

Теория Автоматического Управления Часть 3

Полулях Антон Иванович, к.т.
н., доцент кафедры АД, зам.
начальника отдела
проектирования систем
автоматического управления

3. Модели линейных объектов

- **3.9. Логарифмические частотные характеристики**
- Частотные характеристики достаточно сложно строить вручную.
- В 60-е годы, когда развивалась классическая теория управления, не было мощных компьютеров, поэтому наибольшую популярность приобрели приближенные методы, с помощью которых можно было проектировать регуляторы с помощью ручных вычислений и построений.
- Один из таких подходов основан на использовании **логарифмических частотных характеристик**.

3. Модели линейных объектов

- Вместо $A(\omega)$ было предложено использовать *логарифмическую амплитудную частотную характеристику (ЛАЧХ)*: график, на котором по оси абсцисс откладывается десятичный логарифм частоты ($\lg(\omega)$), а по оси ординат – величина $L_m(\omega) = 20 \lg A(\omega)$, измеряемая в децибелах (дБ).
- При построении логарифмической фазовой частотной характеристики (ЛФЧХ) по оси абсцисс также откладывается логарифм частоты $\lg(\omega)$.

3. Модели линейных объектов

- Децибелы - это десять умножить на десятичный логарифм отношения мощностей сигналов (или 20 на логарифм отношения амплитуд, что то же самое) . Если один сигнал в 100 раз мощнее другого, то говорят, что его уровень выше на 20 децибел. Если в 1000 раз - то на 30 децибел, и т. д.
- Почему логарифм? Так оказывается удобнее, когда имеем дело с очень большим диапазоном мощностей. Например, самый громкий звук мощнее самого тихого слышимого звука в 10^{12} (миллион миллионов) раз, а в децибелах это будет всего 120 дБ.
Когда просто говорят, что уровень шума (или звука) столько-то децибел, имеется в виду - по отношению к порогу слышимости, который составляет 20 микропаскалей.

3. Модели линейных объектов

- Единицей отсчета на логарифмической оси частот является *декада* – диапазон, на котором частота увеличивается в 10 раз (а значение ее логарифма увеличивается на единицу).
- Вместе ЛАЧХ и ЛФЧХ называются логарифмической амплитудно-фазовой частотной характеристикой (ЛАФЧХ) или *диаграммой Бode*.
- Логарифмические характеристики обладают двумя ценными свойствами: 1) ЛАЧХ и ЛФЧХ для произведения $W_1(s)W_2(s)$ вычисляются как суммы ЛАЧХ и ЛФЧХ отдельных звеньев:

$$20\lg A(\omega) = 20\lg A_1(\omega) + 20\lg A_2(\omega); \quad (37)$$

$$\phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega); \quad (38)$$

3. Модели линейных объектов

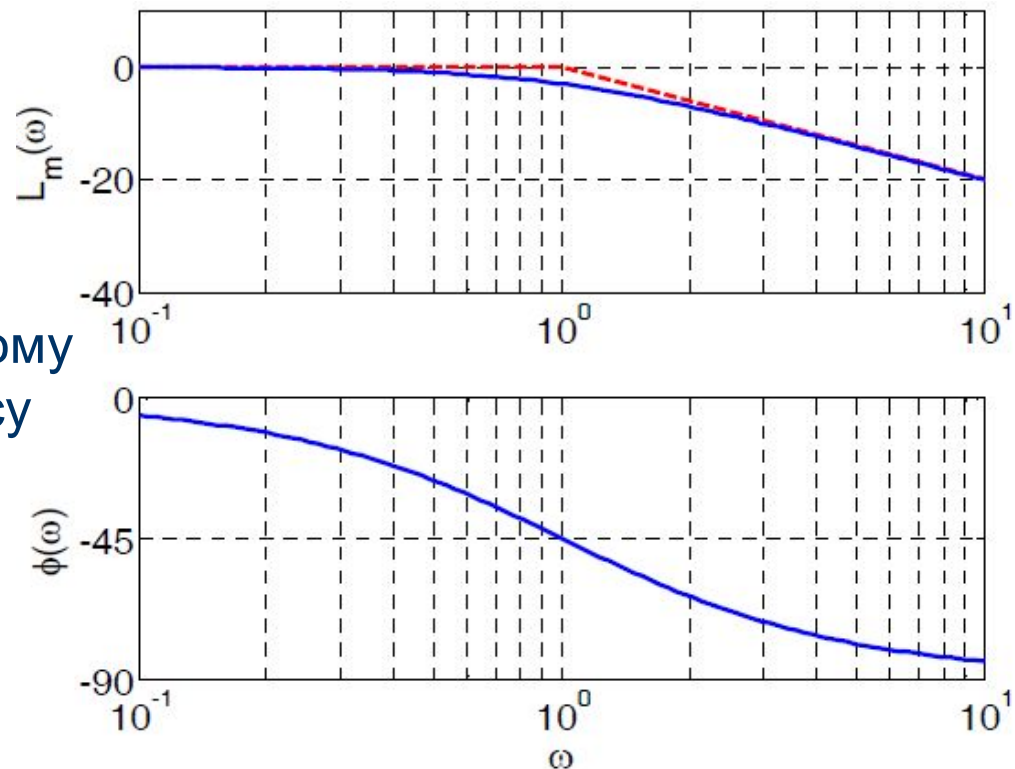
- 2) в области высоких и низких частот ЛАЧХ асимптотически приближаются к прямым, наклон которых составляет ± 20 дБ/дек (децибел на декаду), ± 40 дБ/дек и т.д.
- В классической теории управления хорошо разработаны методы анализа и синтеза систем на основе *асимптотических ЛАЧХ*, которые представляют собой ломаные линии и легко строятся вручную.
- С появлением компьютерных средств расчета практическая ценность ЛАФЧХ несколько снизилась, однако они по сей день остаются простейшим инструментом прикидочных расчетов для инженера.

