



ЛЕКЦИЯ

ТЕМА: «НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ»

## Из студенческого фольклора



- Студента после первой сессии спрашивают:
  - У вас в программе интегралы были?
- Студент, задумываясь, чешет голову, потом отвечает:
  - Да, были какие-то, но... не определенные.

## Давайте вспомним!

- 1) неопределённый интеграл – это **множество первообразных функций**

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

- 2) определённый интеграл – это **число** (например, площадь криволинейной трапеции)

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

- 3) Отрезок интегрирования  **$[a; b]$  КОНЕЧЕН**  
Подынтегральная функция  **$f(x)$  НЕПРЕРЫВНА** на отрезке интегрирования

## **1. Несобственные интегралы I рода**

- *определение*
- *геометрическая интерпретация*
- *вычисление*

## **2. Признаки сходимости несобственных интегралов I рода**

## **3. Несобственные интегралы II рода**

- *определение*
- *геометрическая интерпретация*
- *вычисление*
- *признаки сходимости*

ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К НЕСОБСТВЕННЫМ ИНТЕГРАЛАМ,  
РАССМАТРИВАЛИСЬ В ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Э. ТОРРИЧЕЛЛИ и П. ФЕРМА  
в 1644.



# Точные определения Несобственных интегралов даны О. Коши в 1823.



# НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ I РОДА

**Определение 1:** несобственным интегралом от функции  $f(x)$  в интервале  $[a, +\infty)$

называется предел интеграла  $\int_a^b f(x) dx$  при  $b \rightarrow +\infty$

то есть 
$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

Если указанный предел существует, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, а если не существует, то *расходящимся*

**Определение 2:** несобственным интегралом от функции  $f(x)$  в интервале  $(-\infty; b]$

называется предел интеграла  $\int_a^b f(x) dx$  при  $a \rightarrow -\infty$

то есть 
$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

Если указанный предел существует, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, а если не существует, то *расходящимся*

- Если функция определена и непрерывна на всей числовой прямой, то может существовать **несобственный интеграл данной функции с двумя бесконечными пределами интегрирования**, определяющийся формулой:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$$

- где  $c$  — произвольное число.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x)dx$$

# ЗАМЕЧАНИЕ

▣ *Несобственный интеграл*

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

*называют сходящимся, если существуют оба предела в правой части равенства, и расходящимся, если не существует хотя бы один из них*

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ (или интегралы  
Римана) I рода - это интегралы с  
бесконечными пределами интегрирования

$$I = \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

$$I = \int_{-\infty}^b f(x) dx$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

# ВЫЧИСЛЕНИЕ

## НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(x) \Big|_a^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) - F(a)$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} F(x) \Big|_a^b = F(b) - \lim_{a \rightarrow -\infty} F(a)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{b \rightarrow +\infty \\ a \rightarrow -\infty}} \int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{b \rightarrow +\infty \\ a \rightarrow -\infty}} F(x) \Big|_a^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) - \lim_{a \rightarrow -\infty} F(a)$$

ПРИМЕРЫ.

ИССЛЕДОВАТЬ НА СХОДИМОСТЬ ИНТЕГРАЛЫ:

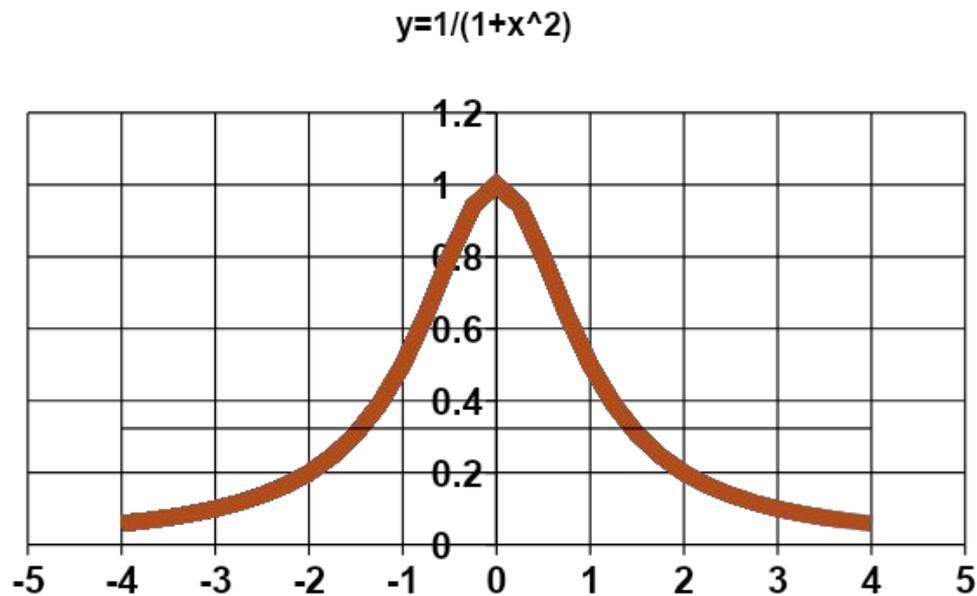
$$\begin{aligned} 1) \quad \int_0^{+\infty} e^{-x} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-e^{-x}) \Big|_0^b = \\ &= -\left( \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^b} - \frac{1}{e^0} \right) = 1 \end{aligned}$$

