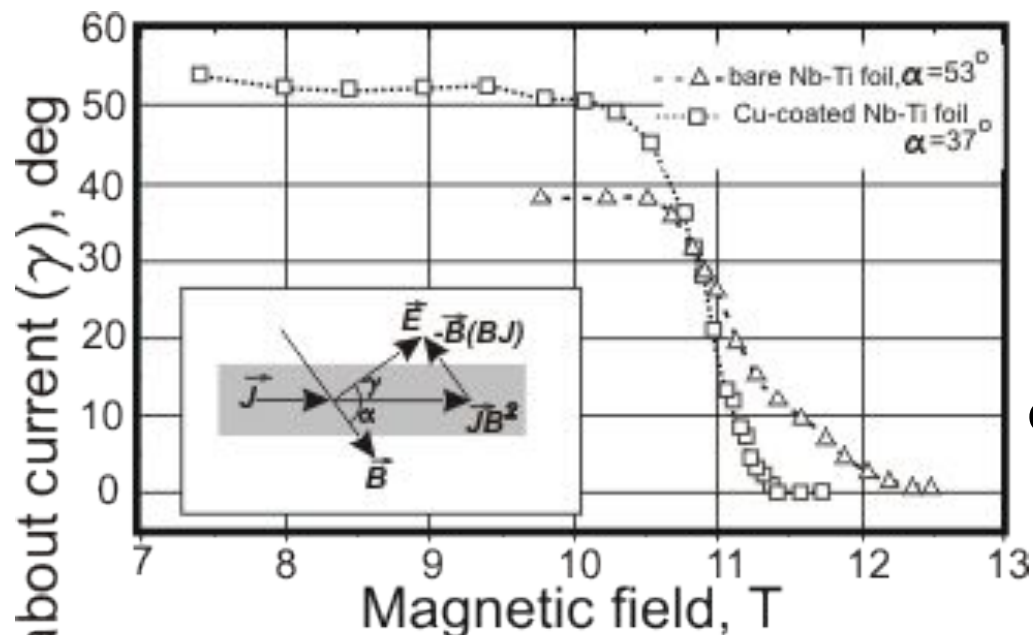


Температура

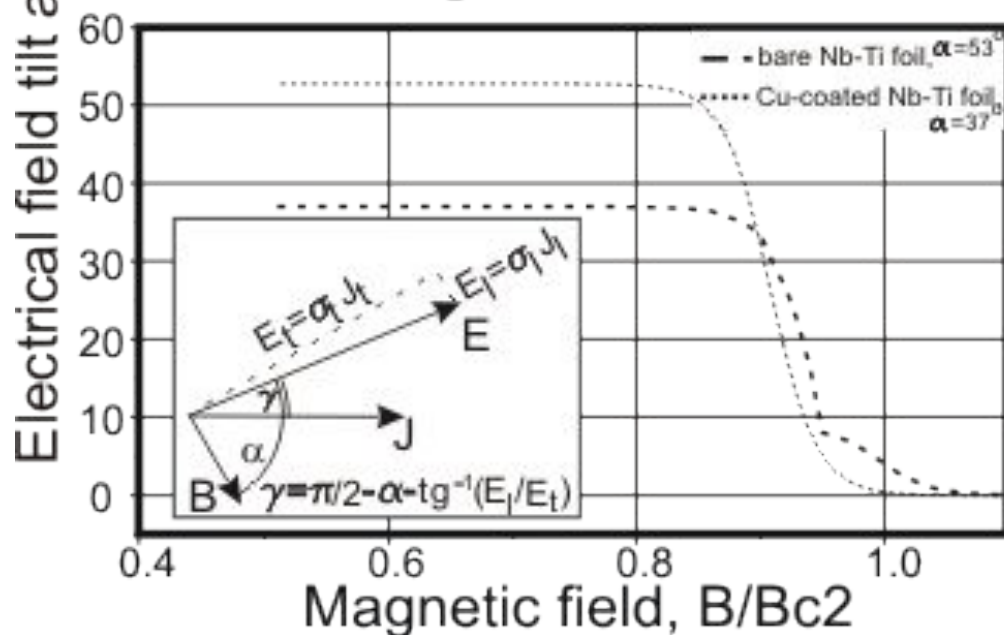


Введенный тензор проводимости в деталях описывает зависимость поперечного электрического поля от магнитного поля, когда оно имеет компоненту, параллельную току.

Представление о силе Лоренца позволяет описать эту зависимость только вдали от критического поля



Эксперимент



Расчет

Электродинамика технических сверхпроводников

- Совместное решение уравнений электродинамики и теплопроводности в принципе дает возможность исследовать проблемы стабильности и рассчитать потери в переменном поле. Для этого, однако не пригодны результаты исследования одномерной задачи из-за существенного различия в геометрии полей и температур.
- Разработаны быстродействующие программы решения двумерных задач, позволяющие изучать динамику развития процессов.



Спасибо за внимание