3. Модели линейных объектов

- На рисунке показаны точная (сплошная синяя линия) и асимптотическая (штриховая красная линия) ЛАФЧХ для звена первого порядка с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{1}{Ts + 1} \text{ при } T = 1 \text{ с.}$$

- Первая асимптота, определяющая поведение ЛАЧХ на низких частотах, имеет нулевой наклон, потому что звено относится к классу *позиционных* звеньев, имеющих постоянный ненулевой статический коэффициент усиления, то есть $W(0) = 1 \neq 0$.



3. Модели линейных объектов

- Если $W(0) = 0$, передаточная функция содержит множитель s^k ($k > 0$), который соответствует производной порядка k . В этом случае наклон ЛАЧХ на низких частотах равен $k \cdot 20$ дБ/дек.
- Если $W(0) = \infty$, звено содержит один или несколько *интеграторов*, то есть в знаменателе есть сомножитель s^k . Тогда наклон ЛАЧХ на низких частотах равен $-k \cdot 20$ дБ/дек.
- Наклон ЛАЧХ на **высоких частотах** определяется разностью степеней числителя и знаменателя передаточной функции. Если числитель имеет степень m , а знаменатель – степень n , то наклон последней асимптоты равен $20 \cdot (m - n)$ дБ/дек. В нашем примере $m - n = 0 - 1 = -1$.
- Поэтому вторая асимптота, определяющая свойства звена на высоких частотах, имеет наклон -20 дБ/дек, то есть, за одну декаду значение уменьшается на 20 дБ (проверьте по графику!).

4. Типовые динамические звенья

- Обычно система управления состоит из отдельных блоков, каждый из которых описывается уравнениями низкого порядка (чаще всего – первого или второго).
- Для понимания работы системы в целом желательно хорошо представлять, как ведут себя ее отдельные элементы. Кроме того, при построении ЛАФЧХ сложной системы передаточную функцию разбивают на простейшие сомножители

$$W(s) = W_1(s) \cdot W_2(s) \dots \cdot W_N(s)$$

- и далее, воспользовавшись свойствами ЛАФЧХ, строят характеристики для всей системы как суммы ЛАЧХ и ЛФЧХ отдельных звеньев.

4. Типовые динамические звенья

• 4.1. Усилитель

- Звенья, имеющие конечный ненулевой коэффициент усиления постоянного сигнала, то есть $W(0) = k \neq 0$, называются *позиционными*. Это значит, что числитель и знаменатель передаточной функции имеют ненулевые свободные члены (постоянные слагаемые).
- Простейшее позиционное звено – идеальный (безынерционный) **усилитель**. Его передаточная функция $W(s) = k$. Строго говоря, он не является динамическим звеном, поскольку изменение выхода происходит мгновенно, сразу вслед за изменением входа. При действии на вход единичного ступенчатого сигнала $1(t)$ (или дельта-функции $\delta(t)$) на выходе будет такой же сигнал, усиленный в k раз, поэтому переходная и импульсная характеристики звена равны
$$h(t) = k \quad (t > 0) \quad \text{и} \quad w(t) = k \cdot \delta(t)$$

4. Типовые динамические звенья

- Если на вход усилителя действует синусоидальный сигнал, на выходе он усиливается в k раз без изменения фазы, поэтому амплитудная и фазовая частотная характеристики не зависят от частоты входного сигнала: $A(\omega) = k$, $\phi(\omega) = 0$.
- **4.2. Аperiodическое звено**
- Одно из самых часто встречающихся звеньев – **апериодическое**, которое описывается дифференциальным уравнением

