

## **Лекция 3. КОНТРОЛЬНЫЕ КАРТЫ**

# Контрольные карты Шухарта



Уолтер Шухарт  
(1891-1967)

Контрольные карты (контрольные карты Шухарта) – инструмент, позволяющий отслеживать изменение показателя качества во времени

Цель контрольных карт:  
статистическое управление технологическим процессом

Задача статистического управления:  
обеспечение и поддержание процесса на приемлемом и стабильном уровнях

1. ***Shewhart W. A. Economic control of quality of manufactured product. — D. Van Nostrand Company, 1931. — P. 501.***
2. ***ГОСТ Р 50779.42-99 (ISO 8258-91) Контрольные карты Шухарта***

# Графический вид контрольной карты

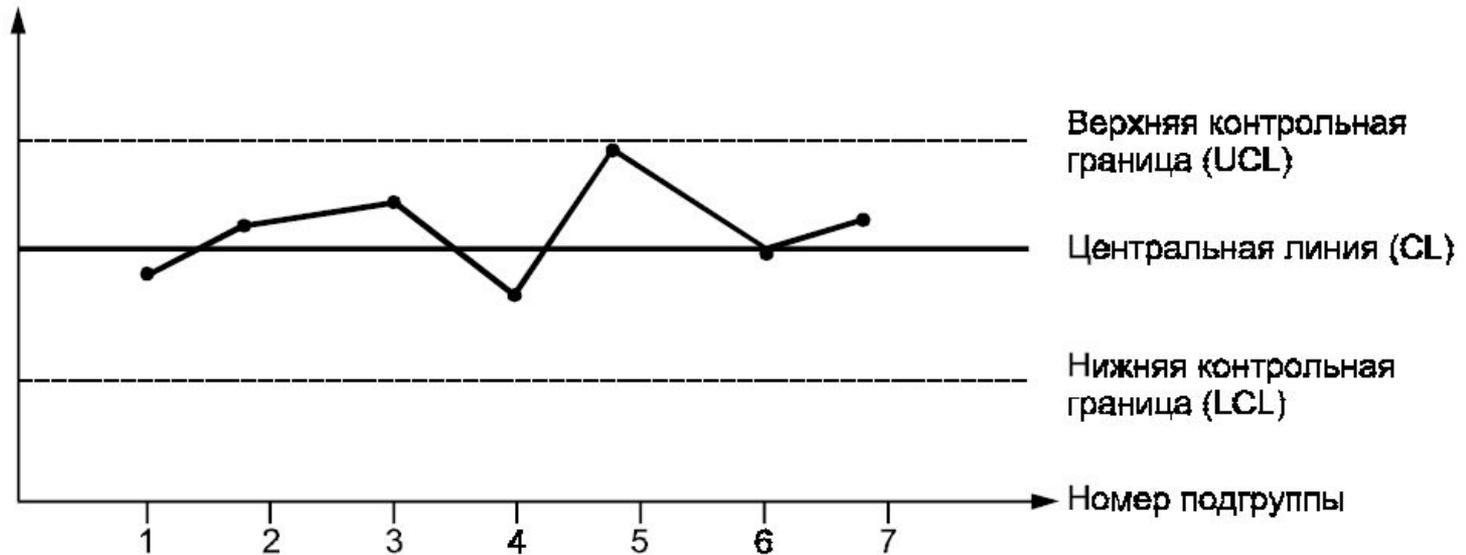


Рисунок 1 — Вид контрольной карты

В основе контрольных карт лежит идея Шухарта о разделении наблюдений на так называемые «рациональные» подгруппы, внутри которых могут возникнуть вариации, обусловленные только случайными причинами, в то время как различия между ними могут быть обусловлены особыми причинами, которые контрольные карты и должны обнаружить.

