

# ***Представление результатов измерений.***

**Вопросы:**

- 1. Определение доверительных интервалов случайной погрешности.**
- 2. Определение границ неисключенной систематической погрешности результата измерений.**
- 3. Правила округления результатов измерений.**
- 4. Формы представления результатов измерений.**
- 5. Запись результата измерений при прямых измерениях.**

За результат измерений при статистической обработке выборки, состоящей из многократных наблюдений, принимается координата центра распределения при равноточных измерениях; средневзвешенное значение центров распределений в группах - при неравноточных.

В силу конечного объёма выборки, наличия неисключенных составляющих погрешностей и различных законов распределения, результат измерения имеет неопределенность.

Зона неопределенности (доверительные границы) генерального среднего устанавливаются погрешностью результата измерения  $\pm \Delta$ .

Границы могут быть заданы как симметричными, так и несимметричными, они зависят от выбранной доверительной вероятности.

Чаще используются симметричные границы с двухсторонней вероятностью  $P$ .

За погрешность результата измерения может быть принято:

- а) только случайная составляющая погрешности;
- б) систематическая составляющая погрешности;
- в) композиция случайной и систематической составляющих погрешностей.

Характеристики погрешности измерений указываются в единицах измеряемой величины (абсолютные) и в процентах (относительные) относительно результатов измерений или истинных значений измеряемой величины.

# 1. Определение доверительных интервалов случайной погрешности.

● В случае отсутствия в результатах наблюдений систематических погрешностей или при условии, что отношение неисключенной систематической погрешности  $\theta$  к оценке  $S_{\bar{x}}$  СКО результата измерения соответствует условию:

$$\frac{\theta}{S_{\bar{x}}} < 0,8, \quad (1)$$

то за погрешность результата измерения принимается случайная составляющая погрешности:

$$\Delta = \pm t \cdot S_{\bar{x}}, \quad (2)$$

где  $t$  – коэффициент, зависящий от объема выборки, вида распределения и доверительной вероятности  $P$ . В соответствии с ГОСТ 8.207 рекомендуется устанавливать доверительную вероятность  $P = 0,95$ .

При выполнении технических измерений, а также при контроле параметров технологического процесса, например, в пищевой и автомобильной промышленности так же принимают доверительную вероятность  $P = 0,95$ .

При невозможности повторного измерения, доверительную вероятность  $P$  допускается принимать равной 0,99. В особых случаях, когда результаты измерения имеют большое значение для здоровья людей, допускается вместо вероятности, равной  $P = 0,99$  принимать более высокую доверительную вероятность.

С увеличением доверительной вероятности  $P$  квантиль Стьюдента  $t$  уменьшается, степень доверия к результату измерения повышается, и поэтому могут быть использованы более узкие границы (задающие интервалы), в которых ожидается появление данного результата.

Существует ряд рекомендаций по выбору коэффициента  $t$ :

а) при нормальном законе распределения случайной величины коэффициент  $t$  выбирается из таблицы квантилей Стьюдента при принятой доверительной вероятности  $P$  и числе степеней свободы  $k = n - 1$ ;

● б) для распределений вида Лапласа с эксцессом  $\varepsilon = 6$ , нормального распределения с эксцессом  $\varepsilon = 3$ , равномерного распределения с эксцессом  $\varepsilon = 1,8$ , трапецеидального с эксцессом  $\varepsilon = 2$  и погрешностью, не превышающей 4 % и при вероятностях  $P = 0,9 \div 0,99$  коэффициент определяется по формуле:

$$t = 1,62 \cdot [3,8 \cdot (\varepsilon - 1,6)^{2/3}]^{lg\lg[1/(1-P)]}; \quad (3)$$

в) для кругловершинных двумодальных распределений с эксцессом  $\varepsilon = 1 \div 3$  с доверительной вероятностью  $P = 0,8 \div 0,999$  и погрешностью не менее 10 %:

$$t = 1,6 \cdot \{3,6 \cdot [1 + tg(\varepsilon - 1)]\}^{lg\lg[1/(1-P)]}; \quad (4)$$

г) для распределения типа Шапо с эксцессом  $\varepsilon = 1,8 \div 6$  с погрешностью до 8 %:

$$t = 1,56 \cdot \left[ 1,12 + \frac{(\varepsilon - 1,8)^{0,58}}{\sqrt{10}} \right]^{lg[0,1/(1-P)]}; \quad (5)$$

- д) для островершинных двумодальных распределений с эксцессом  $\varepsilon = 1,8 \div 6$  при  $P = 0,9 \div 0,999$  с погрешностью 5 %:

$$t = 1,23 \cdot \left[ 1 + \sqrt{\frac{\varepsilon - 1}{2,5}} \cdot \lg \frac{0,175}{1 - P} \right]; \quad (6)$$