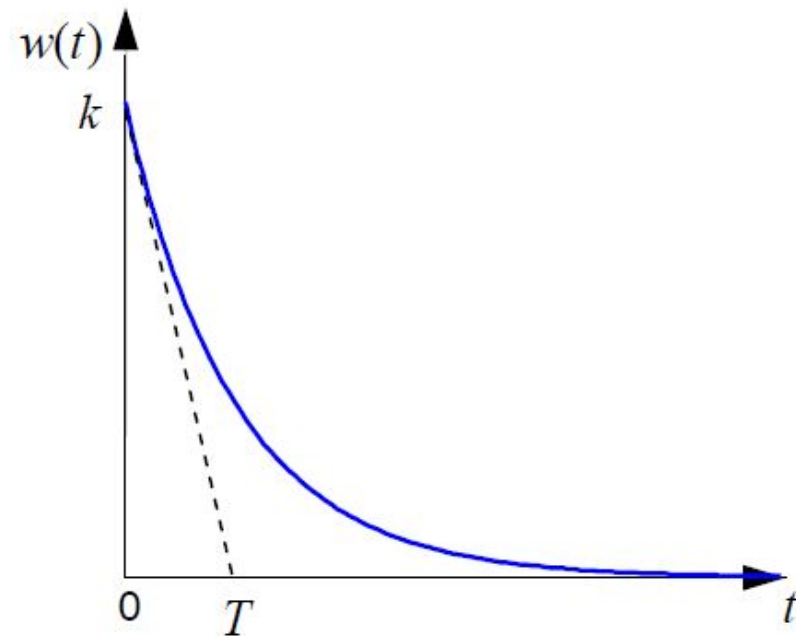
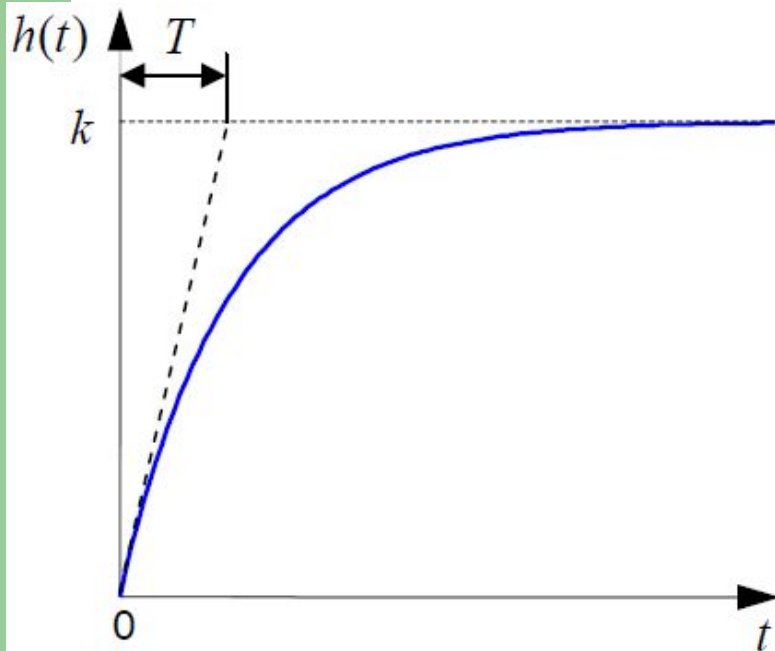
$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \cdot x(t) \quad (39)$$

и имеет передаточную функцию $W(s) = \frac{k}{Ts + 1}$ здесь k – безразмерный коэффициент, а $T > 0$ – постоянная, которая называется *постоянной времени* звена. Постоянная времени – размерная величина, она измеряется в секундах и характеризует *инерционность* объекта, то есть скорость его реакции на вход.

4. Типовые динамические звенья

- В разд. 3.3 и 3.4 мы уже нашли переходную и весовую функции апериодического звена

$$h(t) = k \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \right], \quad w(t) = \frac{k}{T} \exp\left(-\frac{t}{T}\right)$$