# Определения и обозначения

- $n$  — объем подгруппы, число выборочных наблюдений в подгруппе;
- $k$  — число подгрупп;
- $X$  — измеряемая характеристика качества (индивидуальные значения записываются как  $(X_1, X_2, X_3 \dots)$ ). Иногда вместо  $X$  используют  $Y$ ;
- $\bar{X}$  — среднее значение для подгруппы,  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_1^n X_i$  ;
- $\bar{\bar{X}}$  — среднее средних значений подгрупп;
- $\mu$  — истинное среднее процесса;
- $Me$  — медиана подгруппы. Для выборки объема  $n$ , значения  $X_1, X_2, X_n$  которой упорядочены по возрастанию или по убыванию, медиана есть центральное значение, если  $n$  нечетно, и среднее двух центральных значений, если  $n$  четно;
- $\bar{Me}$  — среднее значение медиан подгрупп;
- $R$  — размах подгруппы (разность наибольшего и наименьшего значений в подгруппе);
- Примечание — В случае контрольной карты индивидуальных наблюдений  $R$  представляет собой скользящий размах, то есть абсолютную разность двух последовательных значений  $|X_1 - X_2|$ ,  $|X_2 - X_3|$  и т. д.
- $\bar{R}$  — среднее значение  $R$  для всех подгрупп;

# Определения и обозначения

$s$  — выборочное стандартное (среднее квадратическое) отклонение  $s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n - 1}}$  ;

$\bar{s}$  — среднее выборочных стандартных (средних квадратических) отклонений подгрупп;

$\sigma$  — истинное внутригрупповое стандартное отклонение;

$\hat{\sigma}$  — оцененное внутригрупповое стандартное отклонение процесса;

$np$  — число несоответствующих единиц в подгруппе;

$p$  — доля несоответствующих единиц в подгруппе

$$p = \frac{\text{число несоответствующих единиц в подгруппе}}{\text{объем подгруппы}} ;$$

$\bar{p}$  — среднее значение доли несоответствующих единиц

$$\bar{p} = \frac{\text{число несоответствующих единиц во всех подгруппах}}{\text{общее число проверенных единиц}} ;$$

$c$  — число несоответствий в подгруппе;

$\bar{c}$  — среднее значений  $c$  для всех подгрупп;

$u$  — число несоответствий на единицу в подгруппе;

$\bar{u}$  — среднее значение  $u$

$$\bar{u} = \frac{\text{число несоответствий во всех единицах}}{\text{общее число проверенных единиц}} ;$$

# Вид контрольных карт

## **Для количественных признаков**

- Карты среднего ( $\bar{X}$ ) и размахов ( $R$ ) или стандартных отклонений ( $s$ )
- Карта индивидуальных значений ( $X$ ) и скользящих размахов ( $R$ )
- Карта медиан ( $Me$ ) и размахов ( $R$ )

## **Для качественных признаков**

- Карты долей несоответствующих единиц продукции ( $p$ ) или карта числа несоответствующих единиц ( $np$ )
- Карта числа несоответствий ( $c$ ) или карта числа несоответствий, приходящихся на единицу продукции ( $u$ ).

# Преимущества контрольных карт для количественных данных

- Большинство процессов и их продукция на выходе имеют характеристики, которые могут быть измерены, так что применимость таких карт потенциально широка;
- Измеренное значение содержит больше информации, чем простое утверждение «да- нет»;
- Характеристики процесса могут быть проанализированы безотносительно установленных требований. Карты запускаются вместе с процессом и дают независимую картину того, на что процесс способен. После этого характеристики процесса можно сравнить или нет с установленными требованиями;
- Хотя получение количественных данных дороже, чем альтернативных, объёмы подгрупп для количественных данных почти всегда гораздо меньше и при этом намного эффективнее. это позволяет снизить общую стоимость контроля и уменьшить временной разрыв между производством продукции и корректирующим воздействием

# Карта средних арифметических значений (X-карта) и размахов (R) или стандартных отклонений (s)

Т а б л и ц а 1 — Формулы контрольных границ для карт Шухарта с использованием количественных данных

Статистика	Стандартные значения не заданы		Стандартные значения заданы	
	Центральная линия	UCL и LCL	Центральная линия	UCL и LCL
$\bar{X}$	$\bar{\bar{X}}$	$\bar{\bar{X}} \pm A_2 \bar{R}$ или $\bar{\bar{X}} \pm A_3 \bar{s}$	$X_0$ или $\mu$	$X_0 \pm A \sigma_0$
$R$	$\bar{R}$	$D_3 \bar{R}, D_4 \bar{R}$	$R_0$ или $d_2 \sigma_0$	$D_1 \sigma_0, D_2 \sigma_0$
$s$	$\bar{s}$	$B_3 \bar{s}, B_4 \bar{s}$	$s_0$ или $C_4 \sigma_0$	$B_5 \sigma_0, B_6 \sigma_0$

П р и м е ч а н и е — Заданы стандартные значения  $X_0$  или  $\mu$ ,  $R_0$ ,  $S_0$  или  $\sigma_0$ .

