Тавтологии алгебры предикатов

Лемма 2. Для любых формул Φ, Ψ следующие формулы являются тавтологиями:

1. $\neg(\forall x)\Phi \Leftrightarrow (\exists x)\neg\Phi$, $\neg(\exists x)\Phi \Leftrightarrow (\forall x)\neg\Phi$,

$(\forall x)\Phi \Leftrightarrow \neg(\exists x)\neg\Phi$, $(\exists x)\Phi \Leftrightarrow \neg(\forall x)\neg\Phi$;

2. $(\forall x)(\forall y)\Phi \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)\Phi$, $(\exists x)(\forall y)\Phi \Rightarrow (\forall y)(\exists x)\Phi$;

3. $(\forall x)(\Phi \wedge \Psi) \Leftrightarrow (\forall x)\Phi \wedge (\forall x)\Psi$,

$(\exists x)(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow (\exists x)\Phi \vee (\exists x)\Psi$;

4. $(\forall x)(\Phi\ \pi\ \Psi) \Leftrightarrow (\forall x)\Phi\ \pi\ \Psi$, где π – символ одной из операций $\wedge, \vee$;

5. $(\exists x)(\Phi\ \pi\ \Psi) \Leftrightarrow (\exists x)\Phi\ \pi\ \Psi$, где π – символ одной из операций $\wedge, \vee$,

если в формулу Ψ предметная переменная x не входит свободно.

Логическая равносильность формул алгебры предикатов

Определение. Формулы алгебры предикатов Φ, Ψ называется *логически равносильными*, если результат применения к ним логической операции эквивалентность $\Phi \Leftrightarrow \Psi$ является тавтологией.

В этом случае записывают $\Phi \equiv \Psi$, или просто $\Phi = \Psi$.

Таким образом, $\Phi = \Psi$ означает, что $\models \Phi \Leftrightarrow \Psi$.

Теорема 1 (Взаимосвязь между кванторами).

Для любой формулы Φ справедливо равенство:

$$(\forall x)(\forall y)\Phi = (\forall y)(\forall x)\Phi, \quad (\exists x)(\exists y)\Phi = (\exists y)(\exists x)\Phi.$$

С другой стороны, если в формулу Φ предметные переменные x, y входят свободно, то равенство

$$(\forall y)(\exists x)\Phi = (\exists x)(\forall y)\Phi$$

не выполняется, так как в этом случае формула

$$(\forall y)(\exists x)\Phi \Rightarrow (\exists x)(\forall y)\Phi$$

не является тавтологией.

Теорема 2. Пусть формула $\Phi(x)$ не содержит предметную переменную y и формула $\Phi(y)$ получается из $\Phi(x)$ заменой всех свободных вхождений переменной x на предметную переменную y.

Тогда формулы $(\forall x)\Phi(x)$ и $(\exists x)\Phi(x)$ будут логически равносильны соответственно формулам $(\forall y)\Phi(y)$ и $(\exists y)\Phi(y)$, т.е. выполняются равенства:

$$(\forall x)\Phi(x) = (\forall y)\Phi(y) \quad \text{и} \quad (\exists x)\Phi(x) = (\exists y)\Phi(y).$$

<u>Теорема 3 (Законы де Моргана для кванторов)</u>. Для любой формулы Φ справедливы следующие утверждения:

$$\neg(\forall x)\Phi = (\exists x)\neg\Phi, \quad \neg(\exists x)\Phi = (\forall x)\neg\Phi,$$

$$(\forall x)\Phi = \neg(\exists x)\neg\Phi, \quad (\exists x)\Phi = \neg(\forall x)\neg\Phi.$$

<u>Теорема 4 (Взаимосвязь кванторов с конъюнкцией и дизъюнкцией)</u>. Для любых формул Φ, Ψ справедливы следующие утверждения:

$$(\forall x)(\Phi \wedge \Psi) = (\forall x)\Phi \wedge (\forall x)\Psi,$$

$$(\exists x)(\Phi \vee \Psi) = (\exists x)\Phi \vee (\exists x)\Psi.$$

Если в формулу Ψ предметная переменная x не входит свободно, то справедливы также утверждения:

$$(\forall x)\Phi \ \pi \ \Psi = (\forall x)(\Phi \ \pi \ \Psi), \quad (\exists x)\Phi \ \pi \ \Psi = (\exists x)(\Phi \ \pi \ \Psi),$$ где π – символ одной из операций $\wedge, \vee$.