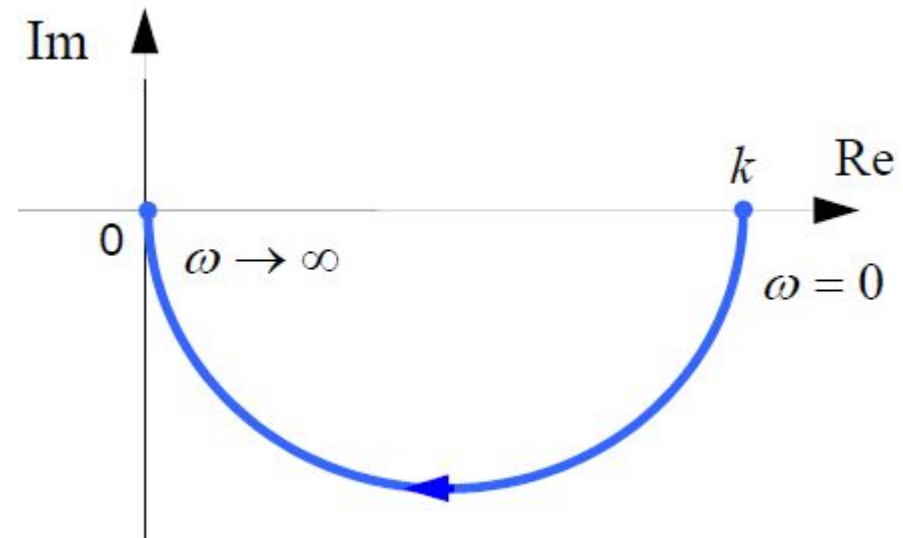
4. Типовые динамические звенья

- Обратите внимание, что предельное значение переходной характеристики равно k , а касательная к ней в точке $t = 0$ пересекается с линией установившегося значения при $t = T$.
- Переходная и импульсная характеристики выходят на установившееся значение (с ошибкой не более 5%) примерно за время $3T$.
- Эти факты позволяют определять постоянную времени экспериментально, по переходной характеристике звена.
- Частотная характеристика определяется выражением

$$W(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1} = \frac{k(1 - Tj\omega)}{T^2\omega^2 + 1} = \frac{k}{T^2\omega^2 + 1} - \frac{jkT\omega}{T^2\omega^2 + 1}$$

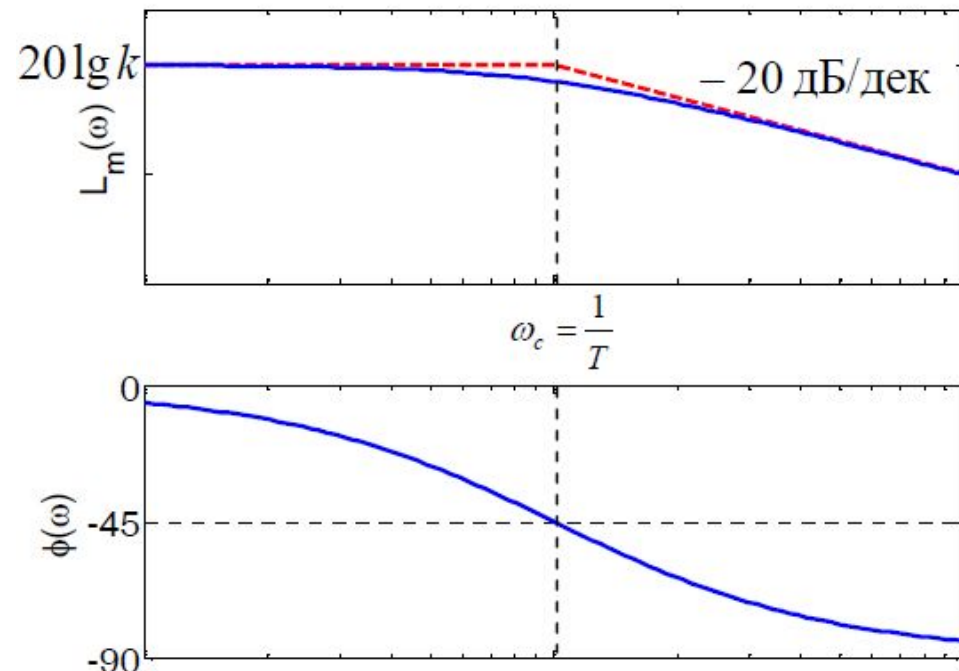
4. Типовые динамические звенья

- Для каждой частоты ω значение $W(j\omega)$ – это точка на комплексной плоскости.
- При изменении ω от 0 до ∞ получается кривая, которая называется *годографом Найквиста* (диаграммой Найквиста).
- Для каждой частоты ω значение $W(j\omega)$ – это точка на комплексной плоскости.
- При изменении ω от 0 до ∞ получается кривая, которая называется *годографом Найквиста* (диаграммой Найквиста).



4. Типовые динамические звенья

- Асимптотическая ЛАЧХ этого звена образована двумя прямыми, которые пересекаются на *сопрягающей частоте* $\omega_c = 1/T$
- На низких частотах она имеет нулевой наклон (так как звено позиционное), причем в этой области $L k m \approx 20 \lg$.
- На высоких частотах наклон ЛАЧХ равен -20 дБ/дек, так как степень знаменателя передаточной функции на единицу больше степени ее числителя. Фазовая характеристика меняется от 0 до -90° , причем на сопрягающей частоте ω_c она равна -45° .



