

# КРАТКАЯ ТЕОРИЯ ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ, ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ.

## Основные понятия алгебры логики

Джорж Буль, 19 век, «Алгебра логики»

В устройствах ЛОС сигналы принимают два состояния:

*логического «0» и логической «1»* при этом

если  $X=1$ , то  $X \neq 0$  и наоборот, если  $X=0$ , то  $X \neq 1$ .

**Высказывание** - всякое утверждение относительно, которого можно сказать, оно является «истинным» или «ложным» и имеет значение истинности, равное соответственно либо «1» либо «0».

**Простое высказывание или логическая переменная** не зависит от истинности других высказываний.

**Сложное высказывание или логическая функция** - зависит от истинности составляющих его простых высказываний

# Основные простые функции (элементы) алгебры логики.

Логическое сложение или дизъюнкция иначе логическая связь **ИЛИ** двух (нескольких) высказываний (переменных).

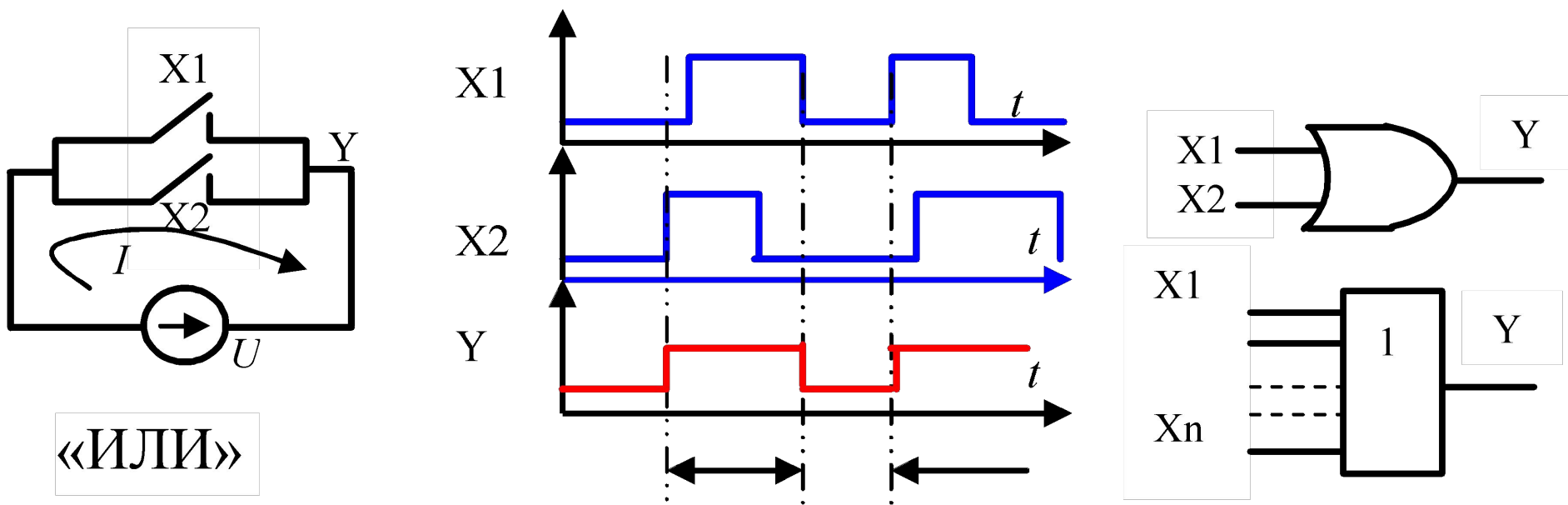
$Y=1$  (истинно), если хотя бы одна из  $n$  переменных  $X=1$  (если одна истинна).

$Y=0$  (ложно), если все из  $n$  переменных  $X=0$  (если все ложны)

$Y=X1$  или  $X2$  или  $X3$  или...или  $Xn$

$$Y = X1 \cup X2 \cup \dots \cup Xn$$

$$Y = X1 + X2 + \dots + Xn.$$



«ИЛИ»

**Логическое умножение** или **конъюнкция** иначе логическая связь "И", двух или нескольких высказываний.

$Y = 1$  (истинно), если все  $n$  переменные  $X = 1$  (все истинны).

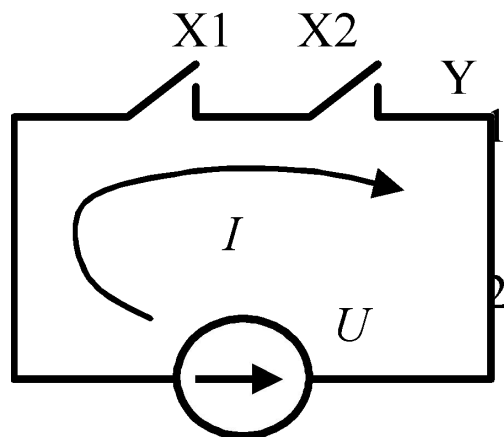
$Y = 0$  (ложно), если хотя бы одна  $n$  переменная  $X = 0$  (одна ложна)

$$Y = X1 \text{ и } X2 \text{ и } \dots \text{ и } Xn$$

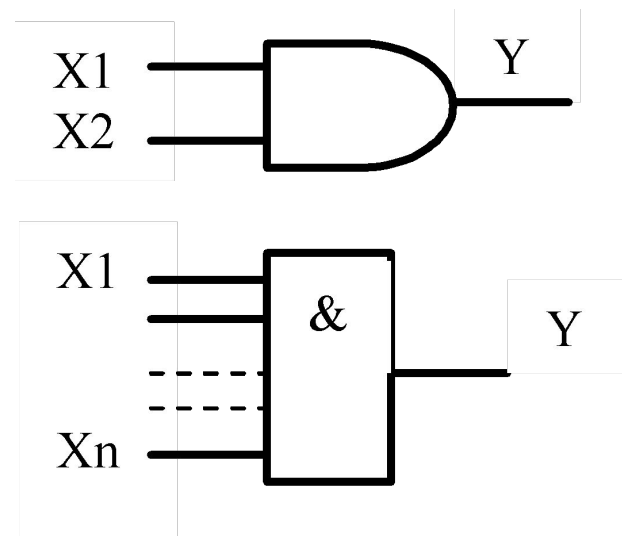
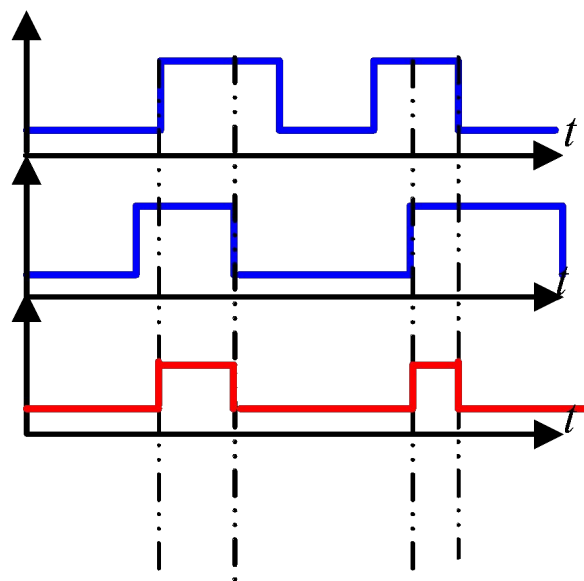
$$Y = X1 \cap X2 \cap \dots \cap Xn$$

