

Решение задач физического содержания на ЕГЭ по математике

**Презентацию разработали:
Юшманова О.М. – учитель
математики
Бурлова О.Н. – учитель физики**

Решение предложенных задач можно условно разделить на несколько шагов:

- Анализ условия и вычленение формулы, описывающей заданную ситуацию, а также значений параметров констант и начальных условий
- Математическая интерпретация задачи – сведение её к уравнению или неравенству и их решение
- Анализ полученного решения

С точки зрения физики все предложенные задачи можно условно разделить на 4 группы

- задачи с известными в физике формулами
- задачи с формулами, которые в физике можно вывести
- задачи с использованием уравнения зависимости одной физической величины от другой
- задачи с применением физических формул, которые не изучаются в школе

Задачи с известными в физике формулами

Задача на расчет
механической работы

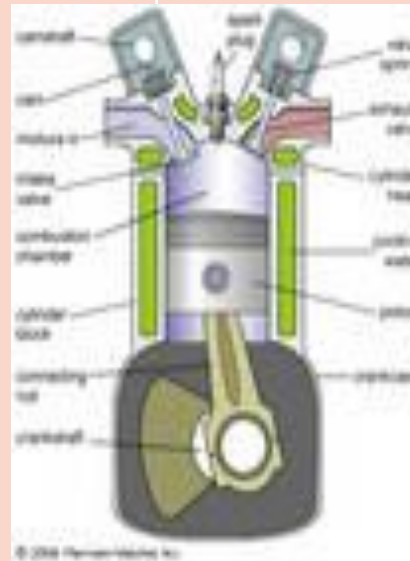
формула



Задачи с известными в физике формулами

Задача на нахождение КПД

Формула в физике



Задачи, формулы которых в физике можно вывести

Задача на нахождение мощности

формула

Трактор тащит сани с силой $F = 32$ кН, направленной под острым углом B к горизонту.

Мощность (в киловаттах) трактора при скорости

$v = 5$ м/с равна $N = Fv \cos B$

При каком максимальном угле B (в градусах) эта мощность будет не менее 80 кВт?

$$A = FS \cos a$$

$$S = vt$$

$$A = Fvt \cos a$$

$$N = \frac{A}{t}$$

$$N = \frac{Fvt \cos \alpha}{t}$$

$$N = Fv \cos \alpha$$

Задачи, формулы которых можно вывести

Предложенная задача

В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет 60 Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите (в Омах) наименьшее возможное сопротивление этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление даётся формулой

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

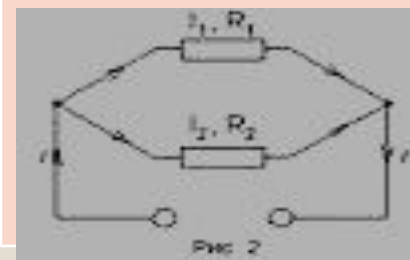
А для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 10 Ом.

Вывод формулы

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$



Задачи с использованием уравнения зависимости

Задача на движение под действием силы тяжести

Высота над Землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону

$$h(t) = 1,2 + 10t + 5t^2$$

Сколько секунд мяч будет находиться на высоте более трёх метров?

Уравнение движения

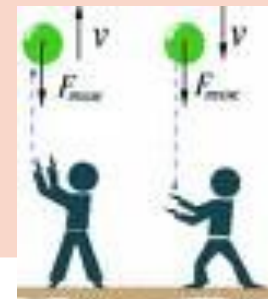
$$h = h_0 + v_0 t + \frac{g t^2}{2},$$

где $g = 10 \text{ м/с}^2$

$$v_0 = 10 \text{ м/с}$$

$$h_0 = 1,2 \text{ м}$$

$$h(t) = 1,2 + 10t + 5t^2$$



Задачи, формулы которых в школе на изучаются

Предложенная задача

Задача астрономического содержания

Предложенная задача

С точки зрения математики все задачи сводятся к решению уравнения или неравенства

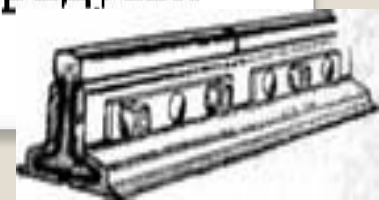
- Линейного
- Квадратного
- Степенного
- Рационального или иррационального
- Показательного
- Логарифмического
- Тригонометрического

Задача №1 на решение линейного уравнения

1. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону

$$l(t^{\circ}) = l_0(1 + \alpha \cdot t^{\circ}),$$

где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (^{\circ}\text{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.



Физическое обоснование

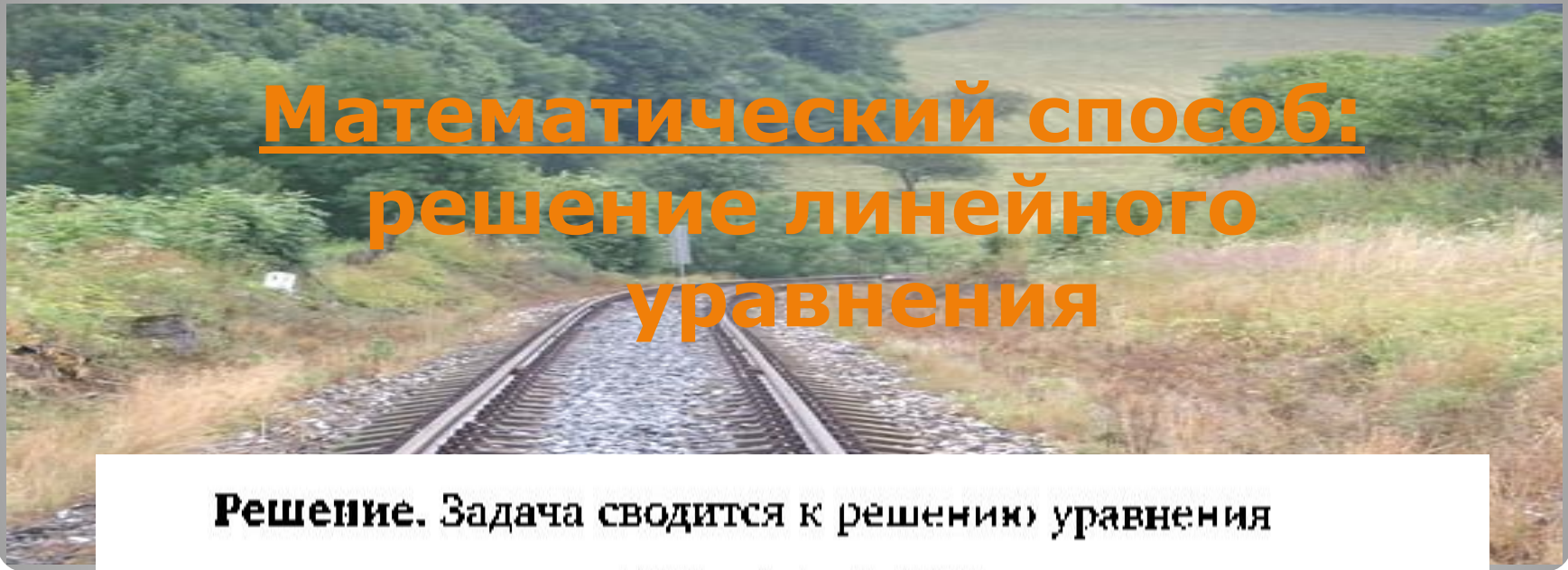
Зазор - это то расстояние, которое оставляют между рельсами, для того, чтобы они могли расширяться при нагревании. А нагревание происходит вследствие трения, возникающего при прохождении поезда по рельсам