- е) для законов распределения от Лапласа до равномерного и некоторых двумодальных с погрешностью до 10 %:

$$t_{0,9} = 1,6 ; t_{0,95} = 1,8 . \quad (7)$$

## 2. Определение границ неисключенной систематической погрешности результата измерений.

- Если неисключенные систематические погрешности в 8 и более раз превышают оценки  $S_{\bar{x}}$  СКО результата измерения, т. е.:

$$\frac{\theta}{S_{\bar{x}}} > 8 \quad (8)$$

то за погрешность результата измерения принимается систематическая погрешность. За неисключенную систематическую погрешность принимают составляющую погрешности результата измерений, обусловленную погрешностями вычисления и введения поправок на влияние систематических погрешностей или систематической погрешностью, поправка, на действие которой не введена вследствие ее малости.

Неисключенная систематическая погрешность характеризуется ее границами и рассматривается как квазислучайная.

● Границы неисключенной систематической погрешности  $\theta$  при числе слагаемых  $N \leq 3$  вычисляют по формуле:

$$\Delta = \theta = \pm \sum_{i=1}^N |\theta_i|. \quad (9)$$

При числе неисключенных систематических погрешностей  $N \geq 4$  вычисления проводят по формуле:

$$\Delta = \theta = K \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^N \theta_i^2}, \quad (10)$$

где  $\theta_i$  – граница  $i$ -й неисключенной систематической погрешности;

$K$  – коэффициент зависимости отдельных неисключенных систематических погрешностей от выбранной доверительной вероятности  $P$  при их равномерном распределении (при  $P = 0,99$ ;  $K \approx 1,4$ ).

Значения коэффициента для других случаев представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Коэффициент  $K$  систематической погрешности.

Доверительная вероятность	Число составляющих погрешностей $N$					
	2	3	4	5	...	средняя
0,90	0,97	0,95	0,95	0,95	...	0,95
0,95	1,10	1,12	1,12	1,12	...	1,11
0,99	1,27	1,37	1,41	1,42	...	1,40

Неисключенная систематическая погрешность  $\theta$  рассматривается в данном случае как доверительная квазислучайная погрешность.

Доверительная граница  $\theta_i$  для  $i$ -й составляющей погрешности может быть найдена с учетом значений квантилей  $t_\alpha$  равномерного закона распределения, используя принцип геометрического суммирования.

Следует отметить, что границы неисключенной систематической погрешности вычисляются путем построения композиций неисключенных погрешностей средств измерений, метода и погрешностей, вызванных другими факторами (условия измерения, перекалибровка и др.). При суммировании погрешностей по формулам (9), (10) предполагается их равномерное распределение в установленных границах.

Для некоторых законов распределения квантили  $t_{\alpha}$  представлены в таблице 2:  
Таблица 2 – Квантили законов распределения.

Закон распределения	Значение $\alpha$		
	0,90	0,95	0,99
Нормальный	1,645	1,96	2,576
Равномерный	1,55	1,64	1,71
Треугольный	1,67	1,90	2,20

Если отношение неисключенной систематической составляющей погрешности к оценке  $S_{\bar{x}}$  СКО находится в пределах:

$$0,8 \leq \frac{\theta}{S_{\bar{x}}} \leq 8, \quad (11)$$

то за погрешность результата измерения без учета знака принимают композицию случайной и систематической составляющих погрешности:

$$\Delta = k \cdot (\Delta \dot{+} \theta), \quad (12)$$

где  $k$  – коэффициент, зависящий от соотношения  $\frac{\theta}{S_{\bar{x}}}$ , его значения сведены в таблицу 3.

Таблица 3 – Значение коэффициента  $K$ .

	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6	7	8
$k(P=0,95)$	0,81	0,77	0,74	0,71	0,73	0,76	0,78	0,79	0,80	0,81
$k(P=0,99)$	0,87	0,85	0,82	0,80	0,81	0,82	0,83	0,83	0,84	0,85

### 3. Правила округления результатов измерений.

Наименьшие разряды числовых значений результатов измерений должны быть такими же, как наименьшие разряды числовых значений среднего квадратического отклонения абсолютной погрешности измерений или значений границ, в которых находится абсолютная погрешность измерений (или статистических оценок этих характеристик погрешности).

Числовое значение результата измерений представляется так, чтобы оно оканчивалось десятичным знаком того же разряда, какой имеет погрешность этого результата, например,  $1213 \pm 0,17$ .

Числовые значения именованной физической величины и ее погрешности (отклонения) надо записывать с указанием размерности единицы физической величины, например,  $(80,550 \pm 0,002)$  кг.

Значащие цифры числа – это все цифры от первой слева, не равной нулю, до последней записанной справа цифры. При этом нули в множителе 10 не учитываются.

