# Логика высказываний

Ирина Борисовна Просвирнина

- Высказывания
- Сложные высказывания
- Условные высказывания
- Таблицы истинности сложных высказываний
- Тавтологии и противоречия
- Логическая эквивалентность высказываний
- Булева алгебра высказываний
- Выполнимые и невыполнимые высказывания
- Проблема выполнимости

# Высказывания

<u>Определение 1</u> **Высказывание** – это повествовательное предложение, которое является либо истинным, либо ложным, но не может быть истинным или ложным одновременно.

# Высказывания

<u>Пример 1</u> Все предложения, приведенные ниже, являются высказываниями.

1. Минск – столица Беларуси.
2. Марсель – столица Франции.
3. 1 + 1 = 2.
4. 2 + 2 = 3.

Высказывания 1 и 3 являются истинными, а высказывания 2 и 4 являются ложными.

# Высказывания

<u>Пример 2</u> Предложения, приведенные ниже, не являются высказываниями.

1. Который час?
2. Вам следует внимательно слушать лекцию.
3. $x + 1 = 2$.
4. $x + y = z$.

Предложения 1 и 2 не являются высказываниями, так как это не повествовательные предложения. Предложения 3 и 4 не являются высказываниями, так как мы не можем определить, истины они или ложны.

# Высказывания

- Введем **пропозициональные переменные** (**высказывательные переменные**), значениями которых являются высказывания. Будем обозначать их строчными буквами латинского алфавита: $p, q, r, s, \ldots$ .

**Логическое значение** высказывания – истина $(T)$, если это высказывание является истинным, и ложь $(F)$, если это высказывание ложно.

# Высказывания

Раздел логики, изучающий высказывания, называется **исчислением высказываний** или **пропозициональной логикой**.

Греческий философ Аристотель, живший более 2300 лет тому назад, был первым, кто систематически изучил и изложил пропозициональную логику.

# Сложные высказывания

Рассмотрим методы построения новых высказываний из данных высказываний.

Эти методы были изложены английским математиком Джорджем Булем в его работе «*The Laws of Thought*» в 1854 году.

Новые высказывания, называемые **сложными высказываниями**, строятся из уже имеющихся высказываний с помощью логических операций.

# Сложные высказывания

Новые высказывания, называемые **сложными высказываниями**, строятся из уже имеющихся высказываний с помощью логических операций.

Мы рассмотрим следующие логические операции:

– отрицание,

– конъюнкцию,

– дизъюнкцию,

– исключающее или,

– импликацию,

– биимпликацию.

# Отрицание высказывания

<u>Определение 2</u> **Отрицанием** высказывания p называется высказывание «не p», которое обозначается через ¬p. Отрицание высказывания ¬p истинно, когда высказывание p ложно, и ложно в противном случае.

# Отрицание высказывания

| Таблица истинности для отрицания высказывания. | |
|---|---|
| p | $\neg p$ |
| T | F |
| F | T |

# Отрицание высказывания

Пример 3  Построить отрицание высказывания «Смартфон Анны имеет не менее 32 GB памяти» и записать полученное высказывание на привычном русском языке.

Решение Отрицание высказывания:

«Не верно, что смартфон Анны имеет не менее 32 GB памяти».

Более привычный вариант отрицания высказывания:

«Смартфон Анны имеет менее 32 GB памяти».

# Конъюнкция высказываний

<u>Определение 3</u> **Конъюнкцией** высказываний p и q называется высказывание «p и q», которое обозначается через p□q. Конъюнкция p□q истинна, когда оба высказывания p и q истинны и ложна в противном случае.

# Конъюнкция высказываний

| Таблица истинности для конъюнкции двух высказываний | | |
|---|---|---|
| p | q | $p \wedge q$ |
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | F |

# Конъюнкция высказываний

<u>Пример 4</u> Построить конъюнкцию высказываний p и q, где p – высказывание «На персональном компьютере Андрея свободно более 16 GB жесткого диска», а q – высказывание «Процессор персонального компьютера Андрея работает быстрее, чем 1 GHz», и записать полученное высказывание на привычном русском языке.

# Конъюнкция высказываний

p –«На персональном компьютере Андрея свободно более 16 GB жесткого диска»,
q – высказывание «Процессор персонального компьютера Андрея работает быстрее, чем 1 GHz».