или

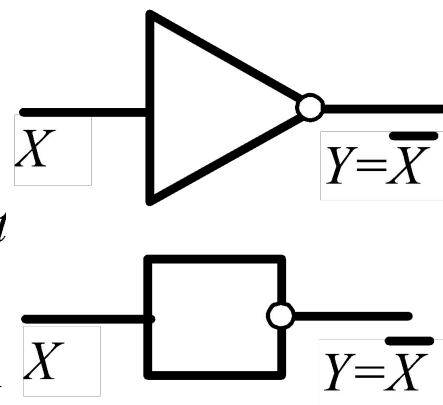
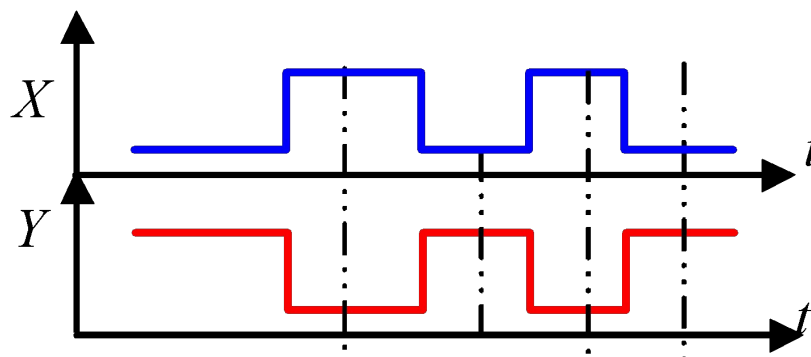
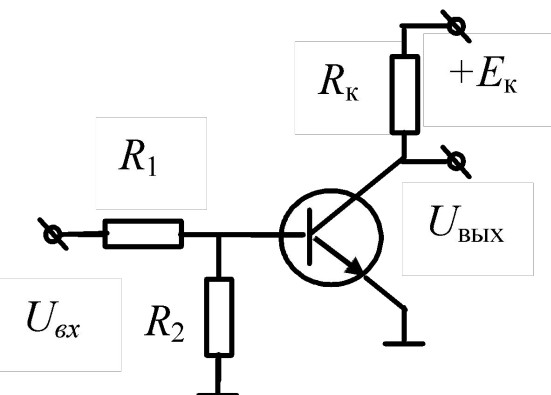
$$Y = X1 \cdot X2 \cdot \dots \cdot Xn.$$



«И»



Логическое отрицание или инвертор иначе логическая связь НЕ Аналитическая запись:  $Y = \bar{X}$



Логическую функцию можно представить таблицей истинности

| Сложение (дизъюнкция) |      |     | Умножение (конъюнкция) |      |     |
|-----------------------|------|-----|------------------------|------|-----|
| $X1$                  | $X2$ | $Y$ | $X1$                   | $X2$ | $Y$ |
| 1                     | 1    | 1   | 1                      | 1    | 1   |
| 1                     | 0    | 1   | 1                      | 0    | 0   |
| 0                     | 1    | 1   | 0                      | 1    | 0   |
| 0                     | 0    | 0   | 0                      | 0    | 0   |

| Инверсия |  |               |
|----------|--|---------------|
| $X$      |  | $Y = \bar{X}$ |
| 1        |  | 0             |
| 0        |  | 1             |

## Свойства переключательных функций.

Функции вида  $Y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется переключательной функцией ПФ.

ПФ могут быть представлена: **аналитически (формулой), таблицей истинности, принципиальной логической схемой.**

### Дополнение.

Если  $q$  переменная, то ее дополнением будет переменная  $\bar{q}$

Если  $Y = (q + p + R)$  функция, то ее дополнением будет функция

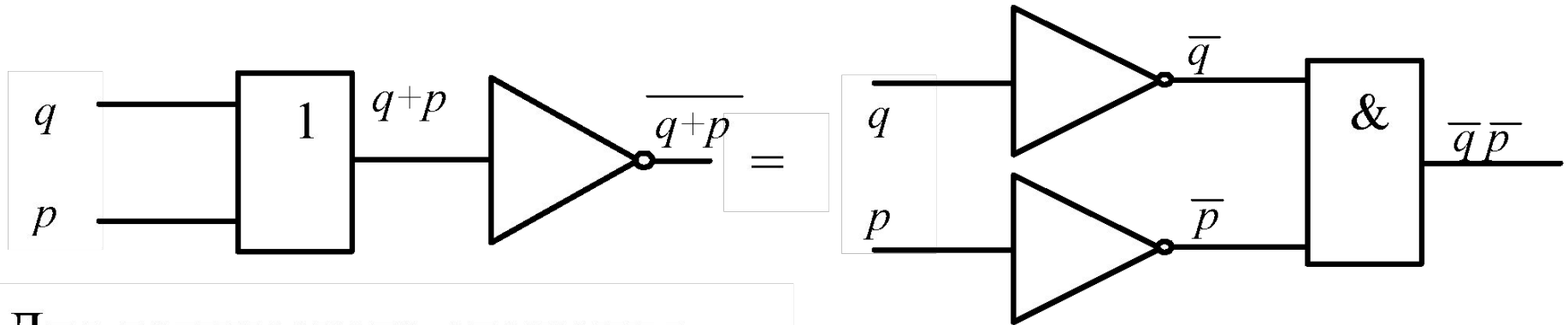
$$\bar{Y} = \overline{(q + p + R)}$$

## Основные законы алгебры логики (АЛ).

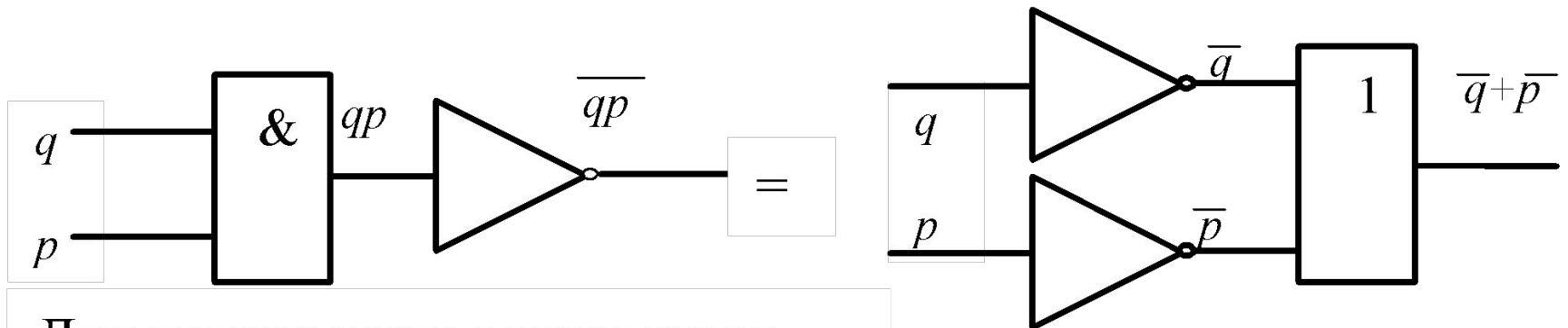
В АЛ есть 4 основных закона, которые устанавливают эквивалентность логических функций и образованных логических связей с помощью простых логических функций **И**, **ИЛИ** **НЕ**.

| Закон                              | Для логического сложения                              | Для логического умножения                             |
|------------------------------------|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| Переместительный (коммутативный)   | $p + q = q + p$                                       | $p \times q = q \times p$                             |
| Сочетательный (ассоциативный)      | $(p+q)+R = p+(q+R)$                                   | $(p \times q) \times R = p \times (q \times R)$       |
| Распределительный (дистрибутивный) | $(p+q) \times R = p \times R + q \times R$            | $q \times p + R = (p+R) \times (q+R)$                 |
| Закон инверсии или Моргана         | $\overline{q + p} = \overline{q} \times \overline{p}$ | $\overline{q \times p} = \overline{q} + \overline{p}$ |

# Закон Моргана представленный логическими схемами



Для логического сложения



Для логического умножения

## Аксиомы для одной логической переменной.

Всегда справедливо для логического:

сложения

$$p + 1 = 1$$

$$p + \bar{p} = 1$$

$$p = p + 0;$$

$$p = p + p + p \dots$$

умножения

$$p \times 0 = 0;$$

$$p \times \bar{p} = 0$$

$$p = p \times 1$$

$$p = p \times p \times p \dots$$

$$p = \bar{\bar{p}}$$

## Теоремы склеивания для 2-х переменных:

$$p \times q + \bar{p} \times q = q;$$

$$(p + q) \times (\bar{p} + q) = q;$$

Доказательство для первой и второй теоремы:

если  $p=1$ , то результат зависит от  $q$ ,

если  $p=0$ , то результат зависит от  $q$



## Теоремы поглощения для-2х переменных:

$$p + p \times q = p;$$

$$p(p + q) = p;$$

$$p + \bar{p} q = p + q;$$

$$p(q + \bar{q}) + \bar{p}q = pq + p\bar{q} + \bar{p}q + pq = p(\overset{=1}{q + \bar{q}}) + q(\overset{=1}{p + \bar{p}}) = p + q$$