l_0 - начальная длина рельса

l - конечная длина рельса

$l - l_0$ - изменение длины



Математический способ: решение линейного уравнения

Решение. Задача сводится к решению уравнения

$$l(t^{\circ}) - l_0 = 3 \text{ (мм)}$$

при заданных значениях длины $l_0 = 10 \text{ м}$ и коэффициента температурного расширения $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ (}^{\circ}\text{C)}^{-1}$:

$$\begin{aligned} l(t^{\circ}) - l_0 = 3 \cdot 10^{-3} &\Leftrightarrow l_0(1 + \alpha \cdot t^{\circ}) - l_0 = 3 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow l_0 \alpha t^{\circ} = 3 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow 10 \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} t^{\circ} = 3 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t^{\circ} = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{1,2 \cdot 10^{-4}} \Leftrightarrow t^{\circ} = 25 \text{ }^{\circ}\text{C}. \end{aligned}$$

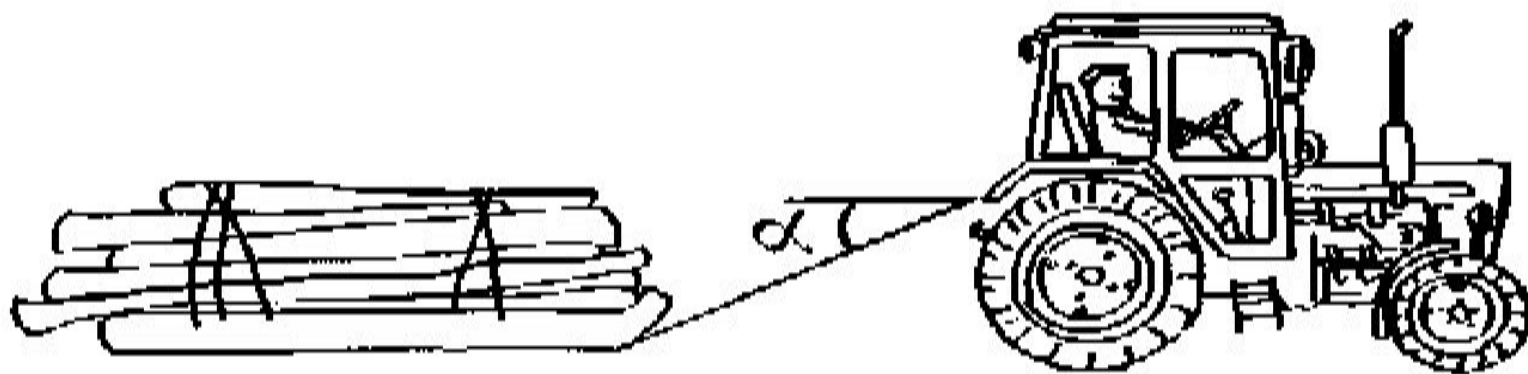
Ответ: 25.

Задача № 2 на решение тригонометрического неравенства

9а. Трактор тащит сани с силой $F = 80$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Работа трактора, выраженная в килоджоулях, на участке длиной $S = 50$ м равна

$$A = FS \cos \alpha.$$

При каком максимальном угле α (в градусах) совершённая работа будет не менее 2000 кДж?



Физическое обоснование

- Тело совершает работу тогда, когда под действием силы оно движется.

Формула для расчёта работы: $A = FS \cos \alpha$

По условию задачи:

$$F = 80 \text{ кН} = 80000 \text{ Н}, \quad S = 50 \text{ м}, \quad A = 2000 \text{ кН} = 2000000 \text{ Дж}$$

$$2000000 \text{ Дж} = 80000 \text{ Н} \cdot 50 \text{ м} \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{2000000 \text{ Дж}}{80000 \text{ Н} \cdot 50 \text{ м}} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

Анализ условия: $A \geq 2000 \text{ кДж}$, если $0 < \alpha \leq 60^\circ$, значит максимальный угол будет 60°

Математический способ: решение тригонометрического неравенства

Решение. Задача сводится к решению неравенства

$$A \geq 2000$$

на интервале $(0^\circ; 90^\circ)$ при заданных значениях силы $F = 80$ кН и длины пути $S = 50$ м:

$$A \geq 2000 \Leftrightarrow 80 \cdot 50 \cdot \cos \alpha \geq 2000 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha \geq \frac{1}{2} \quad \begin{matrix} 0^\circ < \alpha < 90^\circ \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \quad 0^\circ < \alpha \leq 60^\circ.$$

Ответ: 60° .

Задача № 3 на решение степенного неравенства

На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выраженная в Ньютонах, будет определяться по формуле:

$$F_A = \rho g l^3$$

где $\rho = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ — плотность воды,

l — длина ребра куба (в метрах), а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$). Какой может быть максимальная длина ребра куба, чтобы обеспечить эксплуатацию аппарата в условиях, когда выталкивающая сила при погружении не будет превосходить 78400Н? Ответ выразите в метрах.

Физическое обоснование задачи

- На погруженное в жидкость тело действует сила Архимеда, которая вычисляется по формуле:

$F_A = \rho_{\text{ж}} V_T g$. Так как конструкция имеет кубическую форму с длиной ребра l , то

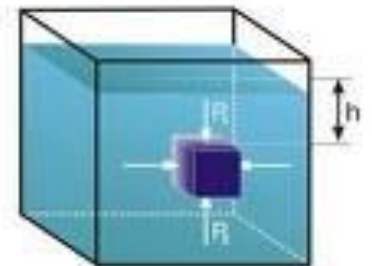
$V_T = l^3$. По условию задачи: $F_A = 78400 \text{ Н}$, $g = 9,8 \frac{\text{Н}}{\text{кг}}$
 $\rho = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

$$78400 = 1000 \cdot 9,8 \cdot l^3, \quad l^3 = \frac{78400}{1000 \cdot 9,8} = 8, \quad l = 2$$

Анализ условия задачи:

$$F_A \leq 78400 \text{ Н} \quad \text{при} \quad l \leq 2 \text{ м}$$

Ответ: 2 м



Математический способ: решение степенного неравенства

Решение. Задача сводится к решению неравенства

$$F_A \leq 78400$$

при заданных значениях плотности воды и ускорении свободного падения:

$$F_A \leq 78400 \Leftrightarrow 1000 \cdot 9,8 \cdot l^3 \leq 78400 \Leftrightarrow l^3 \leq 8 \Leftrightarrow l \leq 2 \text{ (м)}.$$

Ответ: 2.

