

Логические выражения. Построение таблиц истинности логических выражений

Простые высказывания

Высказывания бывают простые и сложные.

Простым называется высказывание, которое не содержит в себе других высказываний.

Примеры:


1. Идет дождь.
2. Нам живется весело.

Сложные высказывания

Если несколько простых высказываний объединены в одно с помощью логических операций и скобок, то такое высказывание называется **сложным**.


Примеры:

1. Идет дождь, а у меня нет зонта.
2. Когда живется весело, то и работа спорится.



В формальной логике принято, что всякое простое высказывание обязательно имеет одно из двух значений – истина или ложь. Сложное высказывание также является истинным или ложным, но это значение вычисляется.

Вычисление производится по форме сложного высказывания в соответствии с таблицами истинности входящих в него логических операций.



Логические выражения

Каждое составное высказывание можно выразить в виде формулы (логического выражения), в которую войдут логические переменные, обозначающие высказывания, и знаки логических операций.

Приведем примеры определения формы сложного высказывания.

Пример 1.

Рассмотрим следующее высказывание: «Я поеду в автобусе или в трамвае и читаю по дороге книгу».

Решение

Легко увидеть те три высказывания, из которых создано данное сложное высказывание:

A — «Я поеду в автобусе»;

B — «Я поеду в трамвае»;

C — «По дороге я читаю книгу».

Предложение A и предложение B образуют логическую сумму $A \vee B$. Третье простое высказывание C вместе с высказыванием $A \vee B$ образует логическое произведение $(A \vee B) \& C$.

Полученное сложное высказывание можно теперь записать так:

$$X = (A \vee B) \& C.$$

Пример 2.

Перевести на язык алгебры логики высказывание:

«Вася пойдёт на рыбалку и, если ему повезёт, он вернётся домой с уловом».

Решение

Определяем три высказывания и соединяем их связками:

«Вася пойдёт на рыбалку» — A ;

«Ему повезёт» — B ;

«Он вернётся домой с уловом» — C .

Результат: $A \wedge (B \Rightarrow C)$.

«Если Вася пойдёт на рыбалку и, если ему повезёт, он вернётся домой с уловом».

Результат: $(A \wedge B) \Rightarrow C$.

Пример 3.

Перевести на язык алгебры логики высказывание:

«Если погода солнечная, то можно косить сено, если погода пасмурная, то лучше идти за грибами».

Решение

Определяем три высказывания и соединяем их связками:

«Погода солнечная» — A ;

«Косьба сена» — B ;

«Поход за грибами» — C .

Результат: $(A \Rightarrow B) \oplus (\bar{A} \Rightarrow C)$.

Пример 4.

Перевести на язык алгебры логики высказывание:

«Неверно, что если дует ветер, то солнце светит лишь тогда, когда нет дождя».

Решение

Определяем три высказывания и соединяем их связками:

«Дует ветер» — A ;

«Солнце светит» — B ;

«Дождь» — C .

Результат: $\overline{A \Rightarrow (B \Leftrightarrow \bar{C})}$.

Приоритет логических операций

При вычислении значения логического выражения (формулы) логические операции вычисляются в определенном порядке, согласно их приоритету:

1. инверсия
2. конъюнкция
3. дизъюнкция
4. импликация и эквивалентность

Для изменения порядка действий используются скобки.

Пример 1.

Дана формула:

$$A \vee B \Rightarrow C \& D \Leftrightarrow \bar{A}.$$

Порядок вычисления:

- | | |
|--|--------------------|
| 1) \bar{A} | — инверсия; |
| 2) $C \& D$ | — конъюнкция; |
| 3) $A \vee B$ | — дизъюнкция; |
| 4) $A \vee B \Rightarrow C \& D$ | — импликация; |
| 5) $A \vee B \Rightarrow C \& D \Leftrightarrow \bar{A}$ | — эквивалентность. |

Пример 2.

Дана формула:

$$A \vee (B \Rightarrow C) \& D \Leftrightarrow \bar{A}.$$

Порядок вычисления:

- | | |
|--|-------------------------|
| 1) \bar{A} | — инверсия; |
| 2) $(B \Rightarrow C)$ | — импликация в скобках; |
| 3) $(B \Rightarrow C) \& D$ | — конъюнкция; |
| 4) $A \vee (B \Rightarrow C) \& D$ | — дизъюнкция; |
| 5) $A \vee (B \Rightarrow C) \& D \Leftrightarrow \bar{A}$ | — эквивалентность. |

Алгоритм построения таблицы истинности сложного высказывания

1. Вычислить количество строк и столбцов таблицы истинности.

Количество строк = $2^n + 2$ строки заголовка, где n – количество простых высказываний.

Количество столбцов = сумме количества переменных и количества логических операций.

Алгоритм построения таблицы истинности сложного высказывания

2. Начертить таблицу и заполнить заголовок.

Первая строка заголовка – номера столбцов.
Вторая строка заголовка – промежуточные формулы и соответствующие им условные записи операций

Алгоритм построения таблицы истинности сложного высказывания

3. Заполнить первые n столбцов.

Для $n = 3$ количество строк со значениями переменных равно 8.

$8:2=4$: в 1-м столбце чередуем 4 нуля и 4 единицы.

$4:2=2$: в 2-м столбце чередуем 2 нуля и 2 единицы.

$2:2=1$: в 3-м столбце чередуем 1 ноль и 1 единицу.

4. Заполнить остальные столбцы.