

Глава 1. Дифференциальные уравнения

Тема 3. Системы дифференциальных уравнений

§1. Основные понятия и определения

§2. Метод исключения

§1. Основные понятия и определения

Системой обыкновенных дифференциальных уравнений называется система n уравнений, которые связывают независимую переменную x , n искомых функций $y_1, y_2, \dots, y_n$ и их производные до порядков $m_1, m_2, \dots, m_n$ соответственно.

⇒ Общий вид системы ОДУ:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(m_2)}, \dots, y_n, y_n', \dots, y_n^{(m_n)}) = 0, \\ F_2(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(m_2)}, \dots, y_n, y_n', \dots, y_n^{(m_n)}) = 0, \\ \vdots \\ F_n(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(m_2)}, \dots, y_n, y_n', \dots, y_n^{(m_n)}) = 0, \end{cases}$$

где x – независимая переменная, $y_i(x)$ – искомые функции, $F_i(x)$ – известные функции.

Краткая запись системы (1):

$$F_i(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(m_2)}, \dots, y_n, y_n', \dots, y_n^{(m_n)}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Замечание. Всегда будем предполагать, что число уравнений в систему ОДУ равно числу неизвестных функций.

Системы ОДУ, в которых число уравнений меньше числа неизвестных функций, называются уравнениями Монжа.

Совокупность n функций

$$y_1 = y_1(x), \quad y_2 = y_2(x), \quad \dots, \quad y_n = y_n(x)$$

*называется **решением системы** (1) на интервале $(a;b)$, если она обращает на $(a;b)$ каждое уравнение этой системы в тождество.*

Система ДУ, которая может быть разрешена относительно старших производных всех входящих в нее функций, называется **канонической**.

⇒ Общий вид канонической системы ДУ:

$$\begin{cases} y_1^{(m_1)} = f_1(x, y_1, y_1', \square, y_1^{(m_1-1)}, y_2, y_2', \square, y_2^{(m_2-1)}, \square, y_n, y_n', \square, y_n^{(m_n-1)}), \\ y_2^{(m_2)} = f_2(x, y_1, y_1', \square, y_1^{(m_1-1)}, y_2, y_2', \square, y_2^{(m_2-1)}, \square, y_n, y_n', \square, y_n^{(m_n-1)}), \\ \square \quad \square \\ y_n^{(m_n)} = f_n(x, y_1, y_1', \square, y_1^{(m_1-1)}, y_2, y_2', \square, y_2^{(m_2-1)}, \square, y_n, y_n', \square, y_n^{(m_n-1)}), \end{cases}$$

где x – независимая переменная, $y_i(x)$ – искомые функции, $f_i(x)$ – известные функции.

Краткая запись системы (2):

$$y_i^{(m_i)} = f_i(x, y_1, y_1', \square, y_1^{(m_1-1)}, y_2, y_2', \square, y_2^{(m_2-1)}, \square, y_n, y_n', \square, y_n^{(m_n-1)}) \\ (i = 1, 2, \square, n).$$

Частный случай канонической системы – *система уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной всех искомых функций, т. е. система вида:*

$$(3) \quad \begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases}$$

Система (3) называется **нормальной**.

Если известные функции f_i системы (3) не зависят от свободной переменной x , то она называется **автономной (стационарной)**.

Число уравнений нормальной системы (3) называется ее **порядком**.

В дальнейшем будем рассматривать только нормальные системы, т.к. любую каноническую систему (2) всегда можно заменить эквивалентной ей нормальной системой из $k = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ уравнений.

Для этого достаточно ввести k новых функций

полагая, что $y_{i0}, y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{i m_i - 1} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$

$$y_{i0} = y_i, \quad y_{i1} = y'_i, \quad y_{i2} = y''_i, \quad \dots, \quad y_{i m_i - 1} = y_i^{(m_i - 1)} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Любая система ДУ имеет множество решений.

Для выбора одного решения задают **начальные условия**:

$$y_1(x_0) = y_{10}, \quad y_2(x_0) = y_{20}, \quad \dots, \quad y_n(x_0) = y_{n0}. \quad (4)$$

*Задача нахождения решения системы ДУ, удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется **задачей Коши**.*

ТЕОРЕМА 1 (о существовании и единственности решения задачи Коши).

Пусть в системе (3) функции $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ удовлетворяют двум условиям:

- 1) функции $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ непрерывны как функции $(n + 1)$ -ой переменной $x, y_1, y_2, \dots, y_n$ в некоторой области D $(n + 1)$ -мерного пространства;
- 2) их частные производные по переменным $y_1, y_2, \dots, y_n$ в области D ограничены.

Тогда для любой фиксированной точки $M_0(x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$ области D существует, и притом единственное, решение

$$y_1 = \phi_1(x), \quad y_2 = \phi_2(x), \quad \dots, \quad y_n = \phi_n(x)$$

системы (3), определенное в некоторой окрестности точки x_0 , и удовлетворяющее начальным условиям (4).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Совокупность n функций

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = \phi_1(x, C_1, C_2, ..., C_n) \\ y_2 = \phi_2(x, C_1, C_2, ..., C_n) \\ \\ y_n = \phi_n(x, C_1, C_2, ..., C_n) \end{array} \right\} \quad (5)$$

зависящих от x и n произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$, называется **общим решением системы** (3), если:

- 1) при любых допустимых значениях постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$ она обращает все уравнения системы (3) в тождество, т. е. определяет решение системы;
- 2) для любых допустимых начальных условий найдутся такие значения констант $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots, \tilde{C}_n$, при которых функции совокупности (5) удовлетворяют заданным начальным условиям, т.е.

$$\phi_1(x_0, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots, \tilde{C}_n) = y_{10}, \quad \dots, \quad \phi_n(x_0, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots, \tilde{C}_n) = y_{n0}.$$

Любое решение, которое получается из общего при конкретных постоянных C_i , будем называть **частным**.

§2. Метод исключения

ТЕОРЕМА 1. Любое дифференциальное уравнение n -го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

может быть заменено эквивалентной ему нормальной системой порядка n .

Справедливо также и обратное утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Всякая нормальная система n -го порядка может быть заменена эквивалентным ей дифференциальным уравнением порядка n .

*Интегрирование системы дифференциальных уравнений путем сведения ее к одному уравнению порядка n , называется **методом исключения**.*

Замечание. Уравнение порядка n в теореме 2 было получено в предположении, что $y_2, y_{(n-1)}, \dots, y_n$ можно выразить как функции $x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}$.

Но в ряде случаев это сделать невозможно (например, если первое уравнение имеет вид $y_1' = f(x, y_1)$).

Тогда следует заменить систему уравнением порядка n относительно функции y_i ($i \neq 1$).

Для системы ДУ нельзя получить эквивалентного ей уравнения порядка n только тогда, когда система распадается на отдельные уравнения, т.е. является не системой, а совокупностью уравнений.