Задача № 4 на решение квадратного неравенства

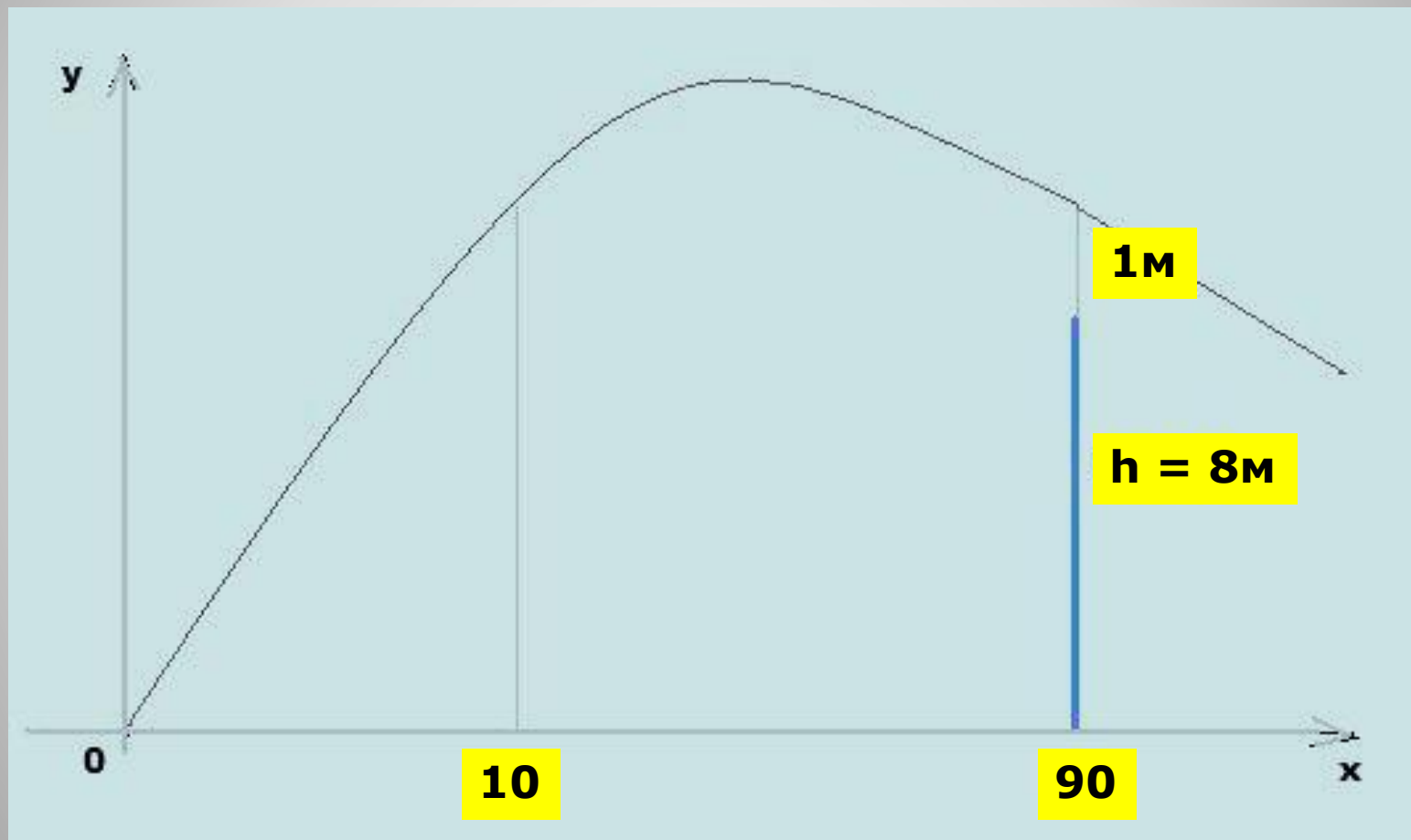


2. Камнемётательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту с фиксированной начальной скоростью. Траектория полёта камня в системе координат, связанной с машиной, описывается формулой

$$y = ax^2 + bx,$$

где $a = -\frac{1}{100} \text{ м}^{-1}$, $b = 1$ — постоянные параметры, x (м) — смещение камня по горизонтали, y (м) — высота камня над землёй. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 8 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

Физическое обоснование



Математический способ: решение квадратного неравенства



Решение. Задача сводится к решению неравенства $y \geq 9$:
при заданных значениях параметров a и b

$$\begin{aligned} y \geq 9 &\Leftrightarrow -\frac{1}{100}x^2 + x \geq 9 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 100x + 900 \leq 0 \Leftrightarrow 10 \leq x \leq 90 \text{ м.} \end{aligned}$$

Камни будут перелетать крепостную стену на высоте не менее 1 метра, если камнеметательная машина будет находиться на расстоянии от 10 до 90 метров от этой стены. Наибольшее расстояние — 90 метров.

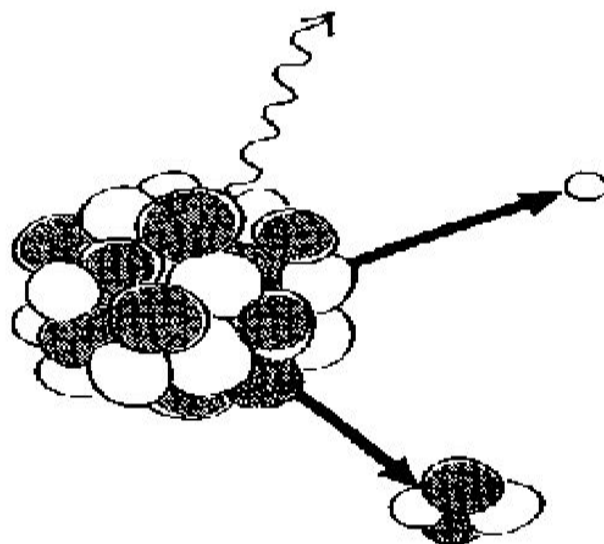
Ответ: 90.

Задача № 5 на решение показательного неравенства

6. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону

$$m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T},$$

где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начала распада, T — период полураспада в минутах. В лаборатории получили вещество, содержащее $m_0 = 40$ мг изотопа азота-13, период полураспада которого $T = 10$ мин. В течение скольких минут масса изотопа азота-13 будет не меньше 10 мг?



