

21.9. ДУ ВВИСШИХ ПОРЯДКОВ

ДУ n -го порядка имеет вид:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$



Если такое уравнение разрешимо относительно старшей производной, то оно имеет вид:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Решением такого уравнения будет функция $y(x)$, которая обращает его в тождество.





Для удобства вместо одного ДУ n – го порядка рассматривают систему из n ДУ первого порядка.

$$\frac{dy}{dx} = y_1; \quad \frac{dy_1}{dx} = y_2; \dots; \frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1}$$

Поэтому

$$y^{(n)} = \frac{dy_{n-1}}{dx}$$


Тогда можно записать:

$$\frac{dy_{n-1}}{dx} = f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})$$

Это система n ДУ с n неизвестными функциями

$$y, y_1, \dots, y_{n-1}$$

Система, в которой слева стоят производные от искомых функций, а справа – функции от независимой переменной и искомой функции, называется системой n ДУ первого порядка нормальной формы.

Обобщим эту систему:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y, y_1, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y, y_1, \dots, y_n) \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

Теорема Коши

*Пусть для системы (1) выполняются
следующие условия:*

1

*Функции f_i непрерывны по всем аргументам
в области D .*

2

Частные производные

$$\frac{df_i}{dy_k}$$

непрерывны в области D.

Тогда существует одна и только одна система решений уравнений (1):

$$y_1 = y_1(x), \quad y_2 = y_2(x), \quad \dots \quad y_n = y_n(x)$$

определенная в некоторой окрестности точки x_0 и удовлетворяющая при $x=x_0$ заданным условиям:

$$y_1^0 = y_1(x_0), \quad y_2^0 = y_2(x_0), \quad \dots \quad y_n^0 = y_n(x_0)$$



Теорема Коши утверждает существование частного решения системы (1).

Геометрически это означает, что существует единственная интегральная кривая, проходящая через точку

$$(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0)$$



ТЕОРЕМА

*существования и единственности
решения ДУ n-го порядка*

Уравнение

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

*правая часть которого непрерывна по всем
аргументам и дифференцируема по ним в
некоторой замкнутой области D, имеет
единственное решение, удовлетворяющее
начальным условиям при $x=x_0$:*

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad y' = y'_0, \quad \dots \quad y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$$

где

$$x_0, \quad y_0, \quad y'_0, \quad \dots, \quad y_0^{(n-1)}$$

- заданные числа.



Эта теорема определяет частное решение ДУ n -го порядка.

Общее решение этого уравнения будет содержать n произвольных постоянных:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