В приближенном числе различают верные и сомнительные цифры.

Верные цифры приближенного числа определяют по его абсолютной погрешности.

Принято считать:

а) если отличная от нуля первая (слева) цифра абсолютной погрешности равна или меньше 5, то все цифры приближенного числа, расположенные левее, будут верными;

б) если эта цифра абсолютной погрешности больше 5, то верными цифрами приближенного числа будут только те, которые расположены на одну цифру того же разряда, к которому она принадлежит.

Рекомендуется записывать приближенные числа так, чтобы все цифры были верными и только одна, последняя была сомнительной.

В окончательной записи погрешность измерения принято выражать числом с одним или двумя значащими цифрами.

Две значащие цифры приводят в случае выполнения точных измерений.

Эмпирически были установлены следующие правила округления рассчитанного значения погрешности и полученного результата измерений:

а) погрешность результата измерения указывается двумя значащими цифрами, если первая из них равна 1 и 2, и одной, – если первая цифра равна 3 или более;

б) результат измерения округляется до того же десятичного знака, которым оканчивается округленное значение абсолютной погрешности. Если десятичная дробь в числовом значении результата измерений оканчивается нулями, то нули отбрасываются до того разряда, который соответствует разряду числового значения погрешности;

в) если цифра старшего из отбрасываемых разрядов меньше 5, то остающиеся цифры в числе не изменяют. Если эта цифра равна или больше 5, то последнюю оставляемую цифру увеличивают на единицу. Лишние цифры в целых числах заменяют нулями, а в десятичных дробях отбрасывают.

Например, числовое значение результата измерения составляет 25,458 при погрешности результата, выраженной пределами  $\pm 0,02$ ; округление результата будет 25,46. Если пределы погрешности имеют  $\pm 0,002$ , то числовое значение результата сохраняется полностью. Числовое значение результата измерений 105553 получено с погрешностью  $\pm 0,0005$ . В нем сохраняются четыре значащие цифры и округление, даст число 105600; если числовое значение результата 105,553, то при тех же условиях округление дает число 105,6. Или еще пример: Число 6783,6 округляют до 6784 число 5499,7 – до 5500, число 12,34501 – до 12,35;

г) если отбрасываемая цифра равна пяти, а следующие за ней цифры неизвестны (отсутствуют) или нули, то последнюю сохраняемую цифру числа не изменяют, если она четная, и увеличивают на единицу, если она нечетная. Число 105,5 при сохранении трех значащих цифр округляют до 106. Еще пример: число 1234,50 округляют до 1234; число 5465,50 – до 5466; число 43210,500 – до 43210;

д) округление производится лишь в окончательном ответе, а все предварительные вычисления проводят с одним - двумя лишними знаками (или числом разрядов, которые удастся получить).

Таким образом, при выполнении вычислений может быть оставлена (как было сказано выше) одна сомнительная цифра, а в окончательном результате, в соответствии со стандартом, оставлять в приближенном числе только верные цифры.

Если руководствоваться этими правилами округления, то количество значащих цифр в числовом значении результата измерений дает возможность ориентировочно судить о точности измерения.

Предельная погрешность, обусловленная округлением, равна половине единицы последнего разряда числового значения результата измерения.

## 4. Формы представления результатов измерений.

Результат измерений представляется именованным или неименованным числом.

*Рассмотрим пример:*

100 кВт; 20 °С — именованные числа;

0,44; 2,765 — неименованные числа.

Совместно с результатом измерений должны быть представлены характеристики его погрешности или их статистические оценки. Если результат измерений или определенная группа результатов измерений получены по аттестованной методике выполнения измерений, то их можно сопровождать, вместо характеристик погрешности измерений, ссылкой на документ (аттестат), удостоверяющий характеристики погрешностей, получаемых при использовании данной методики, и условия применимости этой методики.

Если результат измерений получен по такой методике, когда характеристики погрешности измерений оценивались в процессе самих измерений или непосредственно перед ними, он (результат) должен сопровождаться статистическими оценками характеристик погрешности измерений.

- Допускается представление результата измерений доверительным интервалом, покрывающим с известной (указываемой) доверительной вероятностью истинное значение измеряемой величины. В этом случае статистические оценки характеристик погрешности измерений отдельно не указываются.

Такая форма представления результатов измерений допускается в случаях, когда характеристики погрешности измерений заранее не установлены и погрешность измерений оценивается в процессе самих измерений или непосредственно перед ними.

*Рассмотрим примеры:*

Форма записи в техническом задании на разработку методики выполнения измерений расхода жидкости (норма).