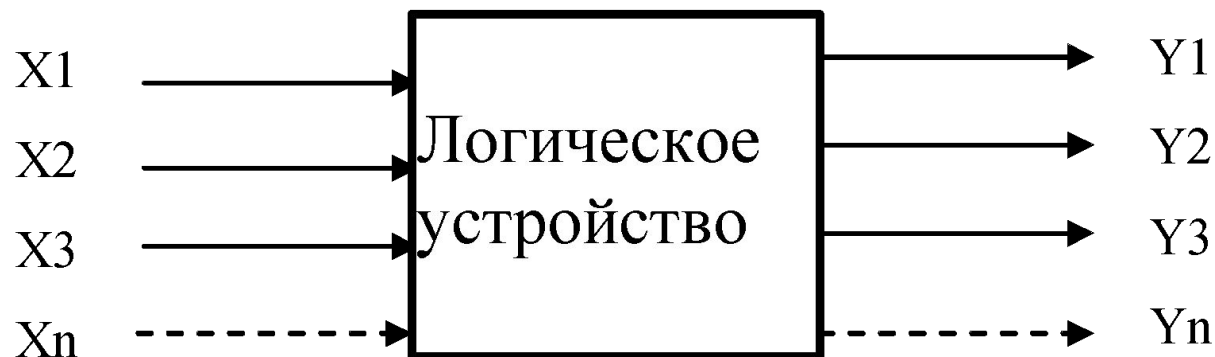
Для трех и более переменных всегда справедливы высказывания:

$$(p + q)(p + r)(q + r) = pq + pr + qr ;$$

$$p + \overline{pq} + \overline{pqr} + \overline{pqrs} \dots = p + q + r + s \dots$$

$$p(\bar{p} + q)(\bar{p} + \bar{q} + r)(\bar{p} + \bar{q} + \bar{r} + s) \dots = pqrs \dots$$

# Проектирование логических устройств



Логическое устройство задается в виде таблиц истинности

| X1 | X2 | X3 | Y1 | Y2 | Y3 |
|----|----|----|----|----|----|
| 0  | 0  | 0  | 1  | 0  | 1  |
| 0  | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  |
| 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 1  |
| 0  | 1  | 1  | 1  | 1  | 0  |
| 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 1  | 0  | 1  | 0  | 1  | 0  |
| 1  | 1  | 0  | 0  | 1  | 1  |
| 1  | 1  | 1  | 0  | 1  | 1  |

$$Y1 = f(x1, x2, x3)$$

$$Y2 = f(x1, x2, x3)$$

$$Y3 = f(x1, x2, x3)$$

# Совершенные нормальные формы представления ЛФ

ЛФ всегда можно представить в виде:

- суммы произведений переменных,
- произведения сумм переменных.

Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ)  $Y=f(x_1, x_2, x_3)$ .

$$\text{пример: } Y = x_1 + x_2 \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3$$

Конъюнктивная нормальная форма (КНФ).

$$\text{пример: } Y = (x_1 + x_2 + x_3) \cdot (\overline{x_3} + x_1) \cdot \overline{x_2} \cdot (x_3 + \overline{x_1} + x_2)$$

Для каждой ЛФ может существовать несколько ДНФ и КНФ

Существует только один вид ДНФ и КНФ, в котором функция может быть записана единственным образом - совершенные нормальные формы СДНФ и СКНФ.

СНФ содержит все переменные (с инверсиями и без них) и нет одинаковых слагаемых для СДНФ и одинаковых произведений для СКНФ

СНДФ и СНКФ записи ЛФ формируются из таблиц истинности.

## СНДФ

| X1 | X2 | X3 | Y |
|----|----|----|---|
| 0  | 0  | 0  | 0 |
| 0  | 0  | 1  | 0 |
| 0  | 1  | 0  | 0 |
| 0  | 1  | 1  | 1 |
| 1  | 0  | 0  | 0 |
| 1  | 0  | 1  | 1 |
| 1  | 1  | 0  | 1 |
| 1  | 1  | 1  | 1 |

$$\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 = 1,$$

$$x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 = 1,$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} = 1,$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 1.$$

Комбинации переменных для которых  $Y=1$  называются конституентами единицы или минтермами.

Сумма минтермов и определяет ее СНДФ:

$$Y = \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3.$$

## СНКФ.

| X1 | X2 | X3 | Y |
|----|----|----|---|
| 0  | 0  | 0  | 0 |
| 0  | 0  | 1  | 0 |
| 0  | 1  | 0  | 0 |
| 0  | 1  | 1  | 1 |
| 1  | 0  | 0  | 0 |
| 1  | 0  | 1  | 1 |
| 1  | 1  | 0  | 1 |
| 1  | 1  | 1  | 1 |

$$x1 + x2 + x3 = 0,$$

$$x1 + x2 + \overline{x3} = 0,$$

$$x1 + \overline{x2} + x3 = 0,$$

$$\overline{x1} + x2 + x3 = 0.$$

Эти суммы называются  
конституентами нуля или  
макстермами.

Произведение макстерм определяет СНКФ.

$$Y = (x1 + x2 + x3) \cdot (x1 + x2 + \overline{x3}) \cdot (x1 + \overline{x2} + x3) \cdot (\overline{x1} + x2 + x3).$$

СНДФ

$$Y = \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3.$$

$$Y = \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 + \color{red}{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + \color{red}{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

$$Y = x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2$$

СНКФ

$$Y = (x_1 + x_2 + x_3) \cdot (x_1 + x_2 + \overline{x_3}) \cdot (x_1 + \overline{x_2} + x_3) \cdot (\overline{x_1} + x_2 + x_3).$$

$$Y = (x_1 + x_2 + x_3) \cdot (x_1 + x_2 + \overline{x_3}) \cdot (x_1 + \overline{x_2} + x_3) \cdot \color{red}{(x_1 + x_2 + x_3)} \cdot$$

$$(\overline{x_1} + x_2 + x_3) \cdot \color{red}{(x_1 + x_2 + x_3)}.$$
 По теореме склеивания  $(p + q)(p + \overline{q}) = p$

$$Y = (x_1 + x_2) \cdot (x_1 + x_3) \cdot (x_2 + x_3).$$

И по теореме склеивания для 3-х переменных:  $(p + q)(p + r)(q + r) = pq + pr + qr$

$$Y = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3$$

$$F = \overline{x_1} \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2 = (\overline{x_1} + x_1)x_2 = x_2$$

$$F = x_1 + x_1 \cdot x_2 + x_3 = x_1 + x_3$$

$$F = x_1 \cdot (\overline{x_1} + x_2) + x_2 \cdot (\overline{x_2} + x_3) + x_3 = x_1 \cdot x_2 + x_3$$

$$F = \overline{x_1 \cdot x_2} + \overline{x_1} \cdot x_3 + x_2 \cdot \overline{x_4} = \overline{x_1} + \overline{x_2} + x_2 \cdot \overline{x_4} = \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_4}$$

$$F = x_1 \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1 \cdot x_2} + \overline{x_3} = x_1 \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3} = \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3} = \overline{x_1 x_2 x_3}$$

Примеры преобразования заданных ЛФ к более простым выражениям используя законы и аксиомы АЛ.

$$F = \overline{x_1} \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot \underbrace{(\overline{x_1} + x_1)} = x_2$$

$$F = x_1 + x_1 \cdot x_2 + x_3 = x_1 \cdot (1 + \cancel{x_2}) + x_3 = x_1 + x_3$$

$$\begin{aligned} F &= x_1 \cdot (\overline{x_1} + x_2) + x_2 \cdot (\overline{x_2} + x_3) + x_3 = \\ &= \cancel{x_1} \cdot \overline{x_1} + x_1 \cdot x_2 + \cancel{x_2} \cdot \overline{x_2} + x_2 \cdot x_3 + x_3 = \\ &= x_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot (\cancel{x_2} + 1) = x_1 \cdot x_2 + x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot x_3 + x_2 \cdot \overline{x_4} = \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot x_3 + x_2 \cdot \overline{x_4} = \\ &= \overline{x_1} \cdot (1 + \cancel{x_3}) + \underbrace{(\overline{x_2} + x_2 \cdot \overline{x_4})}_{\text{Теорема поглощения}} = \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_4} \quad \text{Закон Моргана} \end{aligned}$$

$$F = x_1 \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + \overline{x_3} = x_1 \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3} = \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3} = \overline{x_1 x_2 x_3}$$

Закон Моргана



## Карты «Карно»

При большем числе переменных используют специальные методы преобразования. К таким методам относятся карты Карно.