Теорема 6 (Взаимосвязь кванторов с импликацией). Если в формулу Φ предметная переменная x не входит свободно, то для любой формулы Ψ справедливы следующие утверждения:

$$(\forall x)(\Phi \Rightarrow \Psi) = \Phi \Rightarrow (\forall x)\Psi, \quad (\exists x)(\Phi \Rightarrow \Psi) = \Phi \Rightarrow (\exists x)\Psi.$$

Если же предметная переменная x не входит свободно в формулу Ψ, то для любой формулы Φ справедливы утверждения:

$$(\forall x)(\Phi \Rightarrow \Psi) = (\exists x)\Phi \Rightarrow \Psi, \quad (\exists x)(\Phi \Rightarrow \Psi) = (\forall x)\Phi \Rightarrow \Psi.$$

Следствие 7. Любая формула Φ представляется в следующем виде:

$$\Phi = (K_1 x_1)\dots(K_n x_n)\Psi,$$

где $K_1,\dots,K_n$ – некоторые кванторы и Ψ – формула без кванторов.

Таким образом, каждая формула Φ логически равносильна формуле $(K_1 x_1)\dots(K_n x_n)\Psi$, в которой все кванторы стоят в самом начале формулы и которая называется *предваренной нормальной формой* (сокращенно ПНФ) формулы Φ.

Алгоритм приведения формулы Ф к ПНФ:

1) преобразуем формулу Ф в эквивалентную ей формулу $Ф'$, которая не содержит импликации и эквивалентности и в которой отрицание действует только на элементарные формулы;

2) в $Ф'$ все кванторы последовательно выносим вперед по теореме 5, при этом кванторы общности $(\forall x)$ выносятся из конъюнкции и кванторы существования $(\exists x)$ выносятся из дизъюнкции, а для выноса кванторов общности $(\forall x)$ из дизъюнкции и кванторов существования $(\exists x)$ из конъюнкции переименовываем связанные переменные x в новые переменные y, которые не входят в рассматриваемую формулу.

Логическое следование формул алгебры предикатов

С помощью логического следования формул определяются общие способы доказательства взаимосвязи между истинностными значениями утверждений посредством исследования формальной структуры этих утверждений.

Определение. Формула Φ алгебры предикатов называется *логическим следствием* формулы Ψ, если $\models \Psi \Rightarrow \Phi$, т.е. в любой интерпретации M формула Φ выполняется при любой оценке предметных переменных α, при которой выполняется формула Ψ.

<u>Определение.</u> Формула Φ называется *логическим следствием множества формул* Γ, если в любой интерпретации M формула Φ выполняется при любой оценке предметных переменных α, при которой выполняются все формулы из Γ.

Такое логическое следствие обозначается $\Gamma \models \Phi$ и называется *логическим следованием*. При этом формулы из Γ называются *посылками* и формула Φ – *следствием* логического следования $\Gamma \models \Phi$.

В случае, когда $\Gamma = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_m\}$ записывают $\Phi_1, \ldots, \Phi_m \models \Phi$.

__Определение.__ Множество формул Γ называется *противоречивым*, если из него логически следует любая (в том числе и тождественно ложная) формула Φ. Символически это записывается $\Gamma \models$.

__Лемма 1 (Критерии логического следования).__ Условие $\Phi_1, \ldots, \Phi_m \models \Phi$ равносильно каждому из следующих условий:

a) $\Phi_1 \wedge \ldots \wedge \Phi_m \models \Phi$,

b) $\models \Phi_1 \wedge \ldots \wedge \Phi_m \Rightarrow \Phi$,

c) $\Phi_1, \ldots, \Phi_m, \neg\Phi \models$.

В частности, $\Phi \models \Psi$ равносильно $\models \Phi \Rightarrow \Psi$. Отсюда также следует, что $\Phi = \Psi$ равносильно тому, что $\Phi \models \Psi$ и $\Psi \models \Phi$.

Основные правила логического следования:

1) *правило отделения* (или правило *модус поненс* – от латинского modus ponens)

$$\Phi, \Phi \Rightarrow \Psi \models \Psi;$$

2) *правило модус толленс* (от латинского modus tollens)

$$\Phi \Rightarrow \Psi, \neg\Psi \models \neg\Phi;$$

3) *правило контрапозиции*

$$\Phi \Rightarrow \Psi \models \neg\Psi \Rightarrow \neg\Phi;$$

4) *правило цепного заключения*

$$\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2, \Phi_2 \Rightarrow \Phi_3 \models \Phi_1 \Rightarrow \Phi_3.$$

Формальные исчисления

Было определено множество формул алгебры высказываний F_{AB}

Затем было выделено подмножество этого множества $T_{\mathrm{AB}} \subset F_{\mathrm{AB}}$, состоящие из специальных формул – тавтологий.

При этом в основе определения тавтологии лежит понятие интерпретации формул, т.е. придание некоторого конкретного содержательного смысла входящих в них переменных. Такой подход к логическим формулам носит теоретико-множественный характер и называется *семантическим*.