<u>Решение</u> Конъюнкция высказываний p и q:
«На персональном компьютере Андрея свободно более 16 GB жесткого диска и процессор персонального компьютера Андрея работает быстрее, чем 1 GHz».
Более привычный вариант конъюнкции высказываний p и q:
«Персональный компьютер Андрея имеет более 16 GB памяти на жестком диске и работает быстрее, чем 1 GHz».

# Дизъюнкция высказываний

<u>Определение 4</u> **Дизъюнкцией** высказываний p и q называется высказывание «p или q», которое обозначается через p□q. Дизъюнкция p□q ложна, когда оба высказывания p и q ложны, и истинна в противном случае.

# Дизъюнкция высказываний

| Таблица истинности для дизъюнкции двух высказываний | | |
|---|---|---|
| p | q | $p \vee q$ |
| T | T | T |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | F |

# Дизъюнкция высказываний

<u>Пример 5</u> Построить дизъюнкцию высказываний p и q, где p – высказывание «На персональном компьютере Андрея свободно более 16 GB жесткого диска», а q – высказывание «Процессор персонального компьютера Андрея работает быстрее, чем 1 GHz», и записать полученное высказывание на привычном русском языке.

# Дизъюнкция высказываний

p – высказывание «На персональном компьютере Андрея свободно более 16 GB жесткого диска»,
q – высказывание «Процессор персонального компьютера Андрея работает быстрее, чем 1 GHz»

Решение. Дизъюнкция высказываний p и q:
«На персональном компьютере Андрея свободно более 16 GB жесткого диска, или процессор персонального компьютера Андрея работает быстрее, чем 1 GHz».
Более привычный вариант дизъюнкции высказываний p и q:
«Персональный компьютер Андрея имеет более 16 GB памяти на жестком диске или работает быстрее, чем 1 GHz».

# Исключающее или

<u>Определение 5</u> **Исключающим или** высказываний p и q называется высказывание «p или q, но не одновременно p и q», которое обозначается через p□q. Исключающее или p□q истинно, когда в точности одно из высказываний p или q истинно, и ложно в противном случае.

# Исключающее или

| Таблица истинности для исключающего или двух высказываний | | |
|---|---|---|
| p | q | $p \oplus q$ |
| T | T | F |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | F |

# Исключающее или

Пример 6 Исключающее или используется в следующей ситуации.

Студенты изучающие математический анализ или программирование, но не обе эти дисциплины одновременно, могут записаться на дополнительный курс по менеджменту.

Это значит, что студенты, изучающие обе дисциплины: математический анализ и программирование, – не могут изучать дополнительный курс по менеджменту.

# Условные высказывания

<u>Определение 6</u> Пусть p и q – два высказывания. Высказывание «если p, то q» называется **условным высказыванием** и обозначается через p□q. Условное высказывание p□q ложно, когда p истинно и q ложно, и истинно в противном случае.

В условном высказывании p□q высказывание p называется **условием**, а высказывание q **заключением**.

Условное высказывание еще называется **импликацией**.

# Условные высказывания

| Таблица истинности для условного высказывания $p \to q$ | | |
|---|---|---|
| p | q | $p \to q$ |
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | F | T |

Условное высказывание p□q ложно, когда p истинно и q ложно, и истинно в противном случае.

# Условные высказывания

- Условное высказывание $p \to q$ можно выразить с помощью следующих оборотов речи:
  - из p следует q;
  - p влечет q;
  - p достаточно для q;
  - p является достаточным условием для q;
  - q необходимо для p;
  - q является необходимым условием для p.

# Условные высказывания

<u>Пример 7</u> Пусть p – высказывание «Мария изучает дискретную математику», а q – высказывание «Мария найдет интересную и высокооплачиваемую работу». Выразить высказывание p□q на русском языке.

<u>Решение</u> Варианты высказывания p□q:

«Если Мария изучает дискретную математику, то она найдет интересную и высокооплачиваемую работу»,

«Чтобы Мария нашла интересную и высокооплачиваемую работу, ей достаточно изучать дискретную математику».

# Конверсия, контрапозиция, инверсия

С условным высказыванием p □ q связаны еще три условных высказывания:

- высказывание q □ p называется **конверсией** высказывания p □ q;
- высказывание □q □ □p называется **контрапозицией** высказывания p □ q;
- высказывание □p □ □q называется **инверсией** высказывания p □ q;

# Конверсия, контрапозиция, инверсия

<u>Пример 7</u> Пусть p – высказывание «Футбольный клуб «Неман» выигрывает матч», а q – высказывание «Идет дождь». Построить конверсию, контрапозицию и инверсию импликации p □ q на русском языке.