**Ответ:** несобственный интеграл сходится и равен 1 (или сходится к 1)

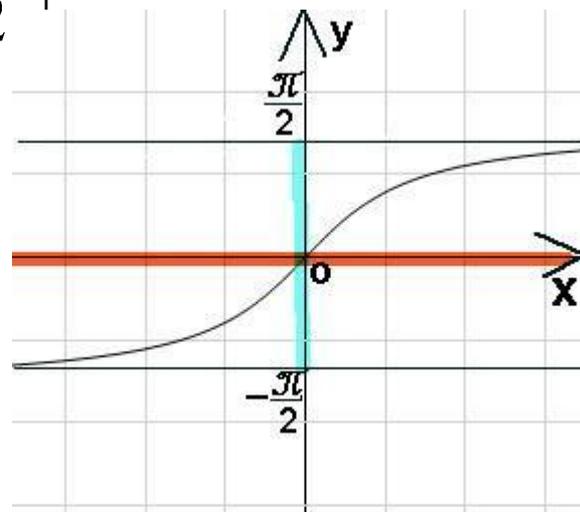
$$2) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln x) \Big|_1^{\infty} = \infty$$

**Ответ:** несобственный интеграл стремится к бесконечности или расходится

3)



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} (\arctg x) \Big|_{-a}^b = \frac{\pi}{2} - \left( -\frac{\pi}{2} \right) = \pi$$



# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ НЕСОБСТВЕННОГО ИНТЕГРАЛА I РОДА