Границы, в которых абсолютная погрешность измерений расхода жидкости должна находиться с заданной вероятностью (границы допустимого интервала)  $S_{\bar{x}_j} = \pm 0,2 \text{ м}^3/\text{с}$ ;  $P = 0,95$ . Условия, при которых погрешность измерений должна находиться в заданных границах: диапазон значений измеряемого расхода от 10 до 50  $\text{м}^3/\text{с}$ , температура жидкости от 15 до 30 °С, кинематическая вязкость жидкости от  $1 \times 10^{-6}$  до  $1,5 \times 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ .

Форма записи в аттестате методики выполнения измерений добротности катушки индуктивности (приписанная погрешность).

Наибольшее возможное значение среднего квадратического отклонения случайной составляющей абсолютной погрешности измерений  $\sigma_M[\Delta] = 0,08$  наибольшее возможное значение среднего квадратического отклонения неисключенной систематической составляющей абсолютной погрешности измерений  $\sigma_M[\Delta_S] = 0,1$ . Условия, для которых определены характеристики погрешности измерений: диапазон значений измеряемой добротности от 50 до 80; диапазон частот тока, протекающего через катушку, от 50 до 300 Гц; диапазон температур среды, окружающей катушку и применяемые средства измерений, от 15 до 25 °С; коэффициент нелинейных искажений тока не более 1 %.

При практических записях характеристик погрешностей измерений необязательно каждый раз писать словами название характеристики и условия, которым они соответствуют. Лучше характеристики и условия записывать условными обозначениями, приложив отдельный список обозначений.

При регистрации характеристик погрешности измерений с помощью автоматических устройств рекомендуется обозначать характеристики словами и не пользоваться условными обозначениями.

Статистические оценки характеристик погрешности измерений представляются одной или, при необходимости, несколькими характеристиками из числа рассмотренных выше. Дополнительно могут указываться частотный спектр или скорость изменения измеряемой величины (или частотный спектр, скорость изменения параметров, функционалом которых является измеряемая величина); значения или диапазоны значений существенно влияющих величин, а также, при необходимости, и другие факторы, характеризующие проведенные измерения.

Каждая статистическая оценка характеристики погрешности измерений относится к определенному результату измерения или значению измеряемой величины.

Статистические оценки характеристик погрешности измерений указываются в единицах измеряемой величины (абсолютные) или в процентах от результата измерения (относительные).

Характеристики погрешности измерений и их статистические оценки могут указываться в виде постоянных величин или как функции времени, измеряемой или другой величины в виде формулы, таблицы, графика.

Характеристики погрешности и их статистические оценки выражаются числом, содержащим не более двух значащих цифр. При этом для статистических оценок характеристик третий разряд (неуказываемый младший) округляется в большую сторону. Допускается характеристики погрешности и их статистические оценки выражать числом, содержащим одну значащую цифру. В этом случае для статистических оценок характеристик число получается округлением в большую сторону, если цифра последующего неуказываемого младшего разряда равна или больше пяти, или в меньшую сторону, если эта цифра меньше пяти.

Характеристики погрешности измерений и условия, для которых они действительны, должны указываться совместно с результатом измерений, к которому они относятся, или совместно с группой результатов измерений, к которым они относятся, или в документе (аттестате), удостоверяющем свойства методики выполнения измерений, по которой получены данные результаты измерений.

## 5. Запись результата измерений при прямых измерениях.

● При симметричной доверительной погрешности результаты измерений для групп равноточных рядов записывают так:

$$\overline{X_{ц.р.}}(\bar{X}) ; \pm \Delta ; P = P_D ; n = \dots$$

или

$$\overline{X_{ц.р.}}(\bar{X}) \pm \Delta ; P = P_D ,$$

где  $\Delta$  – границы;

$P = P_D$  – принятая доверительная вероятность;

$n$  – количество наблюдений.

Если измерения неравноточные, то за результат принимают оценку средневзвешанного значения для групп наблюдений и тогда окончательно пишут:

$$\overline{X_{св}} \pm \Delta ; P = P_D ; m_1 = \dots ; m_2 = \dots ; n = \dots ,$$

● где  $m_1 = \dots; m_2 = \dots$  – количество наблюдений в  $i$ -группе (серии) неравноточных измерений;

$n = \dots$  – общее количество наблюдений.

При несимметрической погрешности измерений результаты представляют в форме:

$$\overline{X}_{\text{ц.р.}}(\bar{X}); \Delta(R) \text{ от } \Delta_{\text{н}} \text{ до } \Delta_{\text{в}}; P = P_{\text{д}}; n = \dots,$$

где  $\Delta_{\text{н}}$  и  $\Delta_{\text{в}}$  – значения нижней и верхней границ погрешности измерений.

Если отсутствуют данные о функциях распределения составляющих погрешности, то результаты измерений представляют в виде:  $\bar{X}; S_{\bar{x}}; n; \theta$  при доверительной вероятности  $P = P_{\text{д}}$ .