<u>Решение</u>

- Конверсия импликации p □ q: «Если идет дождь, то футбольный клуб «Неман» выигрывает матч».
- Контрапозиция импликации p □ q: «Если дождь не идет, то футбольный клуб «Неман» не выигрывает матч».
- Инверсия импликации p □ q: «Если футбольный клуб «Неман» не выигрывает матч, то дождь не идет».

# Биимпликация высказываний

<u>Определение 7</u> **Биимпликацией** высказываний p и q называется высказывание «p тогда и только тогда, когда q», которое обозначается через p □ q. Биимпликация p □ q истинна, когда оба высказывания p и q одновременно истинны или одновременно ложны, и ложна в противном случае.

# Биимпликация высказываний

| Таблица истинности для биимпликации двух высказываний | | |
|---|---|---|
| p | q | $p \leftrightarrow q$ |
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | T |

Биимпликация p □ q истинна, когда оба высказывания p и q одновременно истинны или одновременно ложны, и ложна в противном случае.

# Биимпликация высказываний

Биимпликацию p  q можно выразить с помощью следующих оборотов речи:

- p необходимо и достаточно для q;
- p является необходимым и достаточным условием  для q;
- p если и только если q.

# Биимпликация высказываний

<u>Пример 8</u> Пусть p – высказывание «Вы можете полететь из Минска в Париж на самолете», а q – высказывание «Вы купите билет на самолет, следующий рейсом Минск – Париж». Выразить высказывание p □ q на русском языке.

<u>Решение</u>

«Вы можете полететь из Минска в Париж на самолете, если и только если Вы купите билет на самолет, следующий рейсом Минск – Париж».

# Таблицы истинности сложных высказываний

С помощью введенных логических операций конъюнкция, дизъюнкция, исключающее или, импликация, биимпликация и отрицание можно строить сложные высказывания, состоящие из произвольного числа пропозициональных переменных.

Для определения логического значения сложных высказываний следует использовать таблицы истинности, определяющие логические значения высказываний □p, p □ q,  p □ q, p □ q, p □ q, p □ q.

# Таблицы истинности сложных высказываний

<u>Пример 9</u> Построить таблицу истинности сложного высказывания (p□□q) □ (p□q).

# Таблицы истинности сложных высказываний

<u>Пример 9</u> Построить таблицу истинности сложного высказывания (p□□q) □ (p□q).

| Таблица истинности высказывания (p□□q) □ (p□q) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| p | q | □q | p□□q | p□q | (p□□q)□(p□q) |
| T | T | | | | |
| T | F | | | | |
| F | T | | | | |
| F | F | | | | |

# Таблицы истинности сложных высказываний

<u>Пример 9</u> Построить таблицу истинности сложного высказывания (p□□q) □ (p□q).

| Таблица истинности высказывания (p□□q) □ (p□q) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| p | q | □q | p□□q | p□q | (p□□q)□(p□q) |
| T | T | F | | | |
| T | F | T | | | |
| F | T | F | | | |
| F | F | T | | | |

# Таблицы истинности сложных высказываний

<u>Пример 9</u> Построить таблицу истинности сложного высказывания (p□□q) □ (p□q).

| Таблица истинности высказывания (p□□q) □ (p□q) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| p | q | □q | p□□q | p□q | (p□□q)□(p□q) |
| T | T | F | T | | |
| T | F | T | T | | |
| F | T | F | F | | |
| F | F | T | T | | |

# Таблицы истинности сложных высказываний

<u>Пример 9</u> Построить таблицу истинности сложного высказывания (p□□q) □ (p□q).

| Таблица истинности высказывания (p□□q) □ (p□q) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| p | q | □q | p□□q | p□q | (p□□q)□(p□q) |
| T | T | F | T | T | |
| T | F | T | T | F | |
| F | T | F | F | F | |
| F | F | T | T | F | |

# Таблицы истинности сложных высказываний

<u>Пример 9</u> Построить таблицу истинности сложного высказывания (p□□q) □ (p□q).

| Таблица истинности высказывания (p□□q) □ (p□q) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| p | q | □q | p□□q | p□q | (p□□q)□(p□q) |
| T | T | F | T | T | T |
| T | F | T | T | F | F |
| F | T | F | F | F | T |
| F | F | T | T | F | F |

# Приоритет (порядок выполнения) логических операций

| Приоритет логических операций | |
|---|---|
| Операция | Приоритет |
| $\neg$ | 1 |
| $\wedge$ | 2 |
| $\vee$ | 3 |
| $\rightarrow$ | 4 |
| $\leftrightarrow$ | 5 |

Для уменьшения числа пар скобок в сложном высказывании установлен порядок выполнения логических операций, описанный в таблице.