# Карта средних арифметических значений (X-карта) и размахов (R) или стандартных отклонений (s)

Т а б л и ц а 2 — Коэффициенты для вычисления линий контрольных карт

Число наблюдений в подгруппе $n$	Коэффициенты для вычисления контрольных границ											Коэффициенты для вычисления центральной линии			
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$	$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$	$C_4$	$1/C_4$	$d_2$	$1/d_2$
2	2,121	1,880	2,659	0,000	3,267	0,000	2,606	0,000	3,686	0,000	3,267	0,7979	1,2533	1,128	0,8865
3	1,732	1,023	1,954	0,000	2,568	0,000	2,276	0,000	4,358	0,000	2,574	0,8886	1,1284	1,693	0,5907
4	1,500	0,729	1,628	0,000	2,266	0,000	2,088	0,000	4,696	0,000	2,282	0,9213	1,0854	2,059	0,4857
5	1,342	0,577	1,427	0,000	2,089	0,000	1,964	0,000	4,918	0,000	2,114	0,9400	1,0638	2,326	0,4299
6	1,225	0,483	1,287	0,030	1,970	0,029	1,874	0,000	5,078	0,000	2,004	0,9515	1,0510	2,534	0,3946
7	1,134	0,419	1,182	0,118	1,882	0,113	1,806	0,204	5,204	0,076	1,924	0,9594	1,0423	2,704	0,3698
8	1,061	0,373	1,099	0,185	1,815	0,179	1,751	0,388	5,306	0,136	1,864	0,9650	1,0363	2,847	0,3512
9	1,000	0,337	1,032	0,239	1,761	0,232	1,707	0,547	5,393	0,184	1,816	0,9693	1,0317	2,970	0,3367
10	0,949	0,308	0,975	0,284	1,716	0,276	1,669	0,687	5,469	0,223	1,777	0,9727	1,0281	3,078	0,3249

П р и м е ч а н и е — Источник ASTM, Philadelphia, PA, USA.

# Контрольные карты индивидуальных значений $X$

Т а б л и ц а 3 — Формулы контрольных границ для карт индивидуальных значений

Статистика	Стандартные значения не заданы		Стандартные значения заданы	
	Центральная линия	UCL и LCL	Центральная линия	UCL и LCL
Индивидуальное значение $X$	$\bar{X}$	$\bar{X} \pm E_2 \bar{R}$	$X_0$ или $\mu$	$X_0 \pm 3 \sigma_0$
Скользющий размах $R$	$\bar{R}$	$D_4 \bar{R}, D_3 \bar{R}$	$R_0$ или $d_2 \sigma_0$	$D_2 \sigma_0, D_1 \sigma_0$
<p><b>П р и м е ч а н и я</b></p> <p>1 Заданы стандартные значения <math>X_0</math> и <math>R_0</math> или <math>\mu</math> и <math>\sigma_0</math>.</p> <p>2 <math>\bar{R}</math> обозначает среднее скользящего размаха из двух наблюдений (<math>n = 2</math>).</p> <p>3 Значения коэффициентов <math>d_2, D_1, D_2, D_3, D_4</math> и косвенно <math>E_2 = 3/d_2</math> можно получить из таблицы 2 при <math>n = 2</math>.</p>				

# Контрольные карты медиан $Me$

## 5.3.1 Карта медиан

Центральная линия равна  $\overline{Me}$  (среднему от медиан подгрупп),

$$UCL_{Me} = \overline{Me} + A_4 \overline{R},$$

$$LCL_{Me} = \overline{Me} - A_4 \overline{R}.$$

Карту медиан строят таким же образом, как и  $\overline{X}$ - и  $R$ -карты (5.1). Коэффициент  $A_4$  приведен в таблице 4.

Таблица 4 — Значения коэффициента  $A_4$

$n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$A_4$	1,88	1,19	0,80	0,69	0,55	0,51	0,43	0,41	0,36

Следует отметить, что карта медиан с границами  $3\sigma$  более медленно реагирует на выход процесса из состояния статистической управляемости, чем  $\overline{X}$ -карта.

