Принцип Дирихле

Дирихле Петер Август Лежён (1805-1859) — немецкий математик, иностранный член-корреспондент Петербургской Академии наук (1837), член многих других академий.

Дирихле родился в вестфальском городе Дюрене в семье почтмейстера. В 12 лет Дирихле начал учиться в гимназии в Бонне, спустя два года в иезуитской гимназии в Кёльне, где в числе прочих преподавателей его учил Георг Ом. С 1822 по 1827 г. жил в качестве домашнего учителя в Париже, где вращался в кругу Фурье.В 1827г. устраивается на должность приватдоцента университета Бреслау. В 1829 г. он перебирается в Берлин, где проработал непрерывно 26 лет, сначала как доцент. Затем с 1831 г. как экстраординарный профессор. С 1839 г. как ординарный профессор Берлинского университета. В 1855 г. Дирихле становится в качестве преемника Гаусса профессором высшей математики в Гёттингенском университете.

В комбинаторике при́нцип Дирихле́— утверждение, устанавливающее связь между объектами («*кроликами*») и контейнерами («клетками») при выполнении определённых условий. В английском и некоторых других языках утверждение известно как «принцип голубей и ящиков», когда объектами являются голуби, а контейнерами — ящики.

9 клеток содержат **7** голубей,
по принципу
Дирихле хотя бы
9-7=**2** клетки свободны

9 клеток содержат **10** голубей,
по принципу Дирихле хотя бы
в одной клетке находятся
более одного голубя

Формулировки

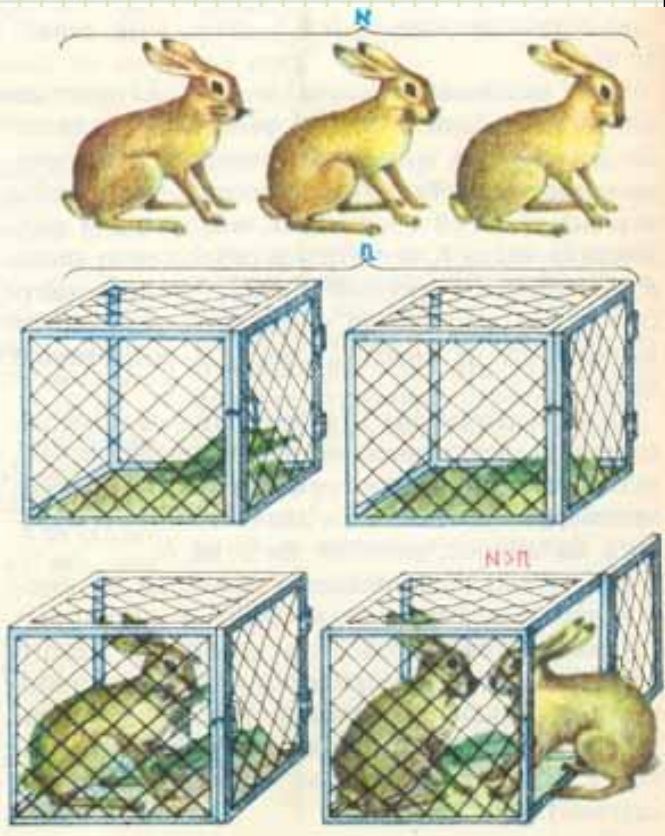
Наиболее распространена следующая формулировка этого принципа:

- Если кролики рассажены в клетки, причём число кроликов больше числа клеток, то хотя бы в одной из клеток находится более одного кролика.

Более общая формулировка звучит так:

- Если *m* кроликов рассажены в *n* клеток, то хотя бы в одной клетке находится не менее m/n кроликов, а также хотя бы в одной клетке находится не более m/n кроликов.

→



Рассмотрим примеры различных задач, решаемых с помощью принципа Дирихле.

1. В классе 15 учеников. Докажите, что найдутся как минимум 2 ученика, отмечающих дни рождения в один месяц.

РЕШЕНИЕ:

Пусть 15 учеников будут «зайцы». Тогда «клетками» будут месяцы года, их 12. Так как 15 > 12, то, по принципу Дирихле, найдется, как минимум, одна клетка, в которой будет сидеть, по крайней мере, 2 «зайца». То есть, найдется месяц, в котором будут отмечать дни рождения не менее 2 учеников класса.

Дано 12 целых чисел. Докажите, что из них можно выбрать 2, разность которых делится на 11.

РЕШЕНИЕ

Примем числа за «зайцев». Так как их 12, то «клеток» должно быть меньше. Пусть «клетки» —это остатки от деления целого числа на 11. Всего «клеток» будет 11: О, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10. Тогда, по принципу Дирихле, найдется «клетка», в которой будут сидеть не менее чем 2 «зайца», то есть найдутся 2 целых числа с одним остатком. А разность двух чисел с одинаковым остатком от деления на 11, будет делиться на 11

В ковре размером 3х3 метра Коля проделал 8 дырок. Докажите, что из него можно вырезать коврик размером 1х1 метр, не содержащий внутри себя дырок.

(Дырки можно считать точечными.)

РЕШЕНИЕ

Здесь дырки будут «зайцами». Разрежем ковер на 9 ковриков размерами 1х1 метр. Так как ковриков-«клеток» — 9, а дырок-«зайцев» — 8, то найдется хотя бы одна «клетка», в которой не будет «зайцев», то есть найдется коврик без дырок внутри.

Таким образом, применяя данный метод, надо:

- **Определить, что удобно в задаче принять за «клетки», а что за «зайцев».**
- **Получить «клетки»; чаще всего «клеток» меньше (больше), чем «зайцев» на одну (или более).**
- **Выбрать для решения требуемую формулировку принципа Дирихле.**

Принцип Дирихле важен, интересен, полезен. Его можно применять в повседневной жизни, что развивает логическое мышление.

Многие олимпиадные задачи решаются, используя это специальный метод. Он дает возможность обобщать.