# Приоритет (порядок выполнения) логических операций

| Приоритет логических операций | |
|---|---|
| Операция | Приоритет |
| $\neg$ | 1 |
| $\wedge$ | 2 |
| $\vee$ | 3 |
| $\rightarrow$ | 4 |
| $\leftrightarrow$ | 5 |

<u>Пример 10</u> Расставим скобки в сокращенной записи сложного высказывания

p □ q □ p □ □ (p □ q):

1. **(p □ q)** □ p □ □ (p □ q),
2. ( p □ q ) □ **(p □ □ (p □ q))**.

# Тавтологии и противоречия

Определение 1 Сложное высказывание называется **тавтологией**, если оно истинно при любых истинностных значениях входящих в него пропозициональных переменных.

# Тавтологии и противоречия

<u>Определение 2</u> Сложное высказывание называется **противоречием**, если оно ложно при любых истинностных значениях входящих в него пропозициональных переменных.

# Тавтологии и противоречия

<u>Определение 3</u> Сложное высказывание называется **контингенцией**, если оно не является ни тавтологией ни противоречием.

# Тавтологии и противоречия

<u>Пример 1</u> Можно построить тавтологию и противоречие, используя только одну пропозициональную переменную.

| Примеры тавтологии и противоречия | | | |
|---|---|---|---|
| $p$ | $\neg p$ | $p \vee \neg p$ | $p \wedge \neg p$ |
| T<br>F | F<br>T | T<br>T | F<br>F |

# Тавтологии и противоречия

<u>Пример 1</u> Можно построить тавтологию и противоречие, используя только одну пропозициональную переменную.

| Примеры тавтологии и противоречия | | | |
|---|---|---|---|
| $p$ | $\neg p$ | $p \vee \neg p$ | $p \wedge \neg p$ |
| T<br>F | F<br>T | T<br>T | F<br>F |

Высказывание $p \square \square p$ всегда истинно, значит $p \square \square p$ – тавтология.

Высказывание $p \square \square p$ всегда ложно, значит $p \square \square p$ – противоречие

# Логическая эквивалентность высказываний

Два сложных высказывания называются **логически эквивалентными**, если они имеют одинаковые истинностные значения на всех возможных наборах истинностных значений входящих в них пропозициональных переменных.

Логическую эквивалентность сложных высказываний можно определить, используя тавтологию.

# Логическая эквивалентность высказываний

<u>Определение 4</u> Сложные высказывания p и q называются **логически эквивалентными**, если сложное высказывание p □ q является тавтологией.

Запись p □ q означает, что p и q логически эквивалентны.

# Логическая эквивалентность высказываний

Для определения эквивалентности двух сложных высказываний можно использовать таблицы истинности.

Два сложных высказывания логически эквивалентны тогда и только тогда, когда столбцы истинностных значений этих высказываний совпадают.

Будьте внимательны! В таблицах истинности, соответствующих рассматриваемым высказываниям, наборы истинностных значений пропозициональных переменных должны располагаться в одинаковой последовательности.

# Логическая эквивалентность высказываний

<u>Пример 2</u> Покажем, что □(p□q) и □p□□q логически эквивалентны.

| Таблицы истинности для □(p□q) и □p□□q. | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| p | q | p□q | □(p□q) | □p | □q | □p□□q |
| T | T | | | | | |
| T | F | | | | | |
| F | T | | | | | |
| F | F | | | | | |

# Логическая эквивалентность высказываний

<u>Пример 2</u> Покажем, что □(p□q) и □p□□q логически эквивалентны.

| Таблицы истинности для □(p□q) и □p□□q. | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| p | q | p□q | □(p□q) | □p | □q | □p□□q |
| T | T | T | | | | |
| T | F | T | | | | |
| F | T | T | | | | |
| F | F | F | | | | |

# Логическая эквивалентность высказываний

<u>Пример 2</u> Покажем, что □(p□q) и □p□□q логически эквивалентны.