## 5.3.2 Карта размахов

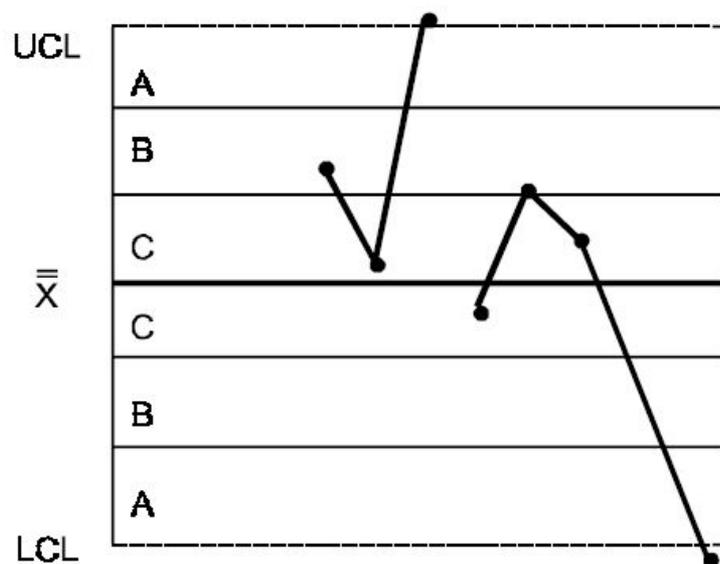
Центральная линия равна  $\overline{R}$  (среднему размахов  $R$  для всех подгрупп),

$$UCL_R = D_4 \overline{R},$$

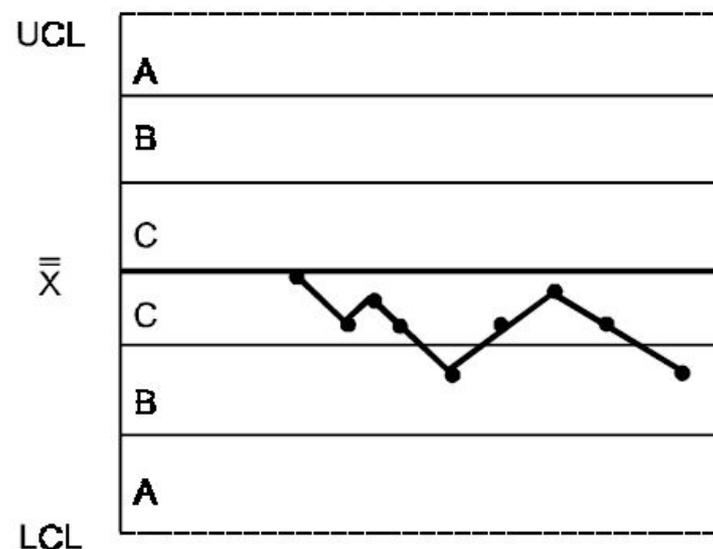
$$LCL_R = D_3 \overline{R}.$$

Значения постоянных  $D_3$  и  $D_4$  приведены в таблице 2.