4. Типовые динамические звенья

- Поскольку ЛАЧХ уменьшается на высоких частотах, апериодическое звено подавляет высокочастотные шумы, то есть обладает свойством *фильтра низких частот*.
- Для сравнения рассмотрим также *неустойчивое апериодическое звено*, которое задается уравнением

$$T \frac{dy(t)}{dt} - y(t) = k \cdot x(t)$$

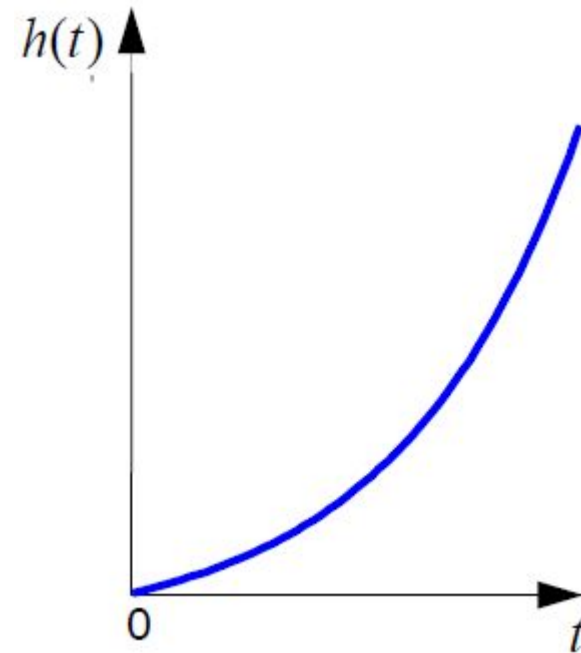
- Как видим, все отличие от (39) – только в знаке в левой части уравнения (плюс сменился на минус). Однако при этом кардинально меняются переходная и импульсная характеристики:

$$h(t) = k \left[\exp\left(\frac{t}{T}\right) - 1 \right], \quad w(t) = \frac{k}{T} \exp\left(\frac{t}{T}\right)$$

- Обычно предполагается, что постоянная времени $T > 0$, тогда экспоненты в этих выражениях бесконечно возрастают с ростом t .

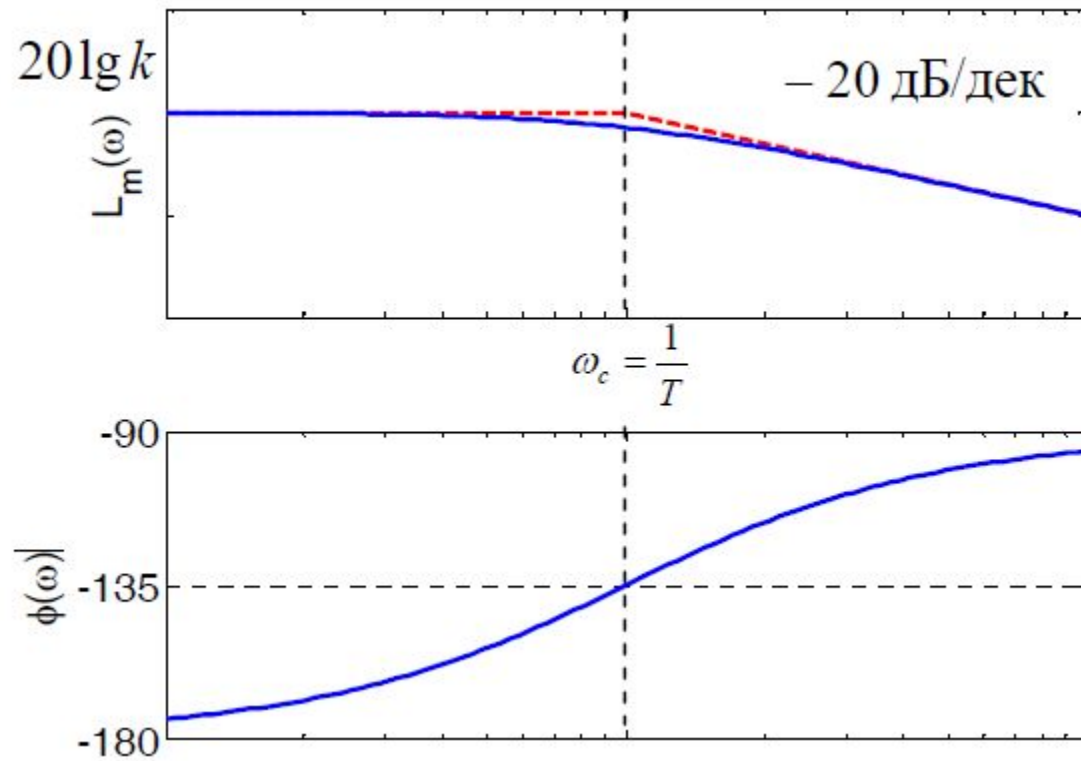
4. Типовые динамические звенья

- Поэтому звено названо «неустойчивым»: в покое оно находится в неустойчивом равновесии, а при малейшем возмущении «идет вразнос».
- Интересно сравнить частотные характеристики устойчивого и неустойчивого апериодических звеньев с теми же коэффициентами усиления и постоянными времени.



4. Типовые динамические звенья

- Из этого графика видно, что ЛАЧХ неустойчивого звена точно совпадает с ЛАЧХ аналогичного устойчивого, но отрицательный фазовый сдвиг значительно больше.
- Устойчивое апериодическое звено относится к *минимальнофазовым* звеньям, то есть его фаза по модулю меньше, чем фаза любого звена с такой же амплитудной характеристикой. Соответственно, неустойчивое звено – *неминимально-фазовое*.