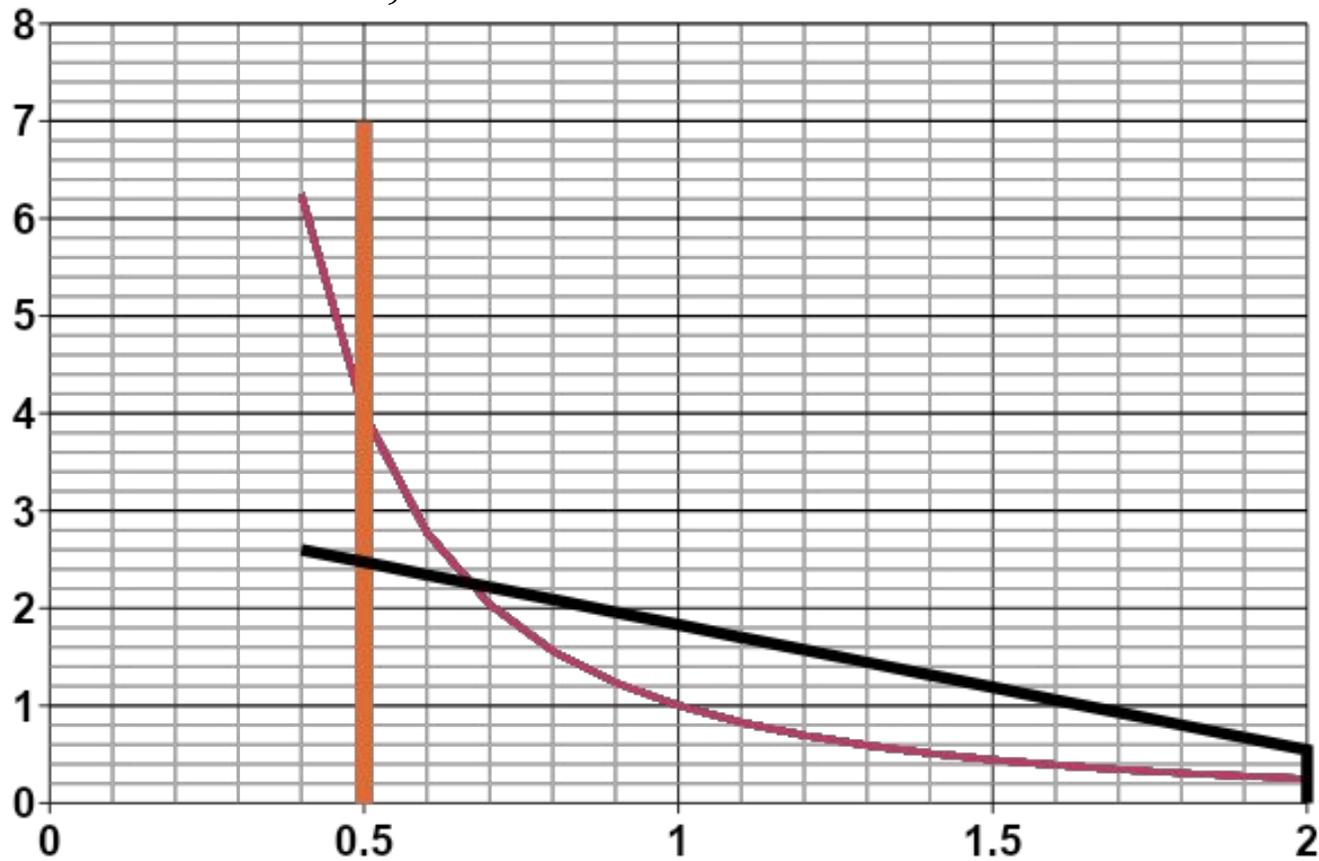
27.11.2014

- Несобственный интеграл выражает площадь БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАПЕЦИИ.

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

НАПРИМЕР,

$$\int_{0,5}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$



Вычислим эту площадь:

□ По определению получаем:

$$\int_{0,5}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{0,5}^b \frac{dx}{x^2}$$

1) вычислим интеграл

$$\int_{0,5}^b \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{0,5}^b = \frac{1}{x} \Big|_b^{0,5} = 2 - \frac{1}{b}$$

2) Вычислим предел

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left( 2 - \frac{1}{b} \right) = 2$$

Ответ: несобственный интеграл

$$\int_{0,5}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 2$$

т.е. сходится.

Площадь бесконечно длинной  
криволинейной трапеции равна 2

# *ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ I РОДА*

- Вопрос о сходимости несобственных интегралов усложняется, если первообразная функция неизвестна.
- В таких случаях иногда удается решить вопрос о сходимости, используя специальные **признаки**, которые не требуют знания первообразной

## Признак сравнения 1.

Пусть подынтегральная функция  
интервала  $[a, +\infty)$  неотрицательна:

во всех точках  
 $f(x) \geq 0$

и для всех значений  
выполняется неравенство:

$x$   
 $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$

Тогда:

1) если сходится интеграл

$\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$  то сходится и

интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

2) если расходится интеграл

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$  то расходится и

интеграл  $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$

## ПРИМЕР

Решить вопрос о сходимости интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

Так как при  $x > 0$   $e^{-x^2} < e^{-x}$  и интеграл

*Решение*

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$$

сходится, то сходится и интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

Подынтегральная функция чётная, поэтому сходится и

интеграл  $\int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx$

Таким образом, заданный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \text{ сходится.}$$

## Замечание

1. Интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$  называется интегралом Пуассона и играет очень большую роль в теории вероятностей.

2. Сформулированный признак сравнения относится только к функциям, сохраняющим один и тот же знак в бесконечном интервале интегрирования

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ОТ  
ФУНКЦИЙ, НЕ СОХРАНЯЮЩИХ  
ПОСТОЯННЫЙ ЗНАК, НАПРИМЕР ТАКИХ,  
КАК

$$\frac{\sin x}{x}, \frac{\cos x}{1+x^2}$$

## Признак сравнения 2.

Если сходится интеграл

$$\int_a^{-\infty} |f(x)| dx$$

интеграл от

абсолютной величины функции

$$f(x)$$

то сходится и интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

При этом интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

называется *абсолютно*

*сходящимся*

## ЗАМЕЧАНИЕ

1) Если сходится интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ , то абсолютно

сходятся и интегралы  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos x dx$  и  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin x dx$

так как модули подынтегральных функций не превосходят  $|f(x)|$

2) Если интеграл от  $|f(x)|$  расходится, то об интеграле от  $f(x)$  на этом основании ещё ничего нельзя сказать: он может расходиться, а может и сходиться.