Физическое обоснование задачи

Период полураспада – это время (T), за которое распадается половина ядер радиоактивного вещества. Если период $T = 10$ мин, а $m = 40$ мг, то через 10 минут половина вещества распадётся (20 мг) и изотопа останется 20 мг.



Время, за которое распадается половина из начального числа радиоактивных атомов называют периодом полураспада.

Через 20 минут останется 10 мг.

Через 30 минут – 5 мг и т.д.

Решение задачи с помощью показательного уравнения

- $$m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$$

где $m_0 = 40\text{мг}$, $T = 10\text{ мин}$, $m = 10\text{ мг}$

Составим уравнение: $10 = 40 \cdot 2^{-\frac{t}{10}}$

Решение : $\frac{10}{40} = 2^{-\frac{t}{10}} \quad 4 = 2^{\frac{t}{10}} \quad 2^2 = 2^{\frac{t}{10}}$

$$2 = \frac{t}{10} \quad \underline{t = 20\text{мин}}$$

Анализ условия задачи: так как $m \geq 10$, то
 $t \leq 20\text{мин}$

Математический способ: решение показательного неравенства

Решение. Задача сводится к решению неравенства

$$m(t) > 10$$

при заданных значениях параметров $m_0 = 40$ мг и $T = 10$ мин:

$$40 \cdot 2^{-t/10} > 10 \Leftrightarrow 2^{-t/10} > 2^{-2} \Leftrightarrow -\frac{t}{10} > -2 \Leftrightarrow t < 20 \text{ мин.}$$

Ответ: 20.

Задача № 6 на решение квадратного уравнения или неравенства

Высота над Землёй брошенного
вверх мяча меняется по закону
 $h(t) = 1,6 + 8t - 5t^2$, где h — высота в
метрах, t — время в секундах, прошедшее с
момента броска. Сколько времени мяч будет
находиться на высоте не менее 3-х метров?



1 способ: на решение квадратного уравнения

● Определим моменты времени, когда мяч находился на высоте 3м.

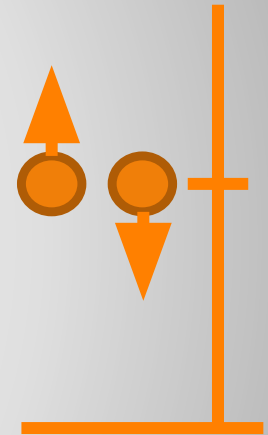
Так как $h(t) = 3\text{м}$, то можно составить уравнение **$3 = 1,6 + 8t - 5t^2$**

Решая данное уравнение, получаем два корня: $t_1 = 0,2$ и $t_2 = 1,4$

Анализ полученного результата:

Так как мяч был брошен вверх, то на высоте 3м он побывал 2 раза: через 0,2с и через 1,4с, то есть на высоте более 3м мяч был 1,2с.

Ответ: $t = 1,2\text{с}$



2 способ: решение квадратного неравенства

По условию высота $h(t) \geq 3$,
т.е. $1,6 + 8t - 5t^2 \geq 3$.

$$-5t^2 + 8t + 1,6 - 3 \geq 0; \quad 5t^2 - 8t + 1,4 \leq 0.$$

Неравенство можно решить методом интервалов:
так как $t_1 = 0,2$; $t_2 = 1,4$, то $0,2 \leq t \leq 1,4$

Решением будет промежуток между корнями: $[0,2; 1,4]$.
Значит, начиная со времени t_1 и до времени t_2 , мяч будет находиться на высоте не менее трех метров. Величина этого временного промежутка будет: $1,4 - 0,2 = 1,2$.



Ответ: 1,2.

Задача № 7 на решение квадратного уравнения



После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время падения t небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле

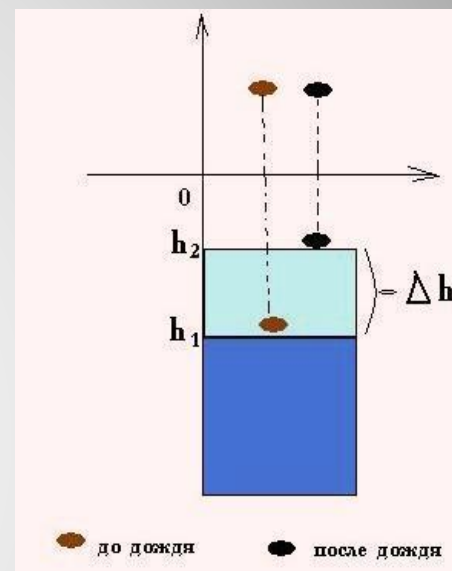
$$h = -5t^2$$

где h – расстояние (в метрах), t – время падения (в секундах), прошедшее с момента броска. До дождя время падения камешков составляло 0,6 с. На сколько должен подняться уровень воды в колодце после дождя, чтобы время падения камешков изменилось на 0,2с. Ответ выразите в метрах.

Физическое обоснование

Пусть h_1 - уровень воды до дождя,
 h_2 - уровень воды после дождя,
 t_1 - время падения камешка до
поверхности до дождя, t_2 - время
падения после дождя.

За нулевую отметку принимаем точку,
лежащую на поверхности земли, тогда h_1 и h_2 –
координаты уровней воды и они отрицательны,
что можно видеть из формулы $h = -5t^2$. После
дождя уровень воды повысился на $h = h_1 - h_2$
метра.



Математический способ: решение уравнения

Задача сводится к решению уравнения

$$h = -5t^2$$

По условию задачи $t_1=0,6\text{с}$, а $t_2=0,4\text{с}$.

$$\begin{aligned} h &= |h_1 - h_2| = |-5 \cdot t_1^2 - (-5 \cdot t_2^2)| = \\ &= |-5 \cdot 0,6^2 + 5 \cdot 0,4^2| = 5|0,6^2 - 0,4^2| = 5 \cdot 0,2 = \\ &1(\text{метр}). \end{aligned}$$

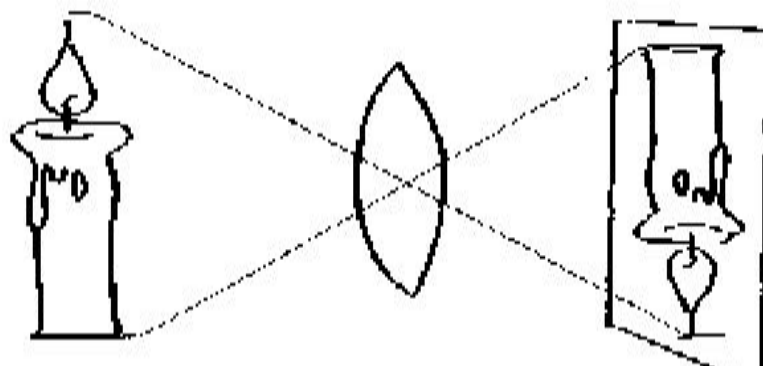
То есть после дождя уровень повысится на 1 метр.