| Таблицы истинности для □(p□q) и □p□□q. | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| p | q | p□q | □(p□q) | □p | □q | □p□□q |
| T | T | T | F | | | |
| T | F | T | F | | | |
| F | T | T | F | | | |
| F | F | F | T | | | |

# Логическая эквивалентность высказываний

<u>Пример 2</u> Покажем, что □(p□q) и □p□□q логически эквивалентны.

| Таблицы истинности для □(p□q) и □p□□q. | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| p | q | p□q | □(p□q) | □p | □q | □p□□q |
| T | T | T | F | F | | |
| T | F | T | F | F | | |
| F | T | T | F | T | | |
| F | F | F | T | T | | |

# Логическая эквивалентность высказываний

<u>Пример 2</u> Покажем, что □(p□q) и □p□□q логически эквивалентны.

| Таблицы истинности для □(p□q) и □p□□q. | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| p | q | p□q | □(p□q) | □p | □q | □p□□q |
| T | T | T | F | F | F | |
| T | F | T | F | F | T | |
| F | T | T | F | T | F | |
| F | F | F | T | T | T | |

# Логическая эквивалентность высказываний

<u>Пример 2</u> Покажем, что □(p□q) и □p□□q логически эквивалентны.

| Таблицы истинности для □(p□q) и □p□□q. | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| p | q | p□q | □ (p□q) | □p | □q | □p□□ q |
| T | T | T | F | F | F | F |
| T | F | T | F | F | T | F |
| F | T | T | F | T | F | F |
| F | F | F | T | T | T | T |

# Логическая эквивалентность высказываний

<u>Пример 2</u> Покажем, что □(p□q) и □p□□q логически эквивалентны.

| Таблицы истинности для □(p□q) и □p□□q. | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| p | q | p□q | □(p□q) | □p | □q | □p□□q |
| T | T | T | F | F | F | F |
| T | F | T | F | F | T | F |
| F | T | T | F | T | F | F |
| F | F | F | T | T | T | T |

# Логическая эквивалентность высказываний

| Таблицы истинности для □(p□q) и □p□□q. | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| p | q | p□q | □ (p□q) | □p | □q | □p□□ q |
| T | T | T | F | F | F | F |
| T | F | T | F | F | T | F |
| F | T | T | F | T | F | F |
| F | F | F | T | T | T | T |

Истинностные значения высказываний □(p□q) и □p□□q совпадают на всех наборах истинностных значений переменных p и q, значит, сложное высказывание □(p□q) □ □p□□q является тавтологией, и сложные высказывания □(p□q) и □p□□q логически эквивалентны.

□(p□q) □ □p□□q – один из **законов Де Моргана**.

# Логическая эквивалентность высказываний

<u>Пример 3</u> Покажем, что □ p□q и p□q логически эквивалентны.

| Таблицы истинности для □p□q и p□q | | | | |
|---|---|---|---|---|
| p | q | □p | □p□q | p□q |
| T | T | | | |
| T | F | | | |
| F | T | | | |
| F | F | | | |

# Логическая эквивалентность высказываний

<u>Пример 3</u> Покажем, что □ p□q и p□q логически эквивалентны.

| Таблицы истинности для □p□q и p□q | | | | |
|---|---|---|---|---|
| p | q | □p | □p□q | p□q |
| T | T | F | | |
| T | F | F | | |
| F | T | T | | |
| F | F | T | | |

# Логическая эквивалентность высказываний

<u>Пример 3</u> Покажем, что □ p□q и p□q логически эквивалентны.

| Таблицы истинности для □p□q и p□q | | | | |
|---|---|---|---|---|
| p | q | □p | □p□q | p□q |
| T | T | F | T | |
| T | F | F | F | |
| F | T | T | T | |
| F | F | T | T | |

# Логическая эквивалентность высказываний

<u>Пример 3</u> Покажем, что □ p□q и p□q логически эквивалентны.

| Таблицы истинности для □p□q и p□q | | | | |
|---|---|---|---|---|
| p | q | □p | □p□q | p□q |
| T | T | F | T | T |
| T | F | F | F | F |
| F | T | T | T | T |
| F | F | T | T | T |

# Логическая эквивалентность высказываний

<u>Пример 3</u> Покажем, что □ p□q и p□q логически эквивалентны.