В последнем случае говорят, что  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$   
*сходится условно*

## ПРИМЕР

□ Интеграл Дирихле  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  **сходится**, а

интеграл  $\int_0^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$  (от модуля подынтегральной

функции) **расходится**.

Следовательно, интеграл Дирихле **сходится условно**.

Его величина вычислена специальными приёмами  
равна:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

РАЗЛИЧИЕ УСЛОВНО И АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИХСЯ  
НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ УСТАНОВЛЕНО  
Дж. Стоксом и П. Г. Л. Дирихле  
в 1854 г.



## НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ II РОДА

Пусть функция  $f(x)$  имеет разрыв в точке  $x = b$

Определение 1: несобственным интегралом от функции  $f(x)$  непрерывной в интервале  $[a; b)$  и неограниченной при  $x \rightarrow b$

называется предел интеграла  $\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$   $\varepsilon \rightarrow 0$   
Записывают это так:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx, \varepsilon > 0$$

Если указанный предел существует, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, а если не существует, то *расходящимся*

Пусть функция  $f(x)$  имеет разрыв в точке

$x = a$

Определение 2: несобственным интегралом от функции  $f(x)$  непрерывной в интервале  $(a; b]$  и неограниченной при  $x \rightarrow a$

называется предел интеграла

$$\int_{a+\delta}^b f(x) dx$$

$\delta \rightarrow 0$

Записывают это так:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{a+\delta}^b f(x) dx, \delta > 0$$

Если указанный предел существует, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, а если не существует, то *расходящимся*

## Замечание

- Если первообразная функция  $F(x)$  известна, то в обоих случаях можно записать, что

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Где  $F(b) = \lim_{x \rightarrow b} F(x)$  (или  $F(a) = \lim_{x \rightarrow a} F(x)$ ) - предел, к которому стремится первообразная  $F(x)$  (или  $b$ ) при  $x \rightarrow a$

Если этот предел не существует, то интеграл расходится

## Точка разрыва функции находится внутри отрезка интегрирования

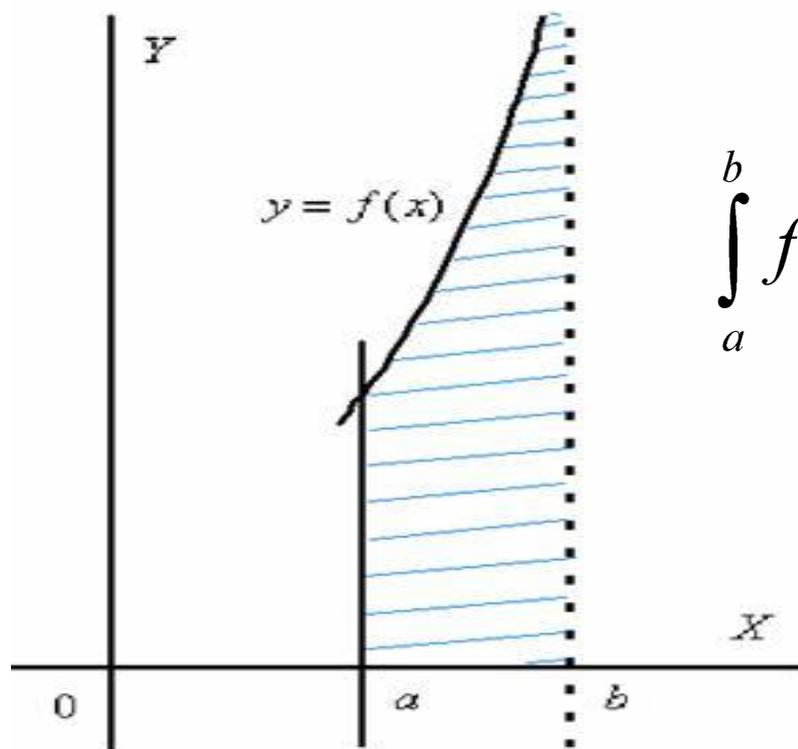
- **Определение 3.** Несобственным интегралом от функции , имеющей разрыв во внутренней точке отрезка интегрирования  $[a; b]$  , называется интеграл

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{c+\delta}^b f(x) dx$$

# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ II РОДА

Несобственный интеграл, если он существует, выражает площадь бесконечно высокой криволинейной трапеции