Задача № 8 на решение **квадратного уравнения или** **неравенства**

4а. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 30$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 30 до 50 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 150 до 180 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}.$$

Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.



Физическое обоснование задачи

лампа

линза

F

F

f

f

d

f

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$$

– известная в физике формула

тонкой линзы

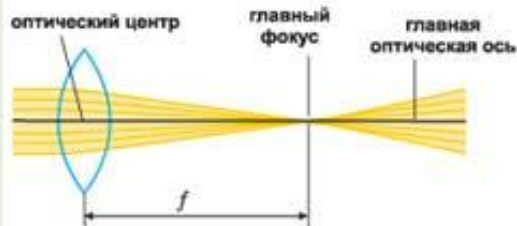
$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$$

– данная в задаче формула

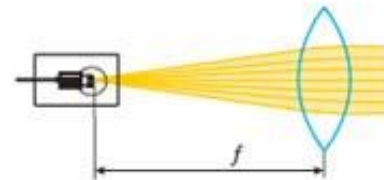
экран

Физическое обоснование задачи

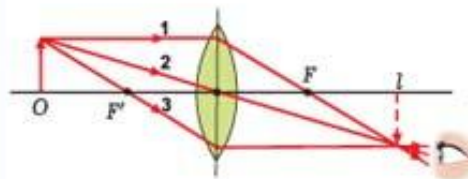
СОБИРАЮЩИЕ ЛИНЗЫ



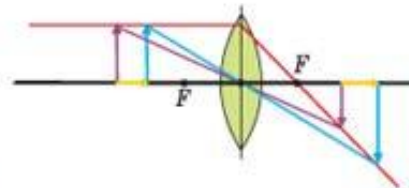
Основные точки и линии линзы



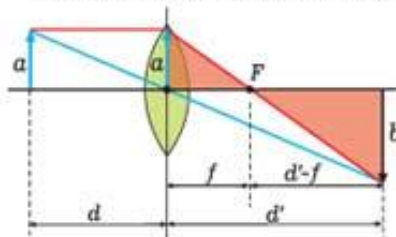
Обратимость хода лучей в линзе



Построение изображения точки



Изменение размеров изображения при изменении расстояния от предмета до линзы



К выводу формулы линзы

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{d'} \quad \frac{a}{b} = \frac{f}{d' - f}$$
$$d'f = dd' - df \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{d} + \frac{1}{d'}$$

Вывод формулы линзы

Задача № 8 на решение уравнения

Решение. Поскольку $f = 30$, имеем:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{30} \Leftrightarrow \frac{1}{d_1} = \frac{1}{30} - \frac{1}{d_2}.$$

Наименьшему возможному значению d_1 соответствует наибольшее значение левой части полученного равенства, и, соответственно, наибольшее возможное значение правой части равенства. Разность $\frac{1}{30} - \frac{1}{d_2}$ в правой части равенства достигает наибольшего значения при наименьшем значении вычитаемого $\frac{1}{d_2}$, которое достигается при наибольшем возможном значении знаменателя d_2 . Поэтому $d_2 = 180$, откуда

$$\frac{1}{d_1} = \frac{1}{30} - \frac{1}{180} \Leftrightarrow \frac{1}{d_1} = \frac{5}{180} \Leftrightarrow \frac{1}{d_1} = \frac{1}{36} \Leftrightarrow d_1 = 36 \text{ см.}$$

По условию лампочка должна находиться на расстоянии от 30 до 50 см от линзы. Найденное значение $d_1 = 36$ см удовлетворяет условию.

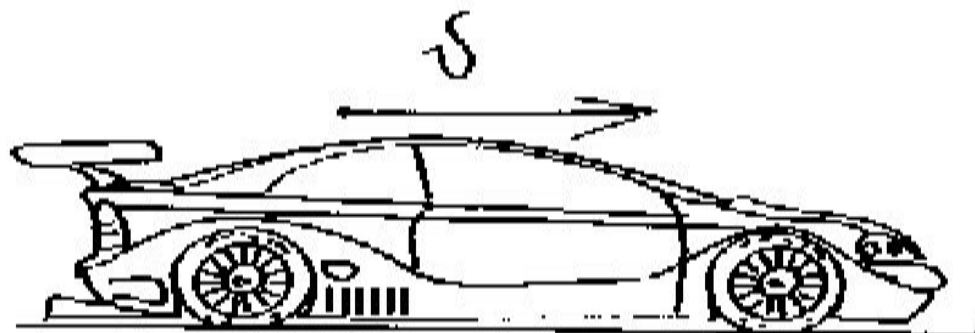
Ответ: 36.

Задача № 9 на решение иррационального неравенства

5. Скорость автомобиля, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной l (в километрах) с постоянным ускорением a (в км/ч²), вычисляется по формуле

$$v = \sqrt{2la}.$$

Определите наименьшее ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав один километр, приобрести скорость не менее 100 км/ч. Ответ выразите в км/ч².



Физическое обоснование задачи

- По условию задачи автомобиль движется равноускоренно без начальной скорости, поэтому можно воспользоваться

известной в физике формулой $s = \frac{v^2}{2a}$

Выразим скорость $v^2 = 2aS$

$$v = \sqrt{2aS} = \sqrt{2al}, \text{ где } l = S$$

$$a = \frac{v^2}{2l} = \frac{100^2}{2} = 5000 - \text{это и есть}$$

наименьшее ускорение

Решение иррационального неравенства

Решение. Найдём, при каком ускорении автомобиль достигнет требуемой скорости, проехав один километр. Задача сводится к решению уравнения $\sqrt{2la} = 100$ при известном значении длины пути $l = 1$ км:

$$\sqrt{2la} = 100 \Leftrightarrow \sqrt{2a} = 100 \Leftrightarrow 2a = 10\,000 \Leftrightarrow a \geq 5000 \text{ км/ч}^2.$$

Если его ускорение будет превосходить найденное, то, проехав один километр, автомобиль наберёт большую скорость, поэтому наименьшее необходимое ускорение равно 5000 км/ч^2 .