КК для 2-х переменных

|                  | $X_1$                | $\overline{X_1}$                |
|------------------|----------------------|---------------------------------|
| $X_2$            | $X_1 X_2$            | $\overline{X_1} X_2$            |
| $\overline{X_2}$ | $X_1 \overline{X_2}$ | $\overline{X_1} \overline{X_2}$ |

| $X_1$ | $X_2$ | $Y$ |
|-------|-------|-----|
| 0     | 0     | 0   |
| 0     | 1     | 1   |
| 1     | 0     | 1   |
| 1     | 1     | 0   |

|                  | $X_1$ | $\overline{X_1}$ |
|------------------|-------|------------------|
| $X_2$            | 0     | 1                |
| $\overline{X_2}$ | 1     | 0                |

Карту Карно заполняют минтермами

Для 3-х переменных

|                  | $x_1$                    | $x_1$                               | $\overline{x_1}$                               | $\overline{x_1}$                    |
|------------------|--------------------------|-------------------------------------|------------------------------------------------|-------------------------------------|
| $x_2$            | $x_1 x_2 x_3$            | $x_1 x_2 \overline{x_3}$            | $\overline{x_1} x_2 \overline{x_3}$            | $\overline{x_1} x_2 x_3$            |
| $\overline{x_2}$ | $x_1 \overline{x_2} x_3$ | $x_1 \overline{x_2} \overline{x_3}$ | $\overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3}$ | $\overline{x_1} \overline{x_2} x_3$ |
|                  | $x_3$                    | $\overline{x_3}$                    | $\overline{x_3}$                               | $x_3$                               |

Правило для составления КК.

Соседние ячейки могут отличаться только на один элемент, который является его дополнением.

Для 4-х переменных

|                  | $X_1$                                                 | $X_1$                                                 | $\overline{X_1}$                                                            | $\overline{X_1}$                                   |                  |
|------------------|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|------------------|
| $X_2$            | $X_1 X_2 X_3 X_4$                                     | $X_1 X_2 \overline{X_3} X_4$                          | $\overline{X_1} X_2 \overline{X_3} X_4$                                     | $\overline{X_1} X_2 X_3 X_4$                       | $X_4$            |
| $X_2$            | $X_1 \overline{X_2} X_3 \overline{X_4}$               | $X_1 \textcircled{X_2} \overline{X_3} \overline{X_4}$ | $\overline{X_1} \overline{X_2} \overline{X_3} \overline{X_4}$               | $\overline{X_1} X_2 X_3 \overline{X_4}$            | $\overline{X_4}$ |
| $\overline{X_2}$ | $X_1 \overline{X_2} \textcircled{X_3} \overline{X_4}$ | $X_1 \overline{X_2} \overline{X_3} \overline{X_4}$    | $\textcircled{\overline{X_1}} \overline{X_2} \overline{X_3} \overline{X_4}$ | $\overline{X_1} \overline{X_2} X_3 \overline{X_4}$ | $\overline{X_4}$ |
| $\overline{X_2}$ | $X_1 \overline{X_2} X_3 X_4$                          | $X_1 \overline{X_2} \overline{X_3} \textcircled{X_4}$ | $\overline{X_1} \overline{X_2} \overline{X_3} X_4$                          | $\overline{X_1} \overline{X_2} X_3 X_4$            | $X_4$            |
|                  | $X_3$                                                 | $\overline{X_3}$                                      | $\overline{X_3}$                                                            | $X_3$                                              |                  |

Соседними называют клетки - справа, слева, сверху, снизу.

Если минтермы расположены в соседних клетках, то говорят, что они «склеиваются».

Правила группирования:

- Карта Карно не имеет границ. Крайние верхние и нижние, правые и левые - соседние.
- Группирование (объединение) производят по 2, 4, 8 и более соседних клеток.
- Сколько объединений (групп) столько и слагаемых будет в упрощенной форме функции.
- Одна клетка может входить в несколько групп.
- Каждое слагаемое упрощенной функции включает только произведения переменных, которые входят во все клетки объединения.

Пример.

| X1 | X2 | X3 | Y | Минтерм                                                 |
|----|----|----|---|---------------------------------------------------------|
| 0  | 0  | 0  | 1 | $\overline{X1} \cdot \overline{X2} \cdot \overline{X3}$ |
| 0  | 0  | 1  | 1 | $\overline{X1} \cdot \overline{X2} \cdot X3$            |
| 0  | 1  | 0  | 1 | $\overline{X1} \cdot X2 \cdot \overline{X3}$            |
| 0  | 1  | 1  | 0 |                                                         |
| 1  | 0  | 0  | 0 |                                                         |
| 1  | 0  | 1  | 1 | $X1 \cdot \overline{X2} \cdot X3$                       |
| 1  | 1  | 0  | 0 |                                                         |
| 1  | 1  | 1  | 1 | $X1 \cdot X2 \cdot X3$                                  |

|                 | $\overline{X1}X2$ | $\overline{X1}\overline{X2}$ | $X1\overline{X2}$ | $X1X2$ |
|-----------------|-------------------|------------------------------|-------------------|--------|
| $\overline{X3}$ | y3                | y1                           |                   |        |
| $X3$            |                   | y2                           | y4                | y5     |

$$\begin{aligned}
 X &= \overline{X1} \cdot \overline{X2} \cdot \overline{X3} + \overline{X1} \cdot \overline{X2} \cdot X3 + \overline{X1} \cdot X2 \cdot \overline{X3} + \overline{X1} \cdot X2 \cdot X3 + X1 \cdot \overline{X2} \cdot X3 + X1 \cdot X2 \cdot X3 \\
 &\quad \text{y1} \quad \text{y2} \quad \text{y3} \quad \text{y4} \quad \text{y5} \\
 X &= \overline{X1} \cdot \overline{X3} + \overline{X1} \cdot \overline{X2} + \overline{X1} \cdot X3 + X1 \cdot X2 \cdot X3
 \end{aligned}$$

Такой же результат получается, если воспользоваться логическими преобразованиями с помощью аксиом и законов АЛ.

[illegible]

$$X \Rightarrow X \quad K \quad 2 \quad B + X \quad K \quad 2 \quad B + X \quad K \quad 2 \quad 3 + \overline{X_1 X_2 X_3} + X \quad 1 \quad 2 X_3$$

$$X \Rightarrow \overline{X} \quad \overline{1X2}(\overline{X} + \overline{X}) \Rightarrow \overline{1X3}(\overline{X} + \overline{X}) \Rightarrow \overline{1X3}(\overline{X} + \overline{2})$$