| Таблицы истинности для □p□q и p□q | | | | |
|---|---|---|---|---|
| p | q | □p | □p□q | p□q |
| T | T | F | T | T |
| T | F | F | F | F |
| F | T | T | T | T |
| F | F | T | T | T |

# Логическая эквивалентность высказываний

| Таблицы истинности для □p□q и p□q | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **p** | **q** | **□p** | **□p□q** | **p□q** |
| **T** | **T** | **F** | **T** | **T** |
| **T** | **F** | **F** | **F** | **F** |
| **F** | **T** | **T** | **T** | **T** |
| **F** | **F** | **T** | **T** | **T** |

Истинностные значения высказываний □p□q и p□q совпадают на всех наборах истинностных значений переменных p и q, значит, сложное высказывание □p□q □ p□q является тавтологией, и сложные высказывания □ p□q и p□q логически эквивалентны.

# Логическая эквивалентность высказываний

<u>Пример 4</u> Покажем, что сложные высказывания $p \square (q \square r)$ и $(p \square q) \square (p \square r)$ логически эквивалентны.

В высказывания $p \square (q \square r)$ и $(p \square q) \square (p \square r)$ входят три пропозициональные переменные p, q и r.

Поэтому в таблицах истинности будет 8 строк с комбинациями истинностных значений пропозициональных переменных p, q и r:

**T T T, T T F, T F T, T F F, F T T, F T F и F F F.**

**Мы будем всегда использовать в таблицах истинности этот порядок строк!**

# Доказательство логической эквивалентности p□(q□r) и (p□q)□(p□r)

| p | q | r | q□r | p□ (q□r) | p□ q | p□r | (p□q)□ (p□r) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | | | | | |
| T | T | F | | | | | |
| T | F | T | | | | | |
| T | F | F | | | | | |
| F | T | T | | | | | |
| F | T | F | | | | | |
| F | F | T | | | | | |
| F | F | F | | | | | |

# Доказательство логической эквивалентности p□(q□r) и (p□q)□(p□r)

| p | q | r | q□r | p□ (q□r) | p□ q | p□r | (p□q)□ (p□r) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | | | | |
| T | T | F | F | | | | |
| T | F | T | F | | | | |
| T | F | F | F | | | | |
| F | T | T | T | | | | |
| F | T | F | F | | | | |
| F | F | T | F | | | | |
| F | F | F | F | | | | |

# Доказательство логической эквивалентности p□(q□r) и (p□q)□(p□r)

| p | q | r | q□r | p□ (q□r) | p□ q | p□r | (p□q)□ (p□r) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | | | |
| T | T | F | F | T | | | |
| T | F | T | F | T | | | |
| T | F | F | F | T | | | |
| F | T | T | T | T | | | |
| F | T | F | F | F | | | |
| F | F | T | F | F | | | |
| F | F | F | F | F | | | |

# Доказательство логической эквивалентности p□(q□r) и (p□q)□(p□r)

| p | q | r | q□r | p□ (q□r) | p□ q | p□r | (p□q)□ (p□r) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | | |
| T | T | F | F | T | T | | |
| T | F | T | F | T | T | | |
| T | F | F | F | T | T | | |
| F | T | T | T | T | T | | |
| F | T | F | F | F | T | | |
| F | F | T | F | F | F | | |
| F | F | F | F | F | F | | |

# Доказательство логической эквивалентности p□(q□r) и (p□q)□(p□r)

| p | q | r | q□r | p□ (q□r) | p□ q | p□r | (p□q)□ (p□r) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | T | |
| T | T | F | F | T | T | T | |
| T | F | T | F | T | T | T | |
| T | F | F | F | T | T | T | |
| F | T | T | T | T | T | T | |
| F | T | F | F | F | T | F | |
| F | F | T | F | F | F | T | |
| F | F | F | F | F | F | F | |

# Доказательство логической эквивалентности p□(q□r) и (p□q)□(p□r)

| p | q | r | q□r | p□(q□r) | p□q | p□r | (p□q)□(p□r) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | T | T |
| T | T | F | F | T | T | T | T |
| T | F | T | F | T | T | T | T |
| T | F | F | F | T | T | T | T |
| F | T | T | T | T | T | T | T |
| F | T | F | F | F | T | F | F |
| F | F | T | F | F | F | T | F |
| F | F | F | F | F | F | F | F |