4. Типовые динамические звенья

- К **неминимально-фазовым** звеньям относятся все звенья, передаточные функции которых имеют *нули или полюса* в правой полуплоскости, то есть, с положительной вещественной частью. Для *минимально-фазовых* звеньев все нули и полюса передаточной функции находятся в левой полуплоскости (имеют отрицательные вещественные части).
- Например, при положительных постоянных времени T_1 , T_2 и T_3 звено с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{T_1 s + 1}{(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}$$

- минимально-фазовое, а звенья с передаточными функциями

$$W_1(s) = \frac{T_1 s + 1}{(T_2 s + 1)(T_3 s - 1)}, \quad W_2(s) = \frac{T_1 s - 1}{(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}, \quad W_3(s) = \frac{T_1 s + 1}{(T_2 s - 1)(T_3 s - 1)}$$

- неминимально-фазовые.

4. Типовые динамические звенья

• 4.3. Колебательное звено

- Колебательное звено – это звено второго порядка с передаточной функцией вида

$$W(s) = \frac{k}{b_2 s^2 + b_1 s + 1},$$

- знаменатель которой имеет комплексно-сопряженные корни (то есть $b_1^2 - 4b_2 < 0$).
- Как известно из теории дифференциальных уравнений, свободное движение такой системы содержит гармонические составляющие (синус, косинус), что дает колебания выхода при изменении входного сигнала.

4. Типовые динамические звенья

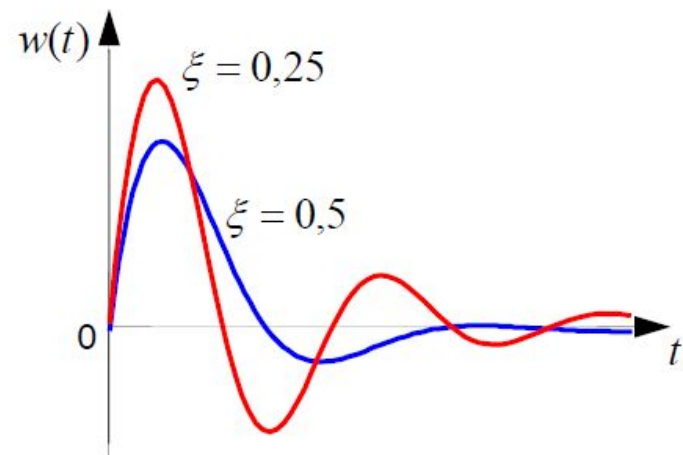
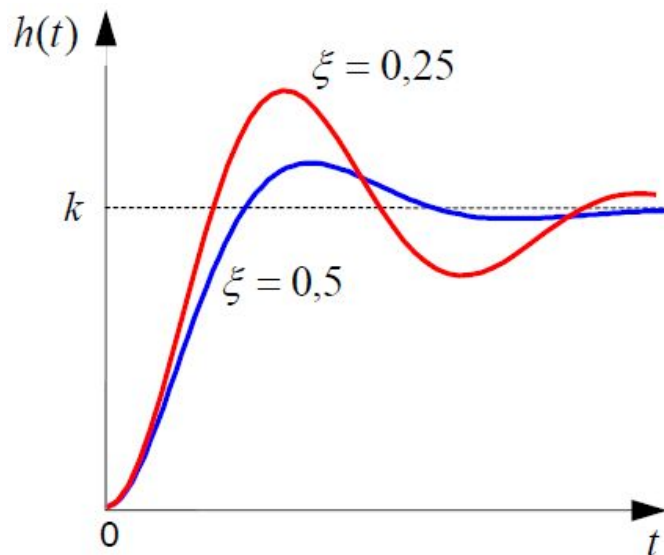
- Несложно представить передаточную функцию колебательного звена в форме

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2T\xi s + 1} \quad (41)$$

- где k – коэффициент, T – постоянная времени (в секундах), ξ – *параметр затухания* ($0 < \xi < 1$). Постоянная времени определяет инерционность объекта, чем она больше, тем медленнее изменяется выход при изменении входа. Чем больше ξ , тем быстрее затухают колебания.
- При $\xi = 0$ в (41) получается *консервативное* звено, которое дает незатухающие колебания на выходе. Если $\xi \geq 1$, модель (41) представляет *апериодическое звено второго порядка*, то есть последовательное соединение двух апериодических звеньев.