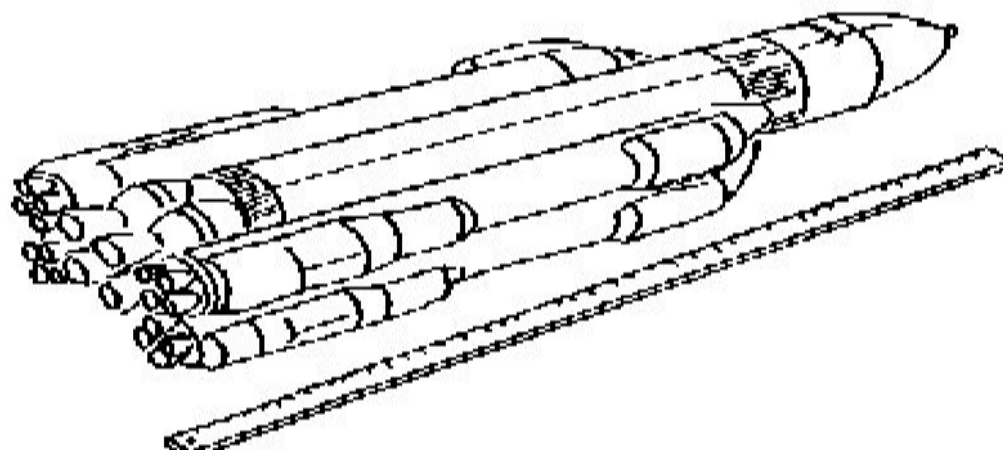
Ответ: 5000.

Задача № 10 на решение иррационального уравнения

5а. При движении ракеты её видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

где $l_0 = 10$ м — длина покоящейся ракеты, $c = 3 \cdot 10^5$ км/с — скорость света, а v — скорость ракеты (в км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы её наблюдаемая длина стала не более 8 м? Ответ выразите в км/с.



Физическое обоснование задачи

- При движении со скоростями v , близкими к скорости света c , происходит сокращение размеров тел. В задаче дана формула из физики, которая изучается в теме: «Основы теории относительности»

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Физические величины:
 c , l и l_0 известны.

Решение иррационального уравнения

Решение. Найдем, при какой скорости длина ракеты станет равна 8 м. Задача сводится к решению уравнения

$$l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 8$$

при заданном значении длины покоящейся ракеты $l_0 = 10$ м и известной величине скорости света $c = 3 \cdot 10^5$ км/с:

$$\begin{aligned} 10 \sqrt{1 - \frac{v^2}{9 \cdot 10^{10}}} = 8 &\Leftrightarrow \frac{v^2}{9 \cdot 10^{10}} = \frac{36}{100} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow v = \frac{6}{10} \cdot 3 \cdot 10 \cdot 10^5 \Leftrightarrow v = 180\,000 \text{ км/с.} \end{aligned}$$

Если скорость будет превосходить найденную, то длина ракеты будет менее 8 метров, поэтому минимальная необходимая скорость равна 180 000 км/с.

Ответ: 180 000.

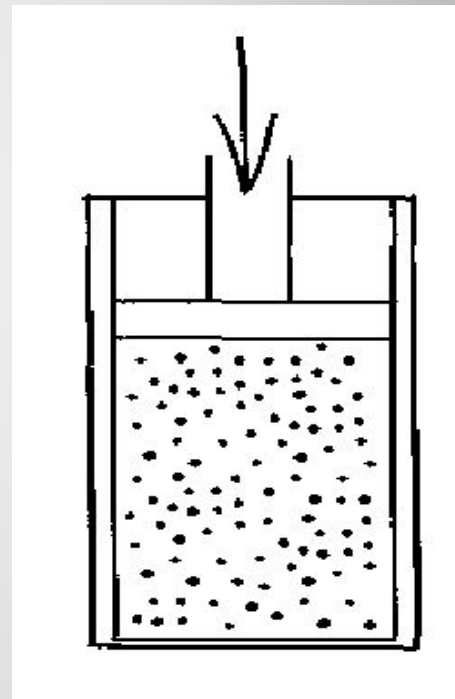
Задача № 10 на решение показательного неравенства

ба. При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон

$$pV^k = \text{const},$$

где p (Па) — давление в газе, V — объём газа в кубических метрах. В ходе эксперимента с одноатомным идеальным газом (для него $k = \frac{5}{3}$) из начального состояния, в котором $\text{const} = 10^5 \text{ Па} \cdot \text{м}^5$, газ начинают сжимать. Какой наибольший объём V может занимать газ при давлениях p не меньше $3,2 \cdot 10^6 \text{ Па}$? Ответ выразите в кубических метрах.

Физическое обоснование задачи



Решение показательного неравенства

Решение. Задача сводится к решению неравенства

$$p(V) \geq 3,2 \cdot 10^6$$

при заданных значениях параметров $k = \frac{5}{3}$ и $\text{const} = 10^5 \text{ Па} \cdot \text{м}^5$:

$$10^5 \cdot V^{5/3} \geq 3,2 \cdot 10^6 \Leftrightarrow V^{5/3} \leq \frac{1}{32} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{32}\right)^{3/5} \Leftrightarrow V \leq \frac{1}{8} \text{ м}^3.$$

Ответ: 0,125.

Задача № 11 на решение логарифмического уравнения

7. Для обогрева помещения, температура в котором $T_n = 20^\circ\text{C}$, через радиатор пропускают горячую воду температурой $T_b = 60^\circ\text{C}$. Через радиатор проходит $m = 0,3$ кг/с воды. Проходя по радиатору расстояние $x = 84$ м, вода охлаждается до температуры $T(^\circ\text{C})$, причём

$$x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_b - T_n}{T - T_n},$$

где $c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 21 \frac{\text{Вт}}{^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 0,7$ — постоянная. До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода?

Физическое обоснование задачи

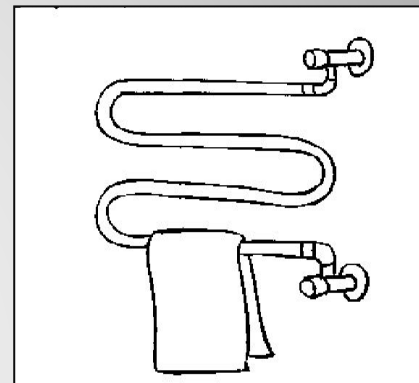
На первый взгляд формула

$$x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_B - T_{\Pi}}{\textcolor{red}{T} - T_{\Pi}}$$
 очень сложная и

учащимся незнакома, так как в школьном курсе физики она не изучается, но если внимательно прочесть условие задачи, то видно, что в этой задаче все физические величины заданы, кроме температуры **T**

$$T_{\Pi} = 20^{\circ}\text{C}, \quad T_B = 60^{\circ}\text{C}, \quad m = 0,3\text{кг}, \quad x = 84\text{м}$$

$$c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}^{\circ}\text{C}}, \quad \gamma = 21 \frac{\text{Вт}}{^{\circ}\text{C}}, \quad \alpha = 0,7$$



решение логарифмического уравнения

Решение. Задача сводится к решению уравнения $x = 84$ при заданных значениях теплоёмкости, коэффициента теплообмена и постоянной α :

$$x = 84 \Leftrightarrow \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_b - T_n}{T - T_n} = 84 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,7 \cdot \frac{4200 \cdot 0,3}{21} \cdot \log_2 \frac{60 - 20}{T - 20} = 84 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{40}{T - 20} = 2 \Leftrightarrow \frac{40}{T - 20} = 4 \Leftrightarrow T - 20 = 10 \Leftrightarrow T = 30^\circ\text{C}.$$

Ответ: 30.