# Доказательство логической эквивалентности p□(q□r) и (p□q)□(p□r)

| p | q | r | q□r | p□ (q□r) | p□ q | p□r | (p□q)□ (p□r) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | T | T |
| T | T | F | F | T | T | T | T |
| T | F | T | F | T | T | T | T |
| T | F | F | F | T | T | T | T |
| F | T | T | T | T | T | T | T |
| F | T | F | F | F | T | F | F |
| F | F | T | F | F | F | T | F |
| F | F | F | F | F | F | F | F |

# Доказательство логической эквивалентности p□(q□r) и (p□q)□(p□r)

| p | q | r | q□r | p□(q□r) | p□q | p□r | (p□q)□(p□r) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | T | T |
| T | T | F | F | T | T | T | T |
| T | F | T | F | T | T | T | T |
| T | F | F | F | T | T | T | T |
| F | T | T | T | T | T | T | T |
| F | T | F | F | F | T | F | F |
| F | F | T | F | F | F | T | F |
| F | F | F | F | F | F | F | F |

Итак, p □ (q □ r) □ (p □ q) □ (p □ r) – **дистрибутивный закон дизъюнкции относительно конъюнкции**.

| Таблица 1. Логические эквивалентности | |
|---|---|
| Эквивалентность | Название |
| $p \wedge T \equiv p$<br>$p \vee F \equiv p$ | Законы тождества |
| $p \vee T \equiv T$<br>$p \wedge F \equiv F$ | Законы доминирования |
| $p \vee p \equiv p$<br>$p \wedge p \equiv p$ | Законы идемпотентности |
| $\neg(\neg p) \equiv p$ | Закон двойного отрицания |
| $p \vee q \equiv q \vee p$<br>$p \wedge q \equiv q \wedge p$ | Законы коммутативности |

| Логические эквивалентности (продолжение таблицы 1) | |
|---|---|
| Эквивалентность | Название |
| $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$<br>$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ | Законы ассоциативности |
| $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$<br>$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | Законы дистрибутивности |
| $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$<br>$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ | Законы де Моргана |
| $p \vee (p \wedge q) \equiv p$<br>$p \wedge (p \vee q) \equiv p$ | Законы поглощения |
| $p \vee \neg p \equiv T$<br>$p \wedge \neg p \equiv F$ | Законы отрицания |

# Логическая эквивалентность высказываний

Множество сложных высказываний, на котором заданы логические операции □, □, □, удовлетворяющие законам тождества, коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности и отрицания, является **булевой алгеброй**.

| Таблица 2. Логические эквивалентности, содержащие условные высказывания |
| --- |
| $p \to q \equiv \neg p \vee q$ |
| $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$ |
| $p \vee q \equiv \neg p \to q$ |
| $p \wedge q \equiv \neg(p \to \neg q)$ |
| $\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$ |
| $(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv p \to (q \wedge r)$ |
| $(p \to r) \wedge (q \to r) \equiv (p \vee q) \to r$ |
| $(p \to q) \vee (p \to r) \equiv p \to (q \vee r)$ |
| $(p \to r) \vee (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$ |

| Таблица 3. Логические эквивалентности, содержащие биимпликации |
| --- |
| $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ |
| $p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$ |
| $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ |
| $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$ |

# Применение законов Де Моргана

Пример 5 Используем закон Де Моргана для построения отрицания высказывания: «Сергей пойдет на концерт, или Евгений пойдет на концерт».

Решение Пусть p – «Сергей пойдет на концерт», а q – «Евгений пойдет на концерт», Тогда «Сергей пойдет на концерт, **или** Евгений пойдет на концерт» можно представить как p □ q.

По первому закону Де Моргана □(p □ q) логически эквивалентно □p □ □q .

Значит, отрицание исходного высказывания можно выразить так: «Сергей не пойдет на концерт, **и** Евгений не пойдет на концерт».

# Применение законов Де Моргана

<u>Пример 6</u> Используем закон Де Моргана для построения отрицания высказывания: «У Ольги есть смартфон, и у нее есть ноутбук».

<u>Решение</u> Пусть p – «У Ольги есть смартфон», а q – «У Ольги есть ноутбук», Тогда «У Ольги есть смартфон, **<u>и</u>** у нее есть ноутбук» можно представить как p □ q.

По первому закону Де Моргана □(p □ q) логически эквивалентно □p □ □q.

Значит, отрицание исходного высказывания можно выразить так: «У Ольги нет смартфона, **<u>или</u>** у нее нет ноутбука».