# Дополнительные критерии



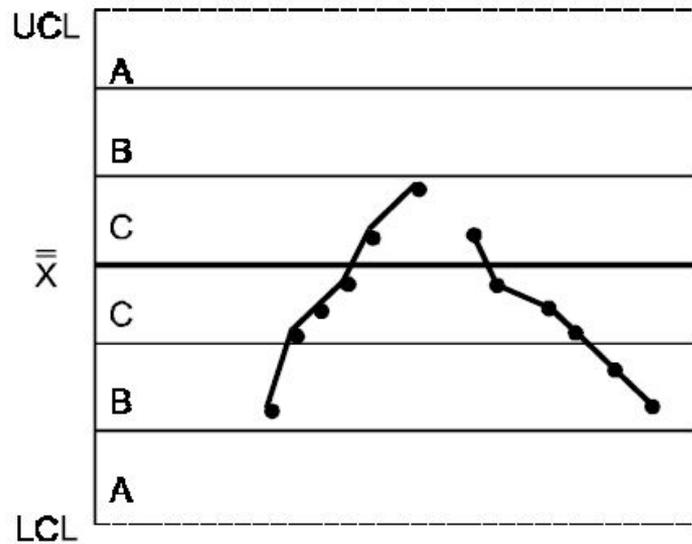
КРИТЕРИЙ 1 — Одна точка вне зоны А



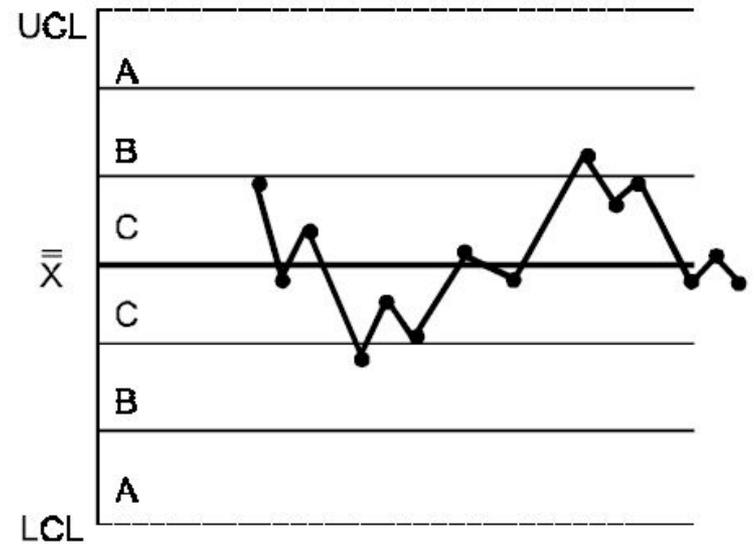
КРИТЕРИЙ 2 — Девять точек подряд в зоне С или по одну сторону от центральной линии

Верхняя и нижняя контрольные границы установлены на расстоянии  $3\sigma$  над и под центральной линией. Для применения этих критериев контрольная карта делится на шесть равных зон шириной  $\sigma$ . Эти зоны обозначаются А, В, С, С, В, А, причем зоны С расположены симметрично центральной линии. Данные критерии применимы к  $\bar{x}$ -картам и  $X$ -картам индивидуальных значений. Предполагается нормальное распределение соответственно  $\bar{X}$  и индивидуальных значений.