Задача № 12 на решение логарифмического неравенства

7а. Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий $\nu = 4$ моля воздуха при давлении $p_1 = 1,2$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха. Работа (в джоулях), совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением

$$A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1},$$

где $\alpha = 5,75$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха, p_1 (атм) — начальное давление, а p_2 (атм) — конечное давление воздуха в колоколе. До какого наибольшего давления p_2 (в атм) можно сжать воздух в колоколе, если при сжатии воздуха совершается работа не более чем 20 700 Дж?

Физическое обоснование задачи

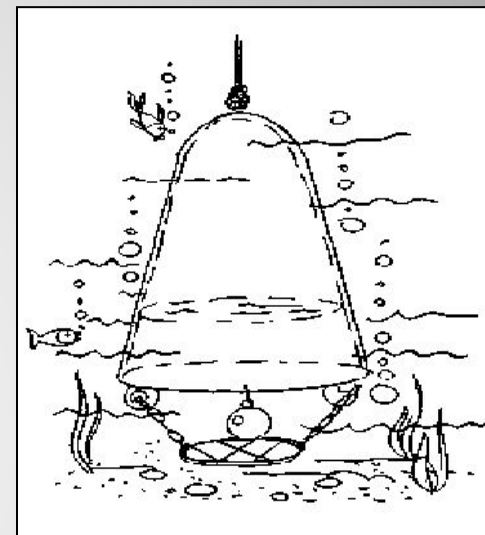
- Данная формула

$$A = \alpha \gamma T \log_2 \frac{P_2}{P_1}$$

также в школьном курсе физики не изучается, но как и в предыдущей задаче, в ней одна неизвестная величина P_2 , а остальные физические величины известны:

$$A \leq 20700 \text{ Дж}, \quad \gamma = 4 \text{ моль}, \quad P_1 = 1,2 \text{ атм}, \\ T = 300 \text{ К}, \quad \alpha = 5,75$$

Решение задачи сводится к решению логарифмического неравенства.



Решение логарифмического неравенства

Решение. Задача сводится к решению неравенства $A \leq 20\,700$ при заданных значениях количества воздуха, его начального давления и температуры, а также постоянной α :

$$\begin{aligned} A \leq 20\,700 &\Leftrightarrow \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1} \leq 20\,700 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5,75 \cdot 4 \cdot 300 \cdot \log_2 \frac{p_2}{1,2} \leq 20\,700 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log_2 \frac{p_2}{1,2} \leq 3 \Leftrightarrow 0 < \frac{p_2}{1,2} \leq 8 \Leftrightarrow 0 < p_2 \leq 9,6. \end{aligned}$$

Ответ: 9,6.

Задача № 13 на решение тригонометрического неравенства

8. При бросании мяча под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли его время в полёте, выраженное в секундах, равно

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время в полёте будет не меньше 3 секунд, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 30$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Физическое обоснование задачи



Решение тригонометрического неравенства

Решение. Задача сводится к решению неравенства

$$t(\alpha) \geq 3$$

на интервале $(0^\circ; 90^\circ)$ при заданных значениях начальной скорости $v_0 = 30$ м/с и ускорения свободного падения $g = 10$ м/с²:

$$\frac{2 \cdot 30 \cdot \sin \alpha}{10} \geq 3 \iff \sin \alpha \geq \frac{1}{2} \quad \begin{matrix} 0^\circ < \alpha < 90^\circ \\ \iff \end{matrix} \quad 30^\circ \leq \alpha < 90^\circ.$$

Ответ: 30.

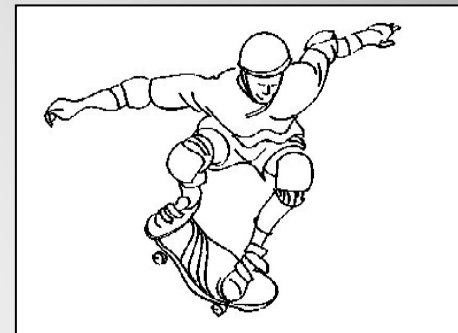
Задача № 14 на решение тригонометрического неравенства

9. На рельсах стоит платформа. Скейтбордист прыгает на неё со скоростью $v = 3$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает сдвигаться со скоростью

$$u = \frac{m}{m + M} v \cos \alpha,$$

где $m = 80$ кг — масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 400$ кг — масса платформы. Под каким наибольшим углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу до скорости не менее чем 0,25 м/с?

Физическое обоснование задачи



Решение тригонометрического неравенства

Решение. Задача сводится к решению неравенства

$$u \geq 0,25$$

на интервале $(0^\circ; 90^\circ)$ при заданных значениях массы скейтбордиста $m = 80$ кг и массы платформы $M = 400$ кг:

$$\begin{aligned} u \geq 0,25 &\Leftrightarrow \frac{m}{m+M} v \cos \alpha \geq 0,25 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{80}{80+400} \cdot 3 \cdot \cos \alpha \geq 0,25 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos \alpha \geq \frac{1}{4} \stackrel{0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ}{\Leftrightarrow} 0^\circ < \alpha \leq 60^\circ. \end{aligned}$$

Ответ: 60.

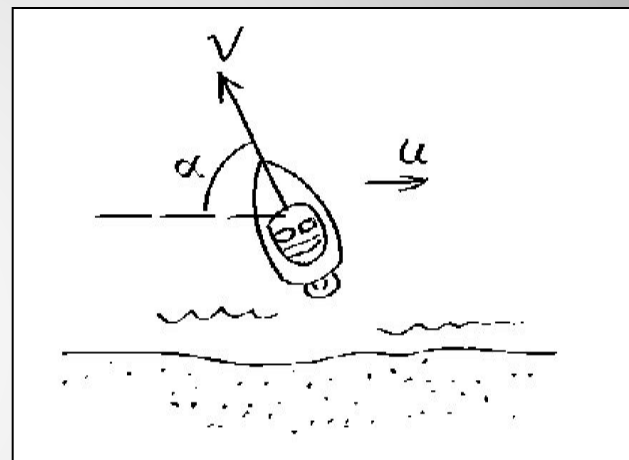
Задача № 15 на решение тригонометрического неравенства

10. Катер должен пересечь реку шириной $L = 100$ м так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Скорость течения реки $u = 0,5$ м/с. Время в пути, измеряемое в секундах, равно

$$t = \frac{L}{u} \operatorname{ctg} \alpha,$$

где α — острый угол между осью катера и линией берега. Под каким минимальным углом α к берегу нужно направить катер, чтобы время в пути было не больше 200 с? Ответ дайте в градусах.