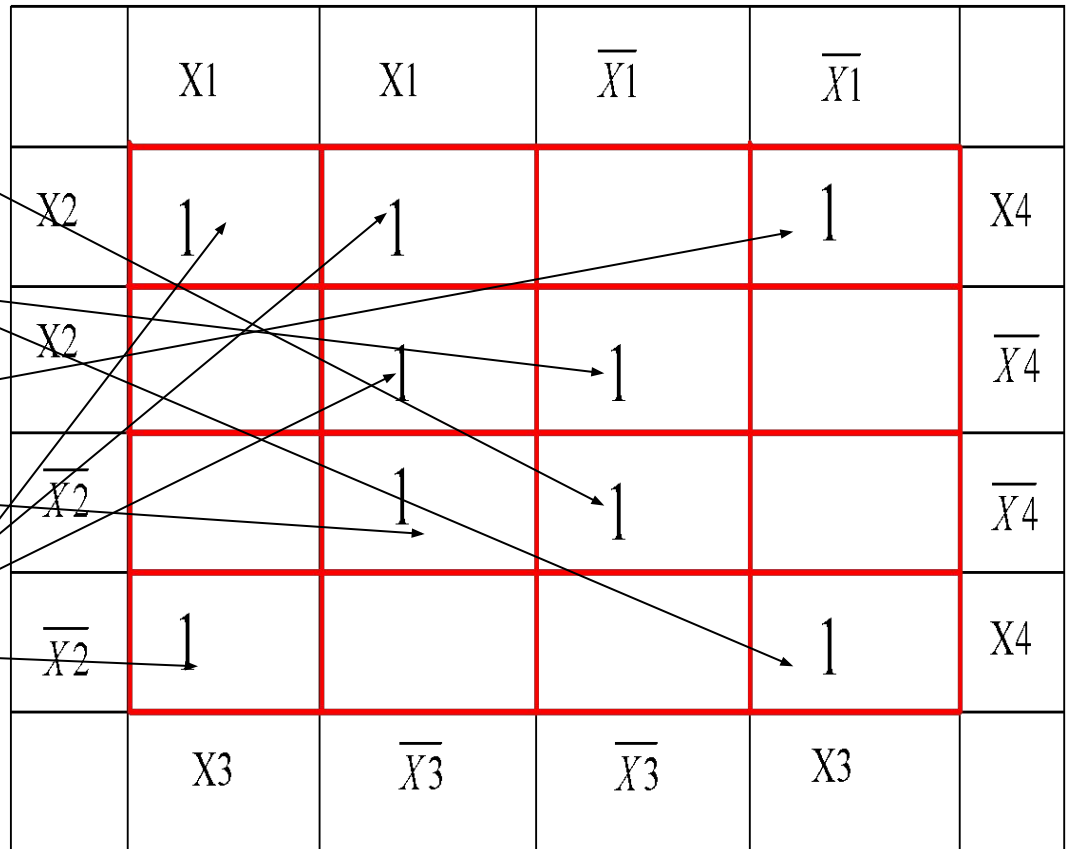
$$\overline{X \Rightarrow 1} \quad \overline{X \not\vdash 1} \quad \overline{X \vdash 1} \quad 3$$

| X1 | X2 | X3 | Y | Минтерм                                                 |
|----|----|----|---|---------------------------------------------------------|
| 0  | 0  | 0  | 1 | $\overline{X1} \cdot \overline{X2} \cdot \overline{X3}$ |
| 0  | 0  | 1  | 1 | $\overline{X1} \cdot \overline{X2} \cdot X3$            |
| 0  | 1  | 0  | 1 | $\overline{X1} \cdot X2 \cdot \overline{X3}$            |
| 0  | 1  | 1  | 0 |                                                         |
| 1  | 0  | 0  | 0 |                                                         |
| 1  | 0  | 1  | 1 | $X1 \cdot \overline{X2} \cdot X3$                       |
| 1  | 1  | 0  | 0 |                                                         |
| 1  | 1  | 1  | 1 | $X1 \cdot X2 \cdot X3$                                  |

|                 | $\overline{X1}X2$ | $\overline{X1}\overline{X2}$ | $X1\overline{X2}$ | $X1X2$ |
|-----------------|-------------------|------------------------------|-------------------|--------|
| $\overline{X3}$ | y3                | y1                           |                   |        |
| $X3$            |                   | y2                           | y4                | y5     |

$$\begin{aligned}
 X &= \underbrace{\overline{X1} \cdot \overline{X2} \cdot \overline{X3}}_{y1} + \underbrace{\overline{X1} \cdot \overline{X2} \cdot X3}_{y2} + \underbrace{\overline{X1} \cdot X2 \cdot \overline{X3}}_{y3} + \underbrace{X1 \cdot \overline{X2} \cdot X3}_{y4} + \underbrace{X1 \cdot X2 \cdot X3}_{y5} \\
 X &= \overline{X1} \cdot \overline{X3} + \overline{X1} \cdot \overline{X2} + X1 \cdot X3
 \end{aligned}$$

| X1 | X2 | X3 | X4 | Y |
|----|----|----|----|---|
| 0  | 0  | 0  | 0  | 1 |
| 0  | 0  | 0  | 1  | 0 |
| 0  | 0  | 1  | 0  | 0 |
| 0  | 0  | 1  | 1  | 1 |
| 0  | 1  | 0  | 0  | 1 |
| 0  | 1  | 0  | 1  | 0 |
| 0  | 1  | 1  | 0  | 0 |
| 0  | 1  | 1  | 1  | 1 |
| 1  | 0  | 0  | 0  | 1 |
| 1  | 0  | 0  | 1  | 0 |
| 1  | 0  | 1  | 0  | 0 |
| 1  | 0  | 1  | 1  | 1 |
| 1  | 1  | 0  | 0  | 1 |
| 1  | 1  | 0  | 1  | 1 |
| 1  | 1  | 1  | 0  | 0 |
| 1  | 1  | 1  | 1  | 1 |



$$Y = \overline{X1}\overline{X2}\overline{X3}\overline{X4} + \overline{X1}\overline{X2}X3X4 + \overline{X1}X2\overline{X3}\overline{X4} + \overline{X1}X2X3X4 + X1\overline{X2}\overline{X3}\overline{X4} + X1\overline{X2}X3X4 + X1X2\overline{X3}\overline{X4} + X1X2X3X4$$



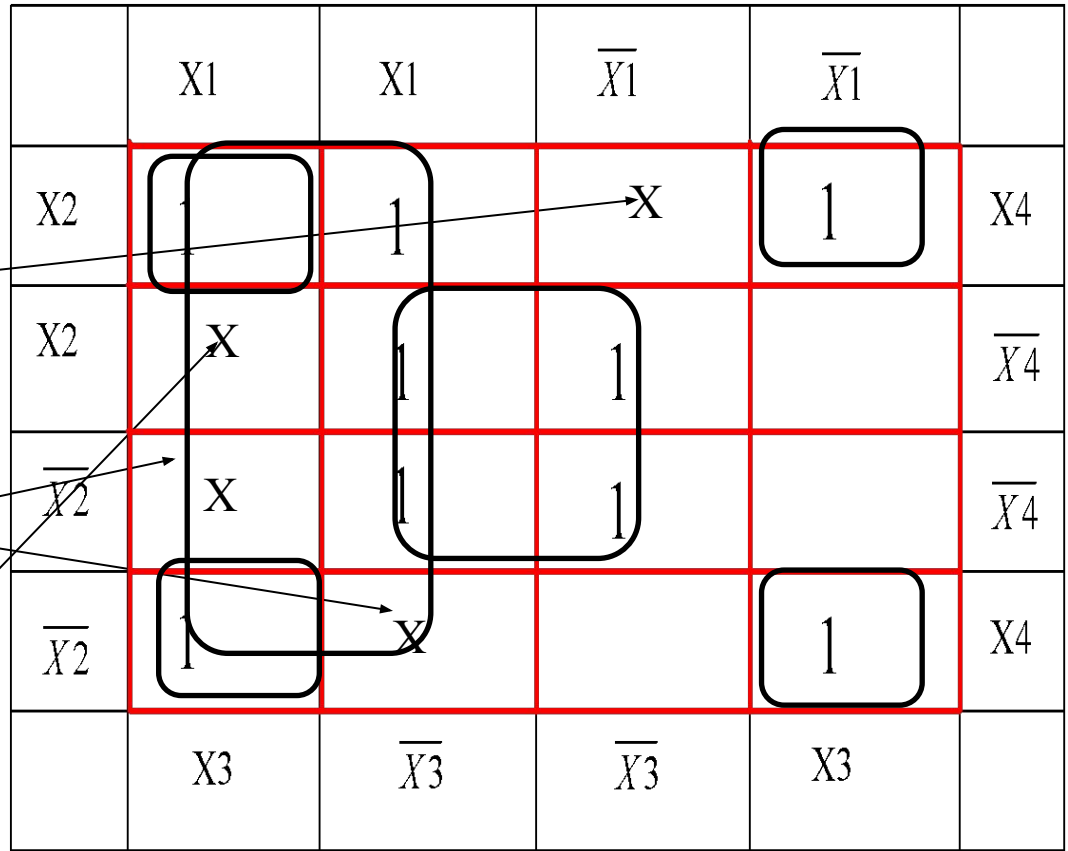
| X1 | X2 | X3 | X4 | Y |
|----|----|----|----|---|
| 0  | 0  | 0  | 0  | 1 |
| 0  | 0  | 0  | 1  | 0 |
| 0  | 0  | 1  | 0  | 0 |
| 0  | 0  | 1  | 1  | 1 |
| 0  | 1  | 0  | 0  | 1 |
| 0  | 1  | 0  | 1  | 0 |
| 0  | 1  | 1  | 0  | 0 |
| 0  | 1  | 1  | 1  | 1 |
| 1  | 0  | 0  | 0  | 1 |
| 1  | 0  | 0  | 1  | 0 |
| 1  | 0  | 1  | 0  | 0 |
| 1  | 0  | 1  | 1  | 1 |
| 1  | 1  | 0  | 0  | 1 |
| 1  | 1  | 0  | 1  | 1 |
| 1  | 1  | 1  | 0  | 0 |
| 1  | 1  | 1  | 1  | 1 |