Альтернативой семантического подхода является *синтаксический* подход, при котором логические формулы выводятся из первоначально выделенного множества формул – аксиом по определенным правилам преобразования формул логического языка без привлечения вспомогательных теоретико-множественных понятий.

.

В этом случае полностью отвлекаются от содержания логических формул, и построение математической логики осуществляется в виде некоторого *формального исчисления* I, которое в общем случае определяется следующим образом:

1) задается *алфавит* исчисления $A(I)$, который состоит из основных символов исчисления I, и рассматривается множество $W(I)$ всех слов над этим алфавитом;
2) выделяется подмножество $E(I) \subset W(I)$ правильно построенных *формул* исчисления I;
3) задается подмножество $Ax(I) \subset E(I)$ *аксиом* исчисления I;

4) рассматривается конечное множество $\mathbf{R}(I)$ частичных операторов $R_1, ,\ldots, R_n$ на множестве формул $E(I)$, которые называются *правилами вывода* исчисления I;

5) описывается алгоритм вывода из аксиом *теорем* исчисления I;

6) множество всех таких теорем образует *теорию* $Th(I)$ формального исчисления I, которая называется также *аксиоматической теорией* с множеством аксиом $Ax(I)$.

Аксиоматическая теория $Th(I)$ называется:

– *полной*, если $Th(I)$ совпадает с множеством тождественно истинных формул формального исчисления I,

– *непротиворечивой*, если она не содержит никакой формулы Ф формального исчисления I вместе с ее отрицанием ¬Ф,

– *разрешимой*, если существует такая универсальная эффективная процедура (алгоритм), которая позволяет для любой формулы Ф формального исчисления I определить, будет или нет эта формула теоремой исчисления I.

Построение математических теорий в виде аксиоматических теорий соответствующих формальных исчислений составляет суть *аксиоматического метода* в математике.

Простейшей аксиоматической теорией является *аксиоматическая логика высказываний*, которая строится на основе соответствующего формального исчисления, называемого *исчислением высказываний* (сокращенно, ИВ).

Исчисление высказываний

Множество аксиом $Ax(\text{ИВ})$ исчисления высказываний описывается следующими тремя *схемами аксиом*:

$$(A_1)\ \left(\Phi \Rightarrow \left(\Psi \Rightarrow \Phi\right)\right),$$

$$(A_2)\ \left(\left(\Phi_1 \Rightarrow \left(\Phi_2 \Rightarrow \Phi_3\right)\right) \Rightarrow \left(\left(\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2\right) \Rightarrow \left(\Phi_1 \Rightarrow \Phi_3\right)\right)\right),$$

$$(A_3)\ \left(\left(\neg\Phi \Rightarrow \neg\Psi\right) \Rightarrow \left(\left(\neg\Phi \Rightarrow \Psi\right) \Rightarrow \Phi\right)\right),$$

где Φ, Ψ, Φ_i $\left(i = 1,2,3\right)$ – произвольные формулы исчисления высказываний.

Исчисление высказываний имеет единственное *правило вывода,* которое называется *правилом заключения* или правилом *modus ponens* (сокращенно *MP*) и которое для произвольных формул исчисления высказываний Φ, Ψ определяется по формуле $MP\left(\Phi \Rightarrow \Psi, \Phi\right) = \Psi$.

Символически это правило вывода записывается следующей схемой:

$$MP: \ \frac{\Phi \Rightarrow \Psi, \Phi}{\Psi}.$$

В основе алгоритма вывода *теорем* исчисления высказываний лежит следующее понятие.

Определение. Формула Ф называется *теоремой исчисления высказываний*, если найдется такая конечная последовательность формул $\Phi_1,\dots,\Phi_n$, в которой:

1) $\Phi_n = \Phi$;
2) каждая формула $\Phi_i \ (1 \le i \le n)$ либо является аксиомой, либо получается из некоторых двух предыдущих формул $\Phi_j, \Phi_k \ (1 \le j, k < i)$ по правилу вывода *MP*.

Последовательность формул $\Phi_1,\dots,\Phi_n$ называется *выводом* или *доказательством* формулы Ф.

Вывод формулы Ф сокращенно обозначают символом |–Ф и говорят, что «Ф есть теорема». Множество всех таких теорем обозначается символом *Th*(ИВ) и называется *теорией исчисления высказываний*.

Главной целью построения исчисления высказываний является определение такой теории *Th*(ИВ), которая совпадает с множеством тавтологий $\boldsymbol{T}_{\text{АВ}}$.

Пример.

Для любой формулы Ф справедливо следующее утверждение:

$$\vdash \Phi \Rightarrow \Phi .$$