

!Здравствуйте

Лекция №20

Преобразование Фурье

Кроме преобразования Лапласа, широкое применение находит также еще одно интегральное преобразование, которое носит название преобразования Фурье.

Пусть $f(x)$ есть функция вещественной переменной x , определенная на всей прямой $-\infty < x < +\infty$. Основное ограничение, накладываемое на эту функцию, имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < +\infty,$$

то есть эта функция абсолютно интегрируема на всей вещественной оси. Кроме этого, мы будем требовать, чтобы $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$. В некоторых случаях будет требоваться также, чтобы при некоторых n

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x^n f(x)| dx < +\infty.$$

Преобразованием Фурье от функции $f(x)$ называется функция

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx. \quad (8)$$

Она существует при любых ω , так как

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < +\infty.$$

Как и в случае преобразования Лапласа оказывается, что не только $F(\omega)$ однозначно определяется $f(x)$, но и наоборот, $f(x)$ однозначно определяется $F(\omega)$, то есть имеет место взаимно-однозначное соответствие $f(x) \leftrightarrow F(\omega)$.

Теорема. Пусть $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < +\infty$ и $f(x)$ непрерывна в точке x .

Тогда имеет место формула

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} d\omega, \quad (9)$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. Эта формула носит название обратного преобразования Фурье.

Доказательство этой теоремы мы приводить не будем.

Свойства преобразования Фурье

Пусть $F(\omega)$ и $G(\omega)$ будут преобразованиями Фурье от функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно, то есть $f(x) \leftrightarrow F(\omega)$, $g(x) \leftrightarrow G(\omega)$.

1. Линейность.

$$\alpha f(x) + \beta g(x) \leftrightarrow \alpha F(\omega) + \beta G(\omega).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \alpha f(x) + \beta g(x) &\leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x)) e^{i\omega x} dx = \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx + \beta \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{i\omega x} dx = \alpha F(\omega) + \beta G(\omega). \end{aligned}$$

2. Формула подобия.

$$f(\alpha x) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right).$$

Имеем

$$f(\alpha x) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha x) e^{i\omega x} dx = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{i\frac{z}{\alpha}\omega} dz = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right),$$

где в интеграле сделана замена переменных $\alpha x = z$.

3. Теорема о сдвиге.

$$f(x - \tau) \leftrightarrow e^{i\omega\tau} F(\omega).$$

Действительно, делая замену переменных $x - \tau = z$, получим

$$f(x - \tau) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \tau) e^{i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{i\omega z} \cdot e^{i\omega\tau} dz = e^{i\omega\tau} F(\omega).$$

4. Формула сдвига.

$$f(x)e^{i\alpha x} \leftrightarrow F(\omega + \alpha).$$

Имеем

$$f(x)e^{i\alpha x} \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x} e^{i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i(\omega+\alpha)x} dx = F(\omega + \alpha).$$

Следствия.

А) Так как $\sin \alpha x = (e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x})/2i$, то

$$f(x)\sin \alpha x = \frac{1}{2i} [f(x)e^{i\alpha x} - f(x)e^{-i\alpha x}] \leftrightarrow \frac{1}{2i} [F(\omega + \alpha) - F(\omega - \alpha)].$$

Б) Так как $\cos \alpha x = (e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x})/2$, то

$$f(x)\cos \alpha x = \frac{1}{2} [f(x)e^{i\alpha x} + f(x)e^{-i\alpha x}] \leftrightarrow \frac{1}{2} [F(\omega + \alpha) + F(\omega - \alpha)].$$

5. Дифференцирование функции.

$$f^{(n)}(x) \leftrightarrow (-i\omega)^n F(\omega).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} f'(x) &\leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} df(x) = \\ &= f(x) e^{i\omega x} \Big|_{-\infty}^{\infty} - i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx = (-i\omega) F(\omega), \end{aligned}$$

так как $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

Аналогично

$$\begin{aligned} f''(x) &\leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f''(x) e^{i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} df'(x) = \\ &= f'(x) e^{i\omega x} \Big|_{-\infty}^{\infty} - i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{i\omega x} dx = (-i\omega)^2 F(\omega), \end{aligned}$$

если $f'(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

6. Дифференцирование преобразования Фурье.

Если $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x^n f(x)| dx < +\infty$, то

$$x^n f(x) \leftrightarrow (-i)^n F^{(n)}(\omega).$$

Имеем

$$F(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx \leftrightarrow f(x). \quad (10)$$

Дифференцируя по ω , получим

$$F'(\omega) = i \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x) e^{i\omega x} dx \leftrightarrow (ix) f(x),$$

и интеграл сходится, если $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x f(x)| dx < +\infty$.

Дифференцируя еще раз, получим

$$F''(\omega) = i^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) e^{i\omega x} dx \leftrightarrow (ix)^2 f(x),$$

и интеграл сходится, если $\int_{-\infty}^{\infty} |x^2 f(x)| dx < +\infty$.

В общем случае, если $\int_{-\infty}^{\infty} |x^n f(x)| dx < +\infty$, то, дифференцируя (10)

n раз, получим

$$\begin{aligned} F^{(n)}(\omega) &\leftrightarrow (ix)^n f(x), \\ x^n f(x) &\leftrightarrow (-i)^n F^{(n)}(\omega). \end{aligned}$$

7. Свертка функций.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены для $x \in (-\infty, +\infty)$. Сверткой этих двух функций называется

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy,$$

которая обозначается как $f(x)*g(x)$.

Формула имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy \leftrightarrow F(\omega)G(\omega).$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy = \\
 & = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega y} e^{i\omega(x-y)} f(y) g(x-y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega y} f(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x-y)} g(x-y) dx \\
 & = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega y} f(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega z} g(z) dz = F(\omega) G(\omega),
 \end{aligned}$$

где в последнем интеграле сделана замена переменных $x - y = z$.

Конец четвертой части