# Дополнительные критерии

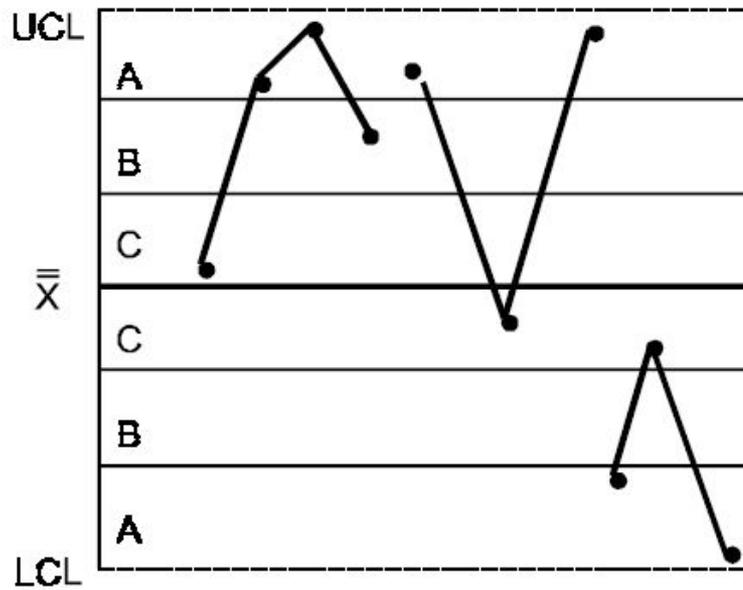


КРИТЕРИЙ 3 — Шесть возрастающих или убывающих точек подряд

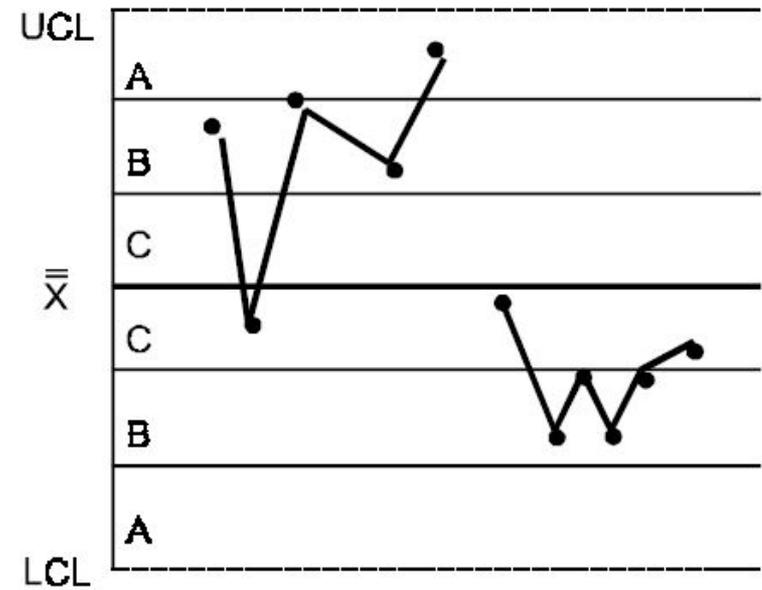


КРИТЕРИЙ 4 — Четырнадцать попеременно возрастающих и убывающих точек

# Дополнительные критерии

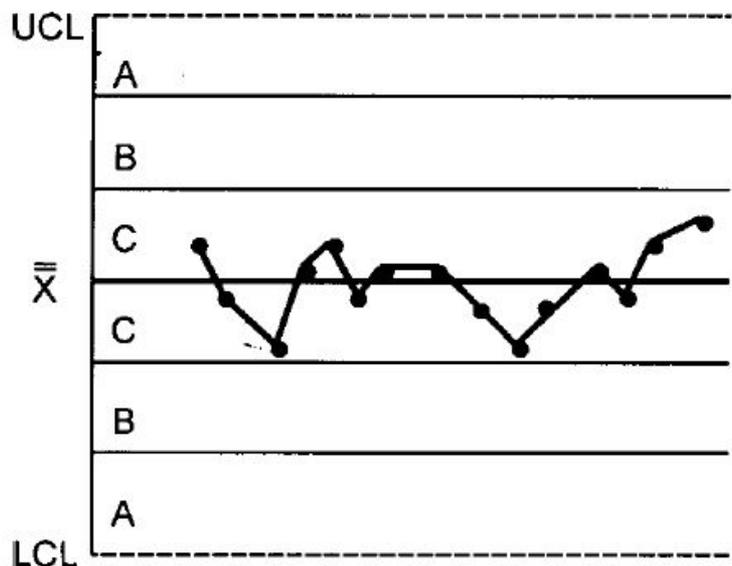


КРИТЕРИЙ 5 — Две из трех последовательных точек в зоне *A* или вне ее

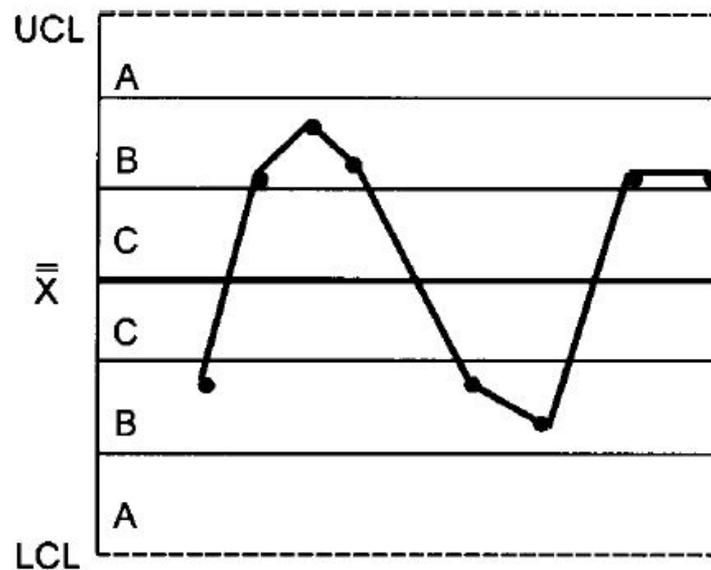


КРИТЕРИЙ 6 — Четыре из пяти последовательных точек в зоне *B* или вне ее

# Дополнительные критерии

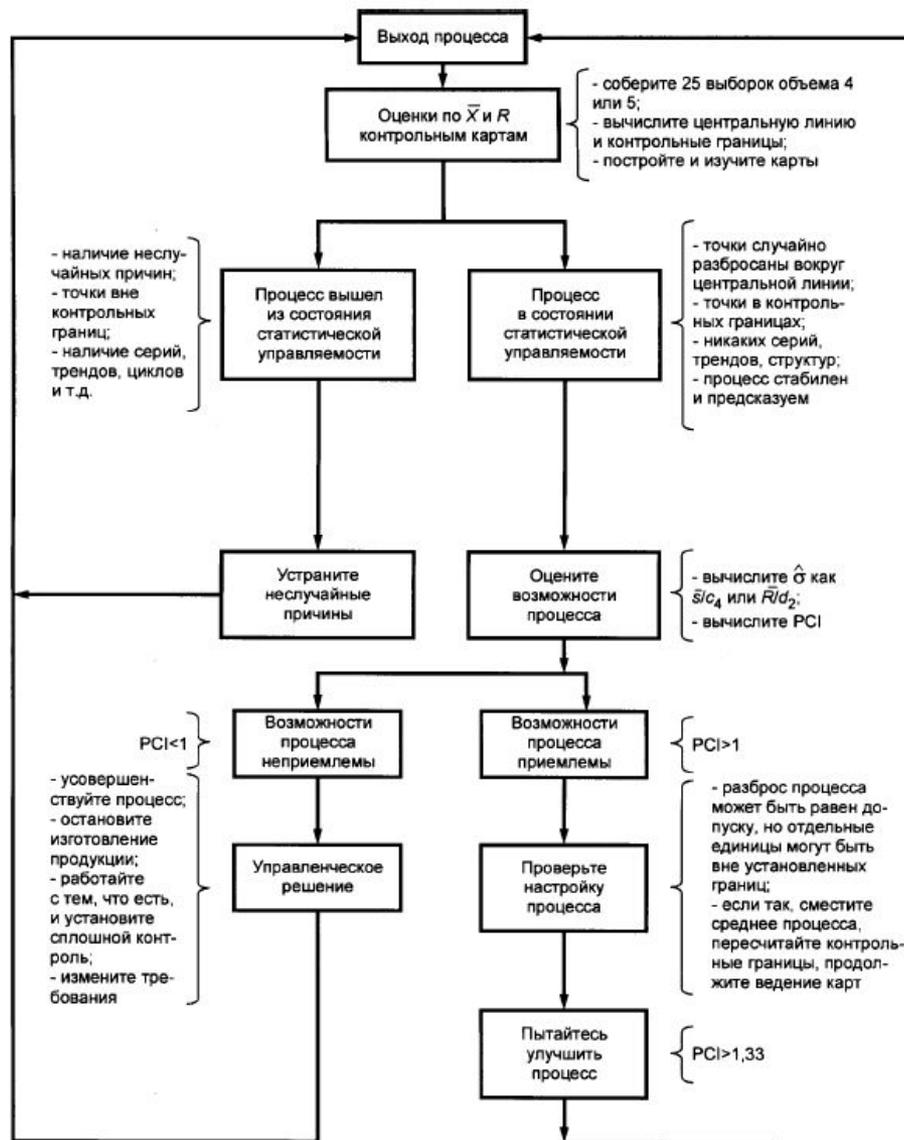


КРИТЕРИЙ 7 — Пятнадцать последовательных точек в зоне C выше и ниже центральной линии



КРИТЕРИЙ 8 — Восемь последовательных точек по обеим сторонам центральной линии и ни одной в зоне C

# Стратегия совершенствования процесса



$$PCI = \frac{\text{допуск}}{\text{разброс процесса}} \frac{UTL - LTL}{6\hat{\sigma}}$$

# Контрольные карты для альтернативных данных

Альтернативные данные представляют собой наблюдения, фиксирующие наличие или отсутствие некоторых характеристик (или признаков) у каждой единицы рассматриваемой подгруппы. На основе этих данных производится подсчет числа единиц, обладающих или не обладающих данным признаком, или число таких событий в единице продукции, группе или области. Альтернативные данные в общем случае могут быть получены быстро и дешево, для сбора их не требуется специального обучения. В таблице 5 приведены формулы контрольных границ для контрольных карт, использующих альтернативные данные.