|                 |    |                 |                 |                 |                 |
|-----------------|----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
|                 | X1 | X1              | $\overline{X1}$ | $\overline{X1}$ |                 |
| X2              | 1  | 1               |                 | 1               | X4              |
| X2              |    | 1               | 1               |                 | $\overline{X4}$ |
| $\overline{X2}$ |    | 1               | 1               |                 | $\overline{X4}$ |
| $\overline{X2}$ | 1  |                 |                 | 1               | X4              |
|                 | X3 | $\overline{X3}$ | $\overline{X3}$ | X3              |                 |

$$Y = \overline{X3} \overline{X4} + X3X4 + X1X2\overline{X3}$$

$$Y = \overline{X1}\overline{X2}\overline{X3}\overline{X4} + \overline{X1}\overline{X2}X3X4 + \overline{X1}X2\overline{X3}\overline{X4} + \overline{X1}X2X3X4 + X1\overline{X2}\overline{X3}\overline{X4} + X1\overline{X2}X3X4 + X1X2\overline{X3}\overline{X4} + X1X2X3X4$$

|    | X1 | X2 | X3 | X4 | Y |
|----|----|----|----|----|---|
| 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1 |
| 1  | 0  | 0  | 0  | 1  | 0 |
| 2  | 0  | 0  | 1  | 0  | 0 |
| 3  | 0  | 0  | 1  | 1  | 1 |
| 4  | 0  | 1  | 0  | 0  | 1 |
| 5  | 1  | 1  | 1  | 1  | X |
| 6  | 0  | 1  | 1  | 0  | 0 |
| 7  | 0  | 1  | 1  | 1  | 1 |
| 8  | 1  | 0  | 0  | 0  | 1 |
| 9  | 1  | 1  | 1  | 1  | X |
| 10 | 1  | 1  | 1  | 0  | X |
| 11 | 1  | 0  | 1  | 1  | 1 |
| 12 | 1  | 1  | 0  | 0  | 1 |
| 13 | 1  | 1  | 0  | 1  | 1 |
| 14 | 1  | 1  | 1  | 1  | X |
| 15 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1 |



$$Y = X1 + \overline{X3} \overline{X4} + X3X4$$

Для 5 переменных

X5

$$\overline{X5}$$

Two empty 4x4 grids are provided for multiplication. Each grid has a curly brace above it, indicating it represents 4 groups of 4.

Для 6 переменных

X5

$$\overline{X5}$$

X6

$$\overline{X6}$$

## Функциональные логические схемы

ЛФ (переключательную) можно составить из И, ИЛИ, НЕ

Пример. Рассмотрим ЛФ «исключающая ИЛИ» (операция сложения по модулю два, неравнозначность).

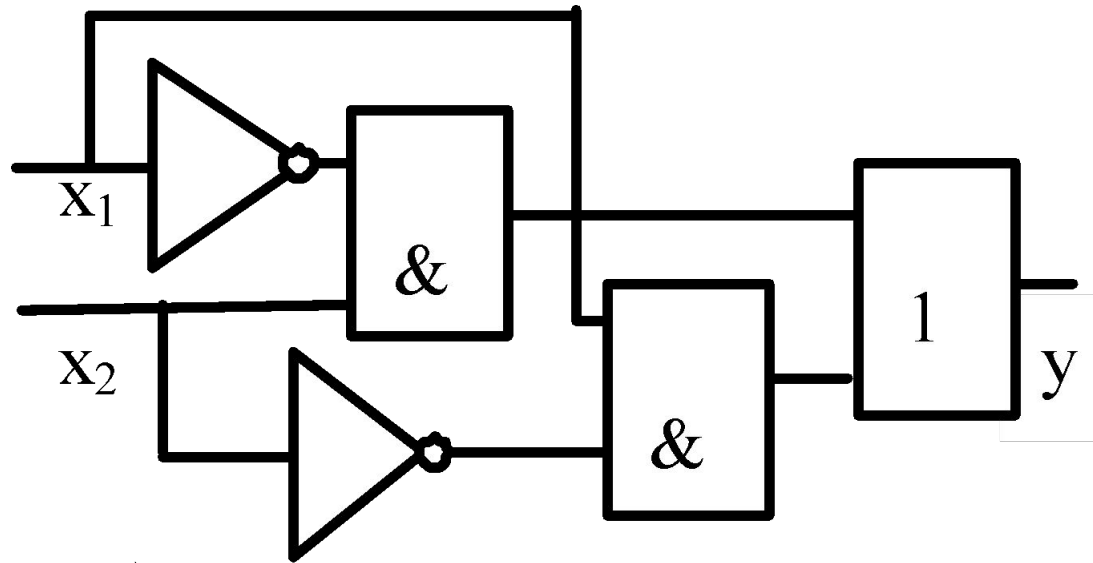
| $x_1$ | $x_2$ | $y$ |
|-------|-------|-----|
| 0     | 0     | 0   |
| 1     | 0     | 1   |
| 0     | 1     | 1   |
| 1     | 1     | 0   |

$$\begin{aligned} Y = x_1 \oplus x_2 &= \overline{x_1}x_2 + x_1\overline{x_2} + \overline{x_1}x_1 + x_2\overline{x_2} \\ &= \overline{x_1}(x_2 + x_1) + \overline{x_2}(x_2 + x_1) \end{aligned}$$

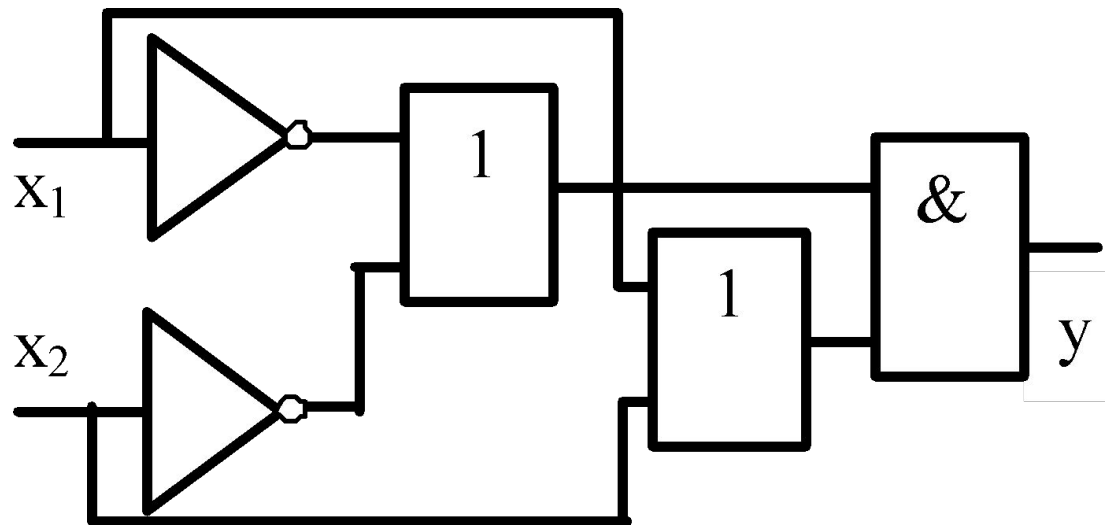
$$Y = x_1 \oplus x_2 = (x_1 + x_2)(\overline{x_1} + \overline{x_2})$$