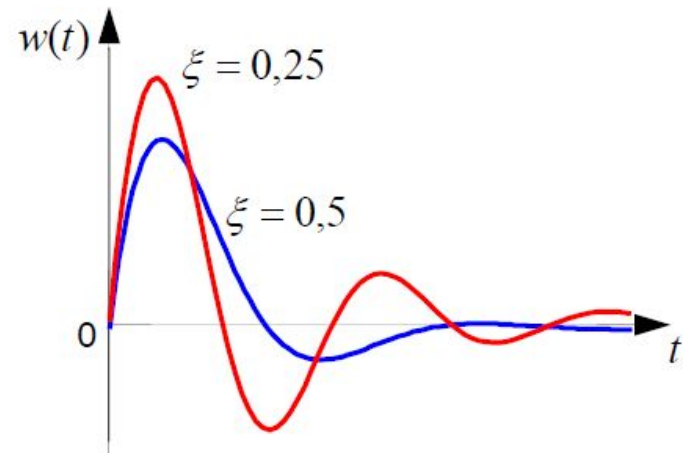
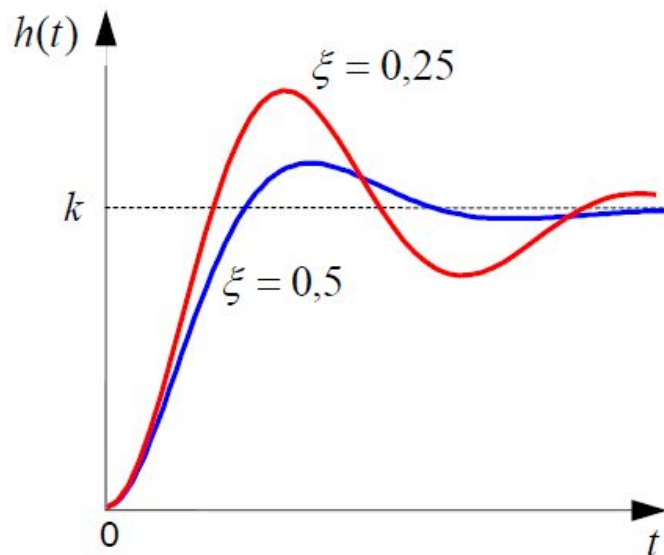
4. Типовые динамические звенья

- Колебательное звено относится к позиционным звеньям, его статический коэффициент усиления равен $W(0) = k$.
- Переходная и импульсная характеристики отличаются выраженной колебательностью, особенно при малых значениях параметра затухания ξ . На следующих двух графиках синие линии соответствуют $\xi = 0,5$, а красные – $\xi = 0,25$.



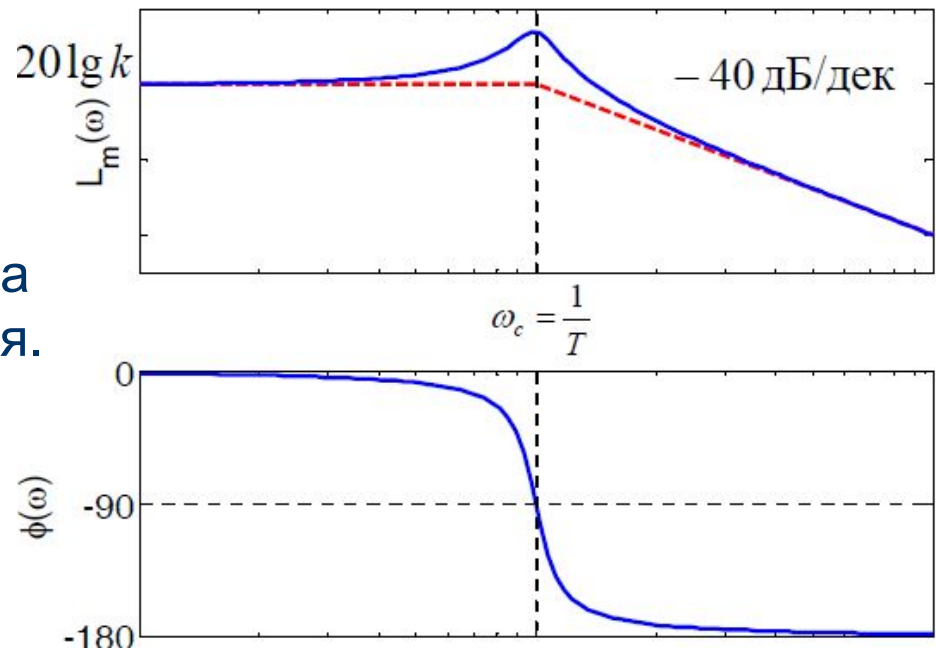
4. Типовые динамические звенья

- Колебательное звено относится к позиционным звеньям, его статический коэффициент усиления равен $W(0) = k$.
- Переходная и импульсная характеристики отличаются выраженной колебательностью, особенно при малых значениях параметра затухания ξ . На следующих двух графиках синие линии соответствуют $\xi = 0,5$, а красные – $\xi = 0,25$.