Физическое обоснование задачи



Решение тригонометрического неравенства

Решение. Задача сводится к решению неравенства

$$\frac{L}{u} \operatorname{ctg} \alpha \geq 200$$

на интервале $(0^\circ; 90^\circ)$ при заданных значениях ширины реки $L = 100$ м и скорости течения $u = 0,5$ м/с:

$$\frac{100}{0,5} \operatorname{ctg} \alpha \leq 200 \Leftrightarrow \operatorname{ctg} \alpha \leq 1 \quad \begin{matrix} 0^\circ < \alpha < 90^\circ \\ \iff \end{matrix} \quad 45^\circ \leq \alpha < 90^\circ.$$

Ответ: 45.

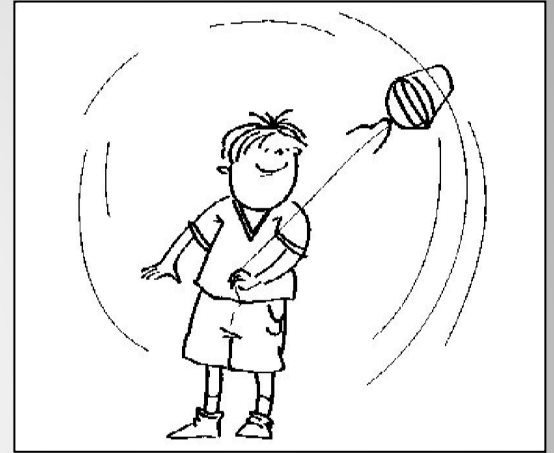
Задача № 16 на решение квадратного неравенства

26. Если достаточно быстро вращать ведёрко с водой на верёвке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведёрка сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет положительной во всех точках траектории, кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна

$$P = m \left(\frac{v^2}{L} - g \right),$$

где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения ведёрка в м/с, L — длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10 \text{ м/с}^2$). С какой минимальной скоростью надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась, если длина верёвки равна 0,441 м? Ответ выразите в м/с.

Физическое обоснование задачи



Решение квадратного неравенства

Решение. Задача сводится к решению неравенства $P(v) \geq 0$:
при заданной длине верёвки $L = 0,441$ м

$$\begin{aligned} P \geq 0 &\Leftrightarrow m \left(\frac{v^2}{L} - g \right) \geq 0 \stackrel{m>0}{\Leftrightarrow} \frac{v^2}{0,441} - 10 \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow v^2 \geq 4,41 \stackrel{v>0}{\Leftrightarrow} v \geq 2,1 \text{ м/с.} \end{aligned}$$

Ответ: 2,1.

Задача 1. Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по за

$$h(t) = 1,6 + 8t - 5t^2,$$

где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броск
секунд мяч будет находиться на высоте не менее трёх метров?

Решение. Формулой, описывающей изменение высоты мяча с течением времени является

$$h(t) = 1,6 + 8t - 5t^2,$$

в эту формулу не требуется подставлять значения параметров или констант.

Решим задачу двумя способами: сведём её к решению уравнения и к решению неравенства. Заметим, что в данной задаче сведение к неравенству предпочтительнее, чем сведение к уравнению.

Способ 1. Определим моменты времени, когда мяч находился на высоте 3 метра. Для этого решим уравнение $h(t) = 3$:

$$h(t) = 3 \Leftrightarrow 1,6 + 8t - 5t^2 = 3 \Leftrightarrow 5t^2 - 8t + 1,4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0,2; \\ t = 1,4. \end{cases}$$

Проанализируем полученный результат: поскольку по условию задачи мяч движется снизу вверх, это означает, что в момент времени $t = 0,2$ (с) мяч находился на высоте 3 метра, двигаясь снизу вверх, а в момент времени $t = 1,4$ (с) мяч находился на высоте 3 метра, двигаясь сверху вниз. Поэтому он находился на высоте не менее 3 метров в течение времени от 0,2 до 1,4 секунды.

Способ 2. Условие «мяч находится на высоте не менее трёх метров» эквивалентно неравенству $h(t) \geq 3$. Решим его:

$$h(t) \geq 3 \Leftrightarrow 1,6 + 8t - 5t^2 \geq 3 \Leftrightarrow 5t^2 - 8t + 1,4 \leq 0 \Leftrightarrow 0,2 \leq t \leq 1,4.$$

Проанализируем полученный результат: мяч будет находиться на указанной высоте в период времени от 0,2 до 1,4 секунды, т. е. в течение 1,2 секунды.

Ответ: 1,2.

Задача 2. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону

$$H(t) = 0,01t^2 - 0,4t + 4,$$

где t — время (в минутах), прошедшее с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ приведите в минутах.

Решение задачи 2-мя способами

Решение. Формулой, описывающей уменьшение высоты столба воды с течением времени, является $H(t) = 0,01t^2 - 0,4t + 4$, в эту формулу не требуется подставлять значения параметров или констант. Решим задачу двумя способами: сведём её к решению уравнения и к решению неравенства. Заметьте, что в данной задаче сведение к уравнению предпочтительнее сведения к неравенству.

Способ 1. Вода будет вытекать из бака, пока её уровень не понизится до нуля. Определим требуемое на это время, решая уравнение $H(t) = 0$:

$$H(t) = 0 \Leftrightarrow 0,01t^2 - 0,4t + 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 40t + 400 = 0 \Leftrightarrow t = 20.$$

Это означает, что по прошествии 20 минут вся вода вытечет из бака.

Способ 2. Условие «вода будет вытекать из бака» эквивалентно неравенству $H(t) \geq 0$: пока высота столба воды больше нуля, вода будет вытекать из бака. Решим неравенство $H(t) \geq 0$:

$$H(t) \geq 0 \Leftrightarrow 0,01t^2 - 0,4t + 4 \geq 0 \Leftrightarrow t^2 - 40t + 400 \geq 0 \Leftrightarrow (t - 20)^2 \geq 0.$$

Проанализируем полученный результат: неравенству удовлетворяют все значения переменной t . Это означает, что высота столба не может стать отрицательной ни в какой момент времени. Нулевого значения высота столба воды достигает при $t = 20$. Таким образом, столб воды опустится до нуля за 20 минут.

Ответ: 20.

Задача 4. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у поверхности воды закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону

$$H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0} \cdot kt + \frac{g}{2} k^2 t^2,$$

где t — время (в секундах), прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 20$ м — начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{50}$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с²). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объёма? (Ответ: 50.)

В дальнейшем большинство задач приводится в неупрощённом виде. В начале дана вводная диагностическая работа, позволяющая определить степень готовности учащихся к решению задач с прикладным содержанием. Далее разобраны примеры вводной диагностической работы; на каждый тип заданий приведены упр