$$Y = x_1 \oplus x_2 = (x_1 + x_2)\overline{x_1x_2}$$

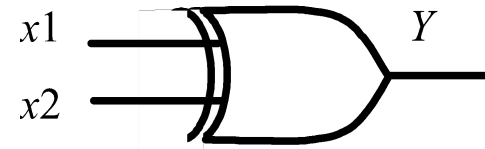
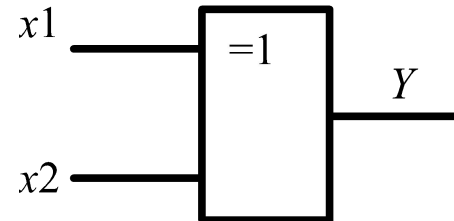
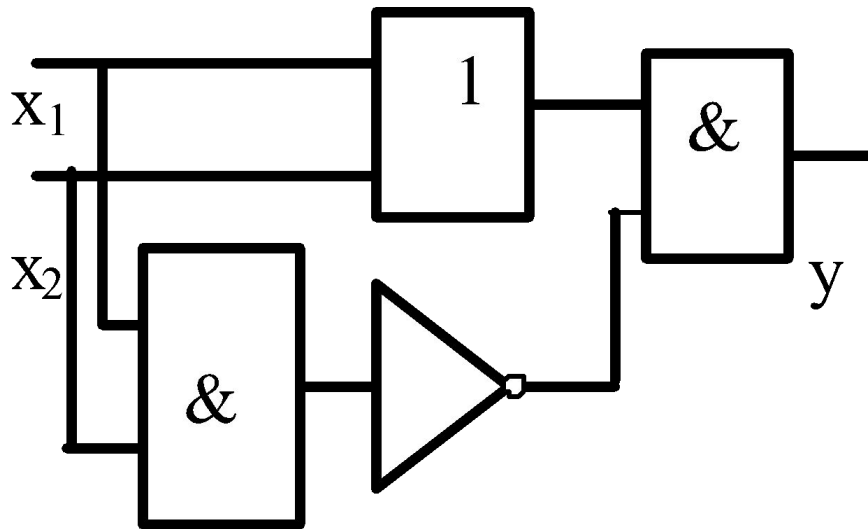
$$x_1 \oplus x_2 = \overline{x_1}x_2 + x_1\overline{x_2}$$



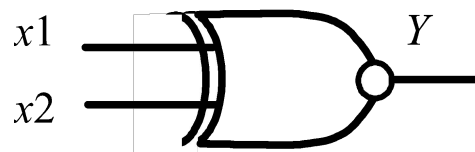
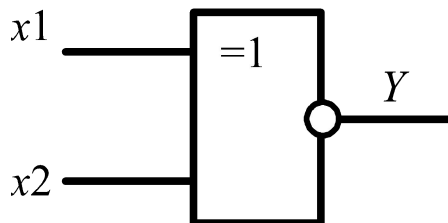
$$x_1 \oplus x_2 = (x_1 + x_2)(\overline{x_1} + \overline{x_2})$$



$$x_1 \oplus x_2 = (x_1 + x_2) \overline{x_1 x_2}$$

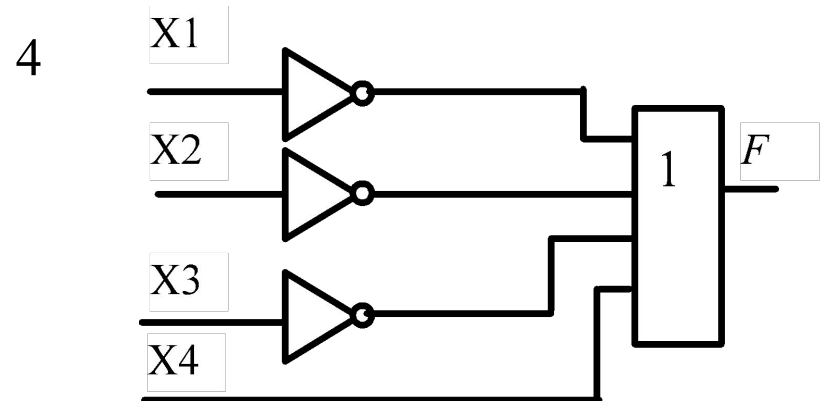
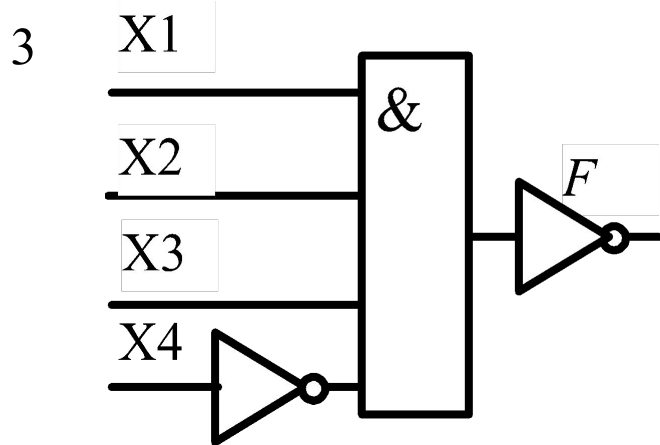
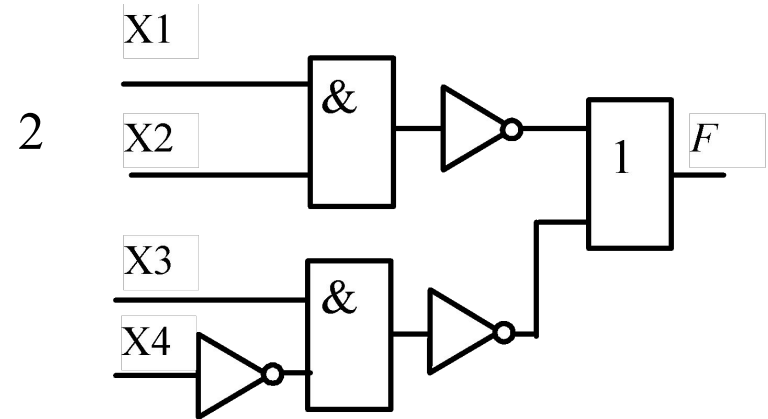
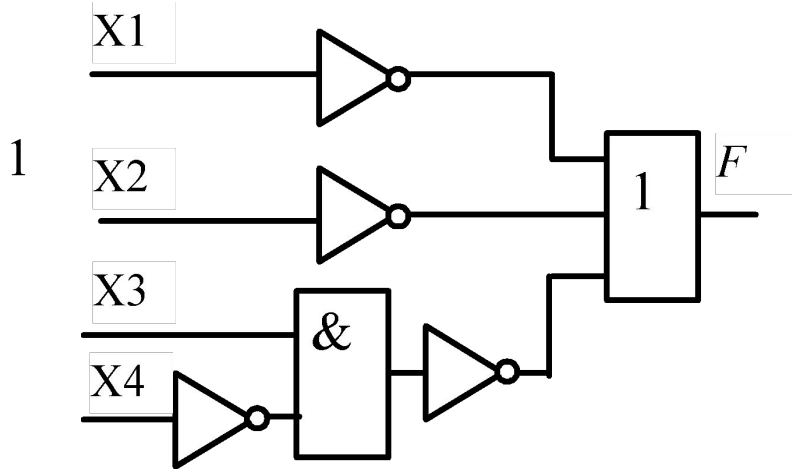


$$\overline{Y} = \overline{x_1 \oplus x_2} = \overline{(x_1 + x_2) \overline{x_1 x_2}} = \overline{x_1 x_2} + x_1 x_2$$



$$F = \overline{x1} + \overline{x2} + \overline{\overline{x4} \cdot x3} = \overline{x1x2} + \overline{\overline{x4} \cdot x3} = \overline{x1x2x3x4} = \overline{x1} + \overline{x2} + \overline{x3} + x4$$