Т а б л и ц а 5 — Формулы контрольных границ карт Шухарта для альтернативных данных

Статистика	Стандартные значения не заданы		Стандартные значения заданы	
	Центральная линия	3σ-е контрольные границы	Центральная линия	3σ-е контрольные границы
$p$	$\bar{p}$	$\bar{p} \pm 3 \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$	$p_0$	$p_0 \pm 3 \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$
$np$	$n\bar{p}$	$n\bar{p} \pm 3 \sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}$	$np_0$	$np_0 \pm 3 \sqrt{np_0(1-p_0)}$
$c$	$\bar{c}$	$\bar{c} \pm 3 \sqrt{\bar{c}}$	$c_0$	$c_0 \pm 3 \sqrt{c_0}$
$u$	$\bar{u}$	$\bar{u} \pm 3 \sqrt{\frac{\bar{u}}{n}}$	$u_0$	$u_0 \pm 3 \sqrt{\frac{u_0}{n}}$
Примечание — $p_0, np_0, c_0, u_0$ — заданные стандартные значения.				

Биномиальное  
распределение

Распределение  
Пуассона

# Пример контрольной карты

Менеджер по качеству импортера чая на основании подобных процессов предъявляет требования к процессу упаковки такие, чтобы средний вес упаковки был 100,6 г и предполагаемое стандартное отклонение процесса равно 1,4 г. — получено на основе аналогичных упаковочных процессов.

Поскольку стандартные значения даны ( $X_0 = 100,6$ ;  $\sigma_0 = 1,4$ ), контрольную карту средних и карту размахов можно построить с использованием формул, приведенных в таблице 1 и коэффициентов  $A$ ,  $d_2$ ,  $D_2$  и  $D_1$ , приведенных в таблице 2 для  $n = 5$ .

## $\bar{X}$ -КАРТА:

центральная линия:  $X_0 = 100,6$  г

$$UCL = X_0 + A\sigma_0 = 100,6 + (1,342 \cdot 1,4) = 102,5 \text{ г}$$

$$LCL = X_0 - A\sigma_0 = 100,6 - (1,342 \cdot 1,4) = 98,7 \text{ г}$$

## $R$ -КАРТА:

центральная линия:  $d_2\sigma_0 = 2,326 \cdot 1,4 = 3,3$  г

$$UCL = D_2 \sigma_0 = 4,918 \cdot 1,4 = 6,9 \text{ г}$$

$$LCL = D_1 \sigma_0 = 0 \cdot 1,4 = 0$$

(т. к.  $n < 7$ , то LCL отсутствует)

# Пример контрольной карты

Для контроля следует взять 25 выборок объема 5. Значения их средних и размахов приведены в таблице 6. На рисунке 5 они нанесены вместе с контрольными границами.

Т а б л и ц а 6 — Процесс упаковки чая

Номер подгруппы	Среднее подгруппы $\bar{X}$	Размах подгруппы $R$	Номер подгруппы	Среднее подгруппы $\bar{X}$	Размах подгруппы $R$
1	100,6	3,4	6	99,5	3,8
2	101,3	4,0	7	100,4	4,1
3	99,6	2,2	8	100,5	1,7
4	100,5	4,5	9	101,1	2,2
5	99,9	4,8	10	100,3	4,6

# Пример контрольной карты

Для контроля следует взять 25 выборок объема 5. Значения их средних и размахов приведены в таблице 6. На рисунке 5 они нанесены вместе с контрольными границами.

Т а б л и ц а 6 — Процесс упаковки чая

Номер подгруппы	Среднее подгруппы $\bar{X}$	Размах подгруппы $R$	Номер подгруппы	Среднее подгруппы $\bar{X}$	Размах подгруппы $R$
1	100,6	3,4	6	99,5	3,8
2	101,3	4,0	7	100,4	4,1
3	99,6	2,2	8	100,5	1,7
4	100,5	4,5	9	101,1	2,2
5	99,9	4,8	10	100,3	4,6
11	100,1	5,0	19	100,5	3,9
12	99,6	6,1	20	99,5	4,7
13	99,2	3,5			
14	99,4	5,1	21	100,1	4,6
15	99,4	4,5	22	100,4	4,4
			23	101,1	4,9
16	99,6	4,1	24	99,9	4,7
17	99,3	4,7	25	99,7	3,4
18	99,9	5,0			

# Пример контрольной карты