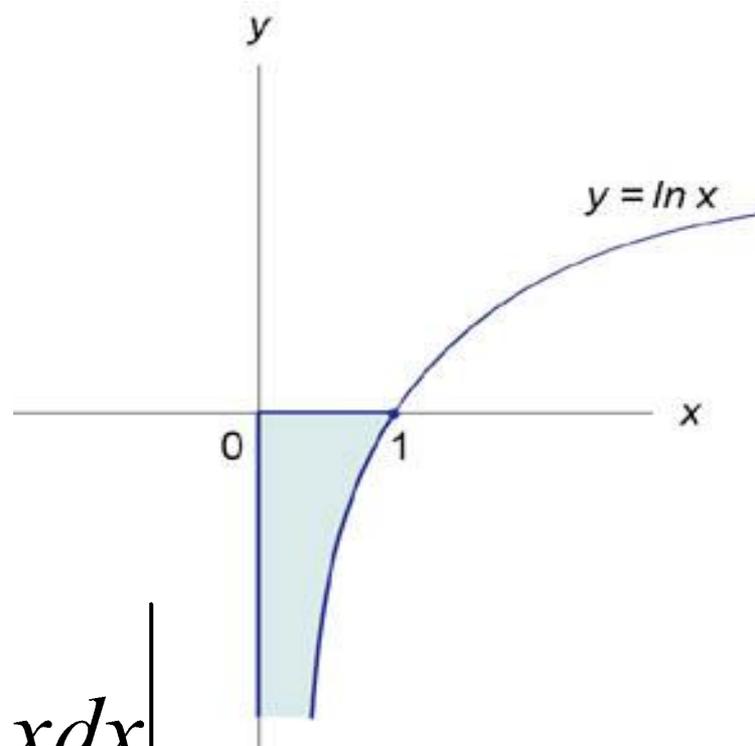


$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx, \varepsilon > 0$$

## ПРИМЕР

Найти площадь под кривой  $y = \ln x$  в интервале от  $x = 0$  до  $x = 1$

$$S = \left| \int_0^1 \ln x dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \ln x dx \right|$$



## РЕШЕНИЕ

$$\int_a^1 \ln x dx = [x \ln x - x]_a^1 = F(1) - F(a),$$

$$\text{где } F(1) = (1 \cdot \ln 1 - 1) = -1,$$

$$F(a) = \lim_{a \rightarrow 0} (a \ln a - a) = \lim_{a \rightarrow 0} (a \ln a) = [0 \cdot \infty]$$

- Преобразуем неопределённость вида  $[0 \cdot \infty]$

$$\lim_{a \rightarrow 0} (a \ln a) = [0 \cdot \infty] = \lim_{a \rightarrow 0} \left( \frac{\ln a}{\frac{1}{a}} \right) = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$$

- Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left( \frac{\ln a}{\frac{1}{a}} \right) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{(\ln a)'}{\left(\frac{1}{a}\right)'} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{a}}{-\frac{1}{a^2}} = \lim_{a \rightarrow 0} (-a) = 0$$

- Ответ: искомая площадь равна  $S = |-1| = 1$  (ед.пл.)

## ЗАМЕЧАНИЕ

- **Признаки сходимости интегралов от функций с бесконечными разрывами подобны признакам сходимости несобственных интегралов I рода**

## ДОПОЛНЕНИЕ

1. На несобственные интегралы без всяких изменений переносятся простейшие свойства определённых интегралов
2. Основные приемы вычисления **несобственных интегралов:**
  - дифференцирование и интегрирование по параметру,
  - разложение в ряды,
  - применение теории вычетов.

### 3. ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

**Несобственные интегралы** имеют большое значение во многих областях математического анализа и его приложений.

- В теории специальных функций (цилиндрических функций, ортогональных многочленов и др.) одним из основных способов изучения является изображение функций в виде **несобственных интегралов**, зависящих от параметра, например, гамма-функция



- К **несобственным интегралам** относится и интеграл Фурье, а также интегралы, встречающиеся в др. интегральных преобразованиях.
- Решения краевых задач математической физики записываются кратными **несобственными интегралами** с неограниченной подынтегральной функцией.
- В теории вероятностей большое значение имеет **несобственный интеграл Пуассона**
- В теории дифракции света используется **несобственный интеграл**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} dx = \pi$$

$$\int_0^{+\infty} \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

# Повторим ?

## Классификация интегралов

(дополнение)



- *ОПРЕДЕЛЕННЫЕ* — интегралы, к которым есть ответ, и *НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ* — к которым ответа нет.
- *СОБСТВЕННЫЕ* — интегралы, которые сам взял, и *НЕСОБСТВЕННЫЕ* — которые списал.
- *СХОДЯЩИЕСЯ* — интегралы, которые сходятся с ответом, и *РАСХОДЯЩИЕСЯ* — которые не сходятся.