1
2
3
4



## Принцип двойственности

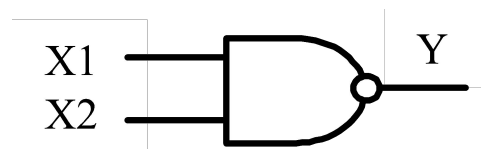
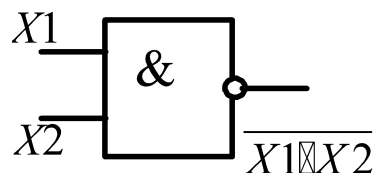
Закон Моргана (инверсии):

$$\overline{q + p} = \bar{q} \times \bar{p}$$

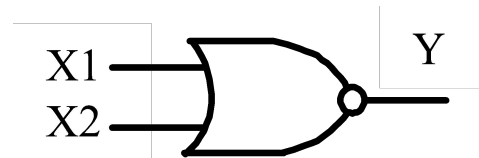
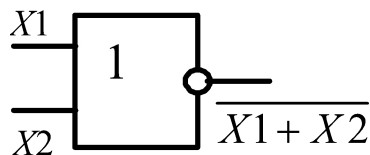
$$\overline{q \times p} = \bar{q} + \bar{p}$$

Совмещение в логическом элементе (ЛЭ) двух логических операций достаточно для универсального ЛЭ:

Элемент Шеффера или «штрих Шеффера» - **И-НЕ**,



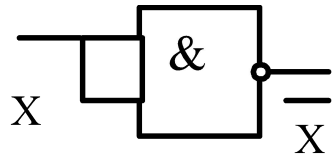
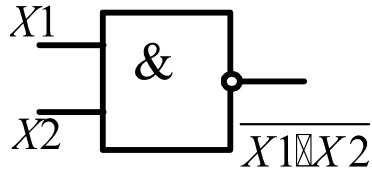
Элемент Пирса или «стрелка Пирса» - **ИЛИ-НЕ**.



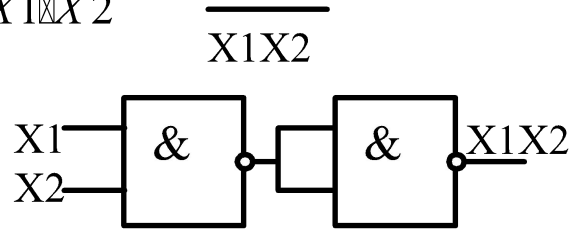


Функционально полная система содержит только «И, НЕ» или «ИЛИ, НЕ».

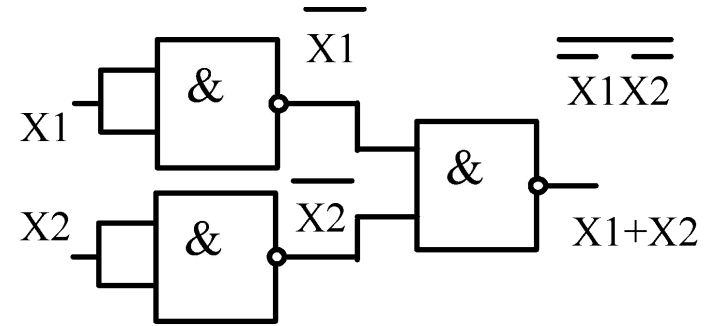
**И-НЕ**



**НЕ**

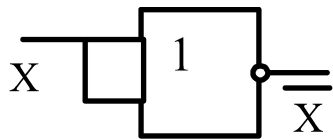
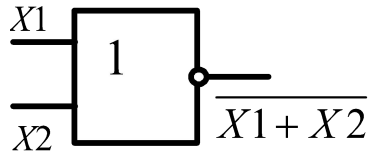


**И**

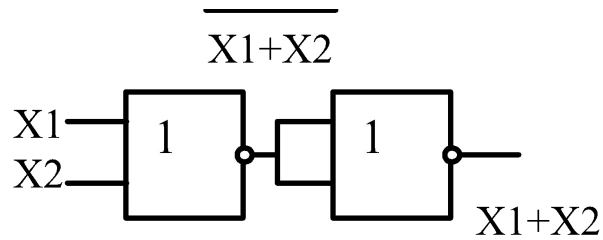


**ИЛИ**

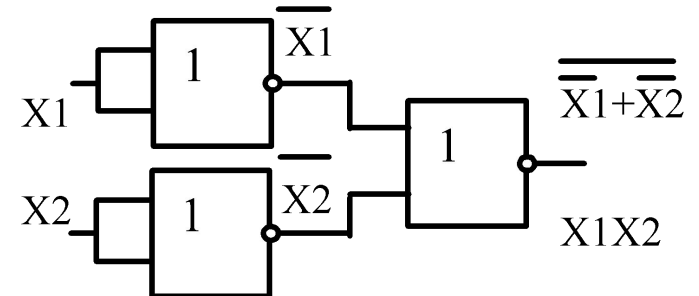
**ИЛИ-НЕ**



**НЕ**



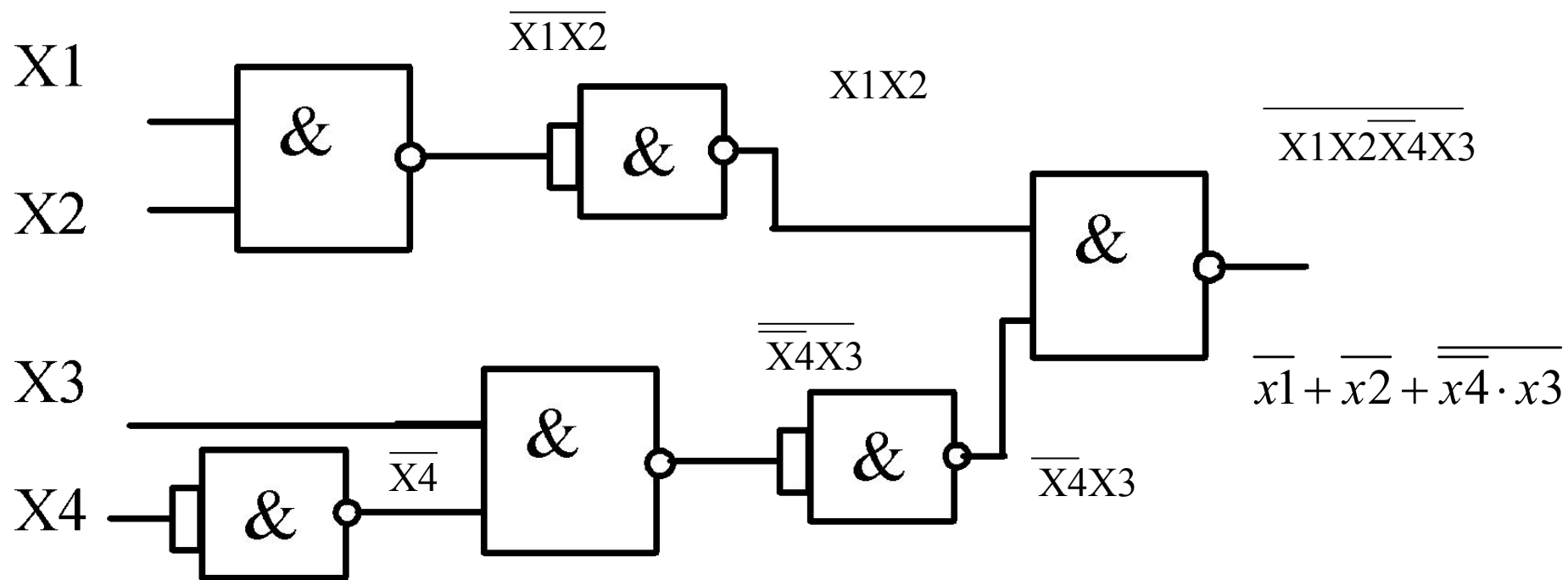
**ИЛИ**



**И**

Составить функциональную схему с помощью элементов Шефера и Пирса

$$F = \overline{X1} + \overline{X2} + \overline{\overline{X4} \cdot X3}$$



$$F = \overline{X1} + \overline{X2} + \overline{\overline{X4} \cdot X3}$$

На двухвходовых Пирса