# Построение новых логических эквивалентностей

Логические эквивалентности таблиц 1, 2 и 3 можно использовать для построения новых логических эквивалентностей.

Пусть высказывание P входит в состав сложного высказывания C(P). P можно заменить логически эквивалентным ему высказыванием Q, при этом истинностное значение сложного высказывания C(Q) будет таким же как у C(P).

# Построение новых логических эквивалентностей

<u>Пример 7</u> Покажем с помощью преобразований, что высказывания □(p □ q) и p □ □q логически эквиваленты.

<u>Решение</u>

□(p □ q) □ □(□p □ q) – пример 3

□ □(□p) □ □q – второй закон Де Моргана

□ p □ □q – закон двойного отрицания

# Построение новых логических эквивалентностей

<u>Пример 8</u> Покажем с помощью преобразований, что высказывания □(p □ (□p □ q)) и (□p □ □q) логически эквиваленты.

<u>Решение</u>

□(p □ (□p □ q)) □ □p □ □(□p □ q)

□ □p □ (□(□p) □ □q)

□ □p □ (p □ □q)

□ (□p □ p) □ (□p □ □q)

□ F □ (□p □ □q)

□ (□p □ □q) □ F

□ (□p □ □q)

# Построение новых логических эквивалентностей

<u>Пример 9</u> Покажем с помощью преобразований, что высказывание (p □ q) □ (p □ q) является тавтологией.

<u>Решение</u>

(p □ q) □ (p □ q) □ □ (p □ q) □ (p □ q)

□ (□p □ □q) □ (p □ q)

□ (□p □ p) □ (□q □ q)

□ T □ T

□ T

# Выполнимые и невыполнимые высказывания

<u>Определение 5</u> Сложное высказывание называется **выполнимым**, если существует набор истинностных значений пропозициональных переменных, на котором это сложное высказывание является истинным.

Если сложное высказывание ложно на любом наборе истинностных значений пропозициональных переменных, то оно называется **невыполнимым**.

# Проблема выполнимости

<u>Определение 6</u> Набор истинностных значений пропозициональных переменных, на котором выполнимое высказывание принимает значение истина, называется **решением** данной проблемы выполнимости.

# Выполнимые и невыполнимые высказывания

<u>Пример 9</u>

Выясним, какие из следующих высказываний являются выполнимыми:

- $(p \square \square q) \square (q \square \square r) \square (r \square \square p)$ – выполнимо ($p = T$, $q = T$, $r = T$);
- $(p \square q \square r) \square (\square p \square \square q \square \square r)$ – выполнимо ($p = T$, $q = F$, $r = T$);
- $(p \square \square q) \square (q \square \square r) \square (r \square \square p) \square (p \square q \square r) \square (\square p \square \square q \square \square r)$ – невыполнимо (почему?).

# Проблема выполнимости

В терминах выполнимости сложных высказываний моделируются задачи из различных областей науки и техники:

- робототехники,
- разработки программного обеспечения,
- компьютерного проектирования,
- проектирования функциональных схем,
- организации компьютерных сетей,
- генетики.

# Головоломка Судоку 9□9.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 9 | | | | 4 | | |
| | | | 5 | | | 1 | | |
| | 4 | | | | | | | |
| | | | | 4 | 2 | | | |
| 6 | | | | | | | 7 | |
| 5 | | | | | | | | |
| 7 | | | 3 | | | | | 5 |
| | 1 | | | 9 | | | | |
| | | | | | | | 6 | |

Большой квадрат 9□9 делят на 9 маленьких квадратов 3□3. В некоторых из 81 ячеек записаны цифры от 1 до 9. Нужно заполнить пустые ячейки цифрами от 1 до 9 так, чтобы в каждой строке, в каждом столбце и в каждом квадрате 3□3 не повторялись одинаковые цифры.

# Головоломка Судоку 9□9.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 9 | | | | 4 | | |
| | | | 5 | | | 1 | | |
| | 4 | | | | | | | |
| | | | | 4 | 2 | | | |
| 6 | | | | | | | 7 | |
| 5 | | | | | | | | |
| 7 | | | 3 | | | | | 5 |
| | 1 | | | 9 | | | | |
| | | | | | | | 6 | |

<u>Задача</u>

Построить сложное высказывание, выполнимость которого равносильна решению головоломки Судоку 9□9.