

Раздел III. Аналитическая

Тема 1-11 геометрия

Расстояние между двумя точками.

Середина отрезка. Координаты

середины отрезка. Уравнение прямой

на плоскости. Уравнение прямой в

пространстве. Уравнение плоскости.

Расстояние от точки до плоскости.

Расстояние между плоскостями.

Расстояние от точки до прямой на

плоскости. Расстояние от точки до

прямой в пространстве. Угол между

плоскостями. Угол между прямой и

плоскостью

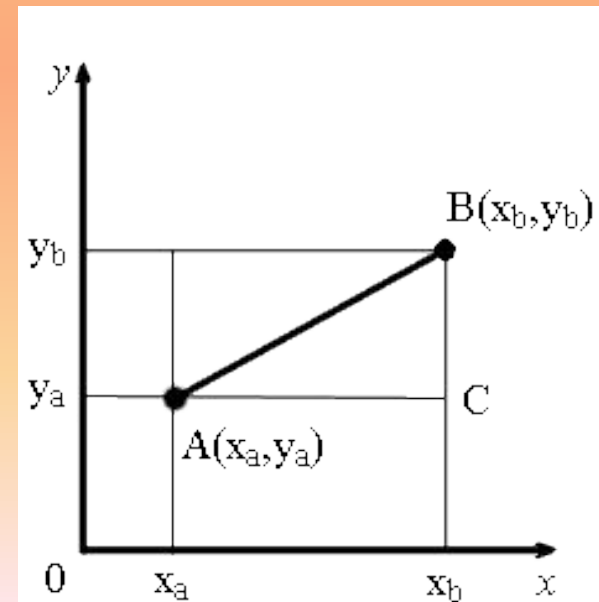
Расстояние между двумя точками —
это длина отрезка, что соединяет эти
ТОЧКИ.

- *Формула вычисления расстояния между двумя точками $A(x_a, y_a)$ и $B(x_b, y_b)$ на плоскости:*

$$AB = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

- *Формула вычисления расстояния между двумя точками $A(x_a, y_a, z_a)$ и $B(x_b, y_b, z_b)$ в пространстве:*

$$AB = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2}$$



Середина отрезка - это точка,
которая лежит на отрезке и находится
на равном расстоянии от конечных
точек.

- *Формула вычисления координат середины отрезка с концами $A(x_a, y_a)$ и $B(x_b, y_b)$ на плоскости:*

$$x_c = \frac{x_a + x_b}{2} \qquad y_c = \frac{y_a + y_b}{2}$$

- *Формула вычисления координат середины отрезка с концами $A(x_a, y_a, z_a)$ и $B(x_b, y_b, z_b)$ в пространстве:*

$$x_c = \frac{x_a + x_b}{2} \qquad y_c = \frac{y_a + y_b}{2} \qquad z_c = \frac{z_a + z_b}{2}$$

Прямая (прямая линия) - это бесконечная линия, по которой проходит кратчайший путь между любыми двумя её точками.

- Любую прямую на плоскости можно задать **уравнением прямой** первой степени вида

$$A x + B y + C = 0,$$

где A и B не могут быть одновременно равны нулю.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

- Общее уравнение прямой при $B \neq 0$ можно привести к виду

$$y = kx + b,$$

где k - **угловой коэффициент** равный тангенсу угла, образованного данной прямой и положительным направлением оси Ox .

Уравнение прямой в отрезках на осях

- Если прямая пересекает оси OX и OY в точках с координатами (a, 0) и (0, b), то она может быть найдена используя формулу **уравнения прямой в отрезках**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Уравнение прямой, проходящей через две различные точки на плоскости

- Если прямая проходит через две точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, такие что $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$ то **уравнение прямой** можно найти, используя следующую формулу

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Параметрическое уравнение прямой на плоскости

- Параметрические уравнения прямой могут быть записаны следующим образом

$$\begin{cases} x = l t + x_0 \\ y = m t + y_0 \end{cases}$$

где (x_0, y_0) - координаты точки лежащей на прямой,

$\{l, m\}$ - координаты направляющего вектора прямой.

Каноническое уравнение прямой на плоскости

- Если известны координаты точки $A(x_0, y_0)$ лежащей на прямой и направляющего вектора $n = \{l; m\}$, то уравнение прямой можно записать в каноническом виде, используя следующую формулу

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$

Уравнение прямой, проходящей через две различные точки в пространстве

- Если прямая проходит через две точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, такие что $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ и $z_1 \neq z_2$ то **уравнение прямой** можно найти используя следующую формулу

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Параметрическое уравнение прямой в пространстве

- Параметрические уравнения прямой могут быть записаны следующим образом

$$\begin{cases} x = l t + x_0 \\ y = m t + y_0 \\ z = n t + z_0 \end{cases}$$

где (x_0, y_0, z_0) - координаты точки лежащей на прямой,

$\{l; m; n\}$ - координаты направляющего вектора прямой.

Каноническое уравнение прямой в пространстве

- Если известны координаты точки $A(x_0, y_0, z_0)$ лежащей на прямой и направляющего вектора $n=\{l;m;n\}$, то уравнение прямой можно записать в каноническом виде, используя следующую формулу

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

Прямая как линия пересечения двух плоскостей

- Если прямая является пересечением двух плоскостей, то ее уравнение можно задать следующей системой уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

при условии, что не имеет место
равенство

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} .$$

Плоскость - есть поверхность, полностью содержащая, каждую прямую, соединяющую любые её точки.

- Любую плоскость можно задать **уравнением плоскости** первой степени вида

$$A x + B y + C z + D = 0$$

где A, B и C не могут быть одновременно равны нулю.

Уравнение плоскости в отрезках

- Если плоскость пересекает оси OX, OY и OZ в точках с координатами (a, 0, 0), (0, b, 0) и (0, 0, c), то она может быть найдена, используя формулу **уравнения плоскости в отрезках**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

*Уравнение плоскости,
проходящей через точку,
перпендикулярно вектору
нормали*

- Чтобы составить уравнение плоскости, зная координаты точки плоскости $M(x_0, y_0, z_0)$ и вектора нормали плоскости $n = \{A; B; C\}$ можно использовать следующую формулу.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

*Уравнение плоскости,
проходящей через три заданные
точки, не лежащие на одной
прямой*

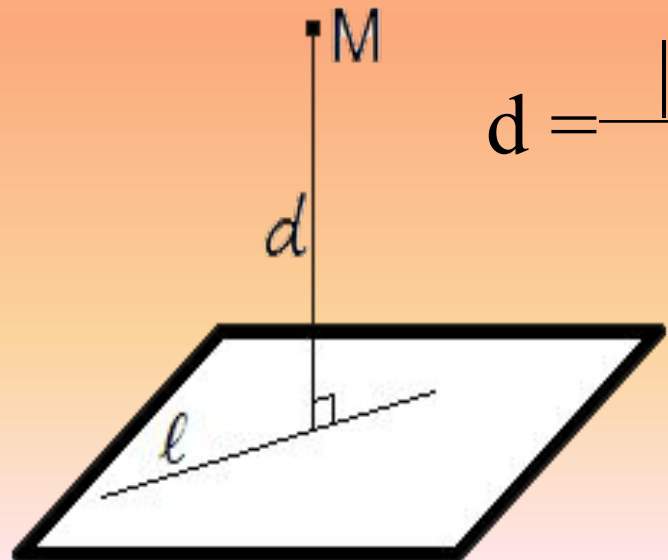
- Если заданы координаты трех точек $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ и $C(x_3, y_3, z_3)$, лежащих на плоскости, то уравнение плоскости можно найти по следующей формуле

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Расстояние от точки до плоскости — равно длине перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.

- Если задано уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, то расстояние от точки $M(M_x, M_y, M_z)$ до плоскости можно найти, используя следующую формулу:

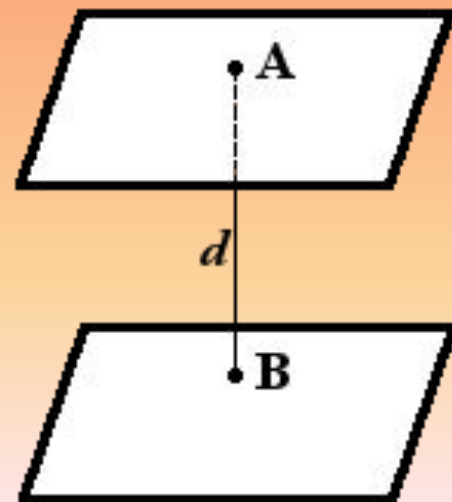
$$d = \frac{|A \cdot M_x + B \cdot M_y + C \cdot M_z + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



Расстояние между плоскостями —
равно длине перпендикуляра,
опущенного с одной плоскости на
другую.

- Если заданы уравнения параллельных плоскостей $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ и $Ax + By + Cz + D_2 = 0$, то расстояние между плоскостями можно найти, используя следующую формулу

$$d = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



Расстояние от точки до прямой — равно длине перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

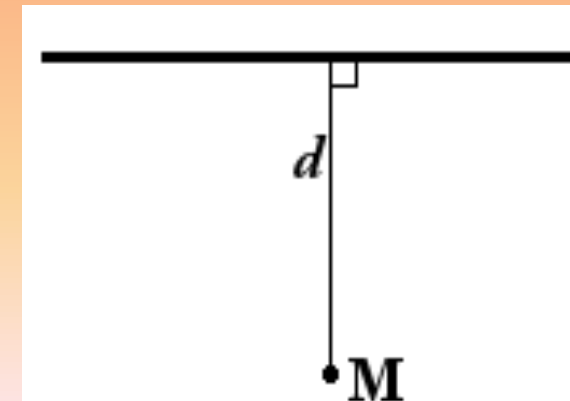
- Если задано уравнение прямой $Ax + By + C = 0$, то расстояние от точки $M(M_x, M_y)$ до прямой можно найти, используя следующую формулу

$$d = \frac{|A \cdot M_x + B \cdot M_y + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

**Расстояние от точки до
прямой — равно длине
перпендикуляра, опущенного из
точки на прямую.**

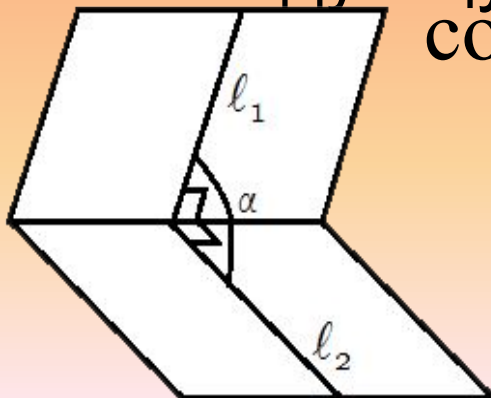
- Если $s = \{m; n; p\}$ - направляющий вектор прямой l , $M_1(x_1, y_1, z_1)$ - точка лежащей на прямой, тогда расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до прямой l можно найти, используя формулу

$$d = \frac{|M_0 M_1 \times s|}{|s|}$$



- **Двугранный угол между плоскостями** равен углу образованному нормальными векторами этих плоскостей.
- **Двугранный угол между плоскостями** равен углу образованному прямыми l_1 и l_2 , лежащими в соответствующих плоскостях и перпендикулярными линии пересечения плоскостей.
- Если заданы уравнения плоскостей $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, то угол между плоскостями можно найти, используя следующую формулу

$$\cos \alpha = \frac{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$



Угол между прямой и плоскостью — это угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.

- Если в пространстве заданы направляющий вектор прямой L $s = \{l; m; n\}$ и уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, то угол между этой прямой и плоскостью можно найти используя формулу

$$\sin \varphi = \frac{|A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