4. Типовые динамические звенья

- Асимптотическая ЛАЧХ этого звена образована двумя прямыми, которые пересекаются на *сопрягающей частоте* $\omega_c = 1/T_1$. На низких частотах она имеет нулевой наклон (так как звено позиционное), причем в этой области $L_m \approx 20 \lg k$.
- На высоких частотах наклон ЛАЧХ равен -40 дБ/дек, так как степень знаменателя передаточной функции на два больше степени ее числителя. Фазовая характеристика меняется от 0 до -180° , причем на сопрягающей частоте ω_c она равна -90° .



4. Типовые динамические звенья

- При значениях $\xi < 0,5$ ЛАЧХ имеет так называемый «горб» в районе сопрягающей частоты, причем его высота увеличивается с уменьшением ξ . Это означает, что при частоте входного сигнала, равной ω_c , наблюдается *резонанс*, то есть частота возмущения совпадает с частотой собственных колебаний системы.
- В предельном случае при $\xi = 0$ (*консервативное звено*) ЛАЧХ терпит разрыв (обращается в бесконечность) на частоте ω_c , при таком входе амплитуда колебаний неограниченно растет и на практике объект разрушается.

4. Типовые динамические звенья

• 4.4. Интегрирующее звено

- Простейший пример интегрирующего звена – ванна, в которую набирается вода. Входной сигнал – это поток воды через кран, выход системы – уровень воды в ванне. При поступлении воды уровень растет, система «накапливает» (интегрирует) входной сигнал.

- Интегрирующее звено описывается уравнением

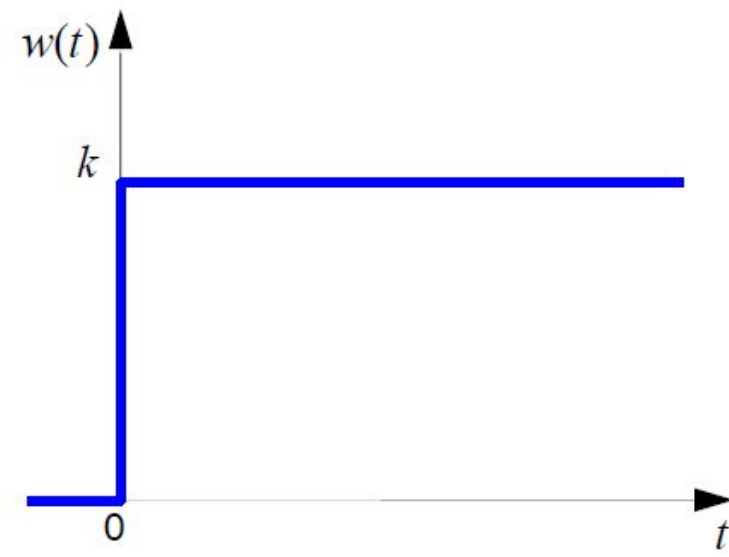
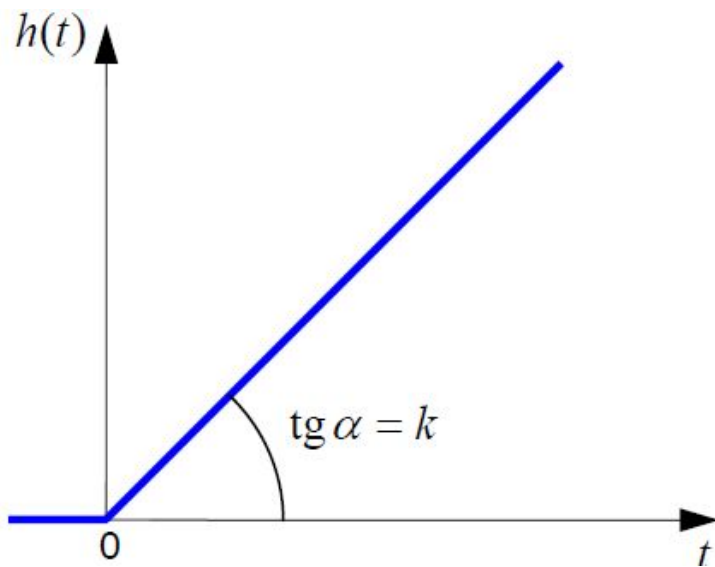
$$\frac{dy(t)}{dt} = k \cdot x(t), \quad (42)$$

- которому соответствует передаточная функция $W(s) = k/s$
Решение уравнения (42) дает

$$y(t) = y(0) + k \int_0^t x(\tau) d\tau.$$

4. Типовые динамические звенья

- Используя это решение для единичного скачка ($x(t) = 1$ при $t \geq 0$) при нулевых начальных условиях ($y(0) = 0$), получаем линейно возрастающую *переходную характеристику*: $h(t) = k \cdot t$.
- Для того, чтобы найти *импульсную характеристику*, вспомним, что интеграл от дельта функции на любом интервале, включающем $t = 0$, равен 1. Поэтому $w(t) = k$ (при $t \geq 0$) .



4. Типовые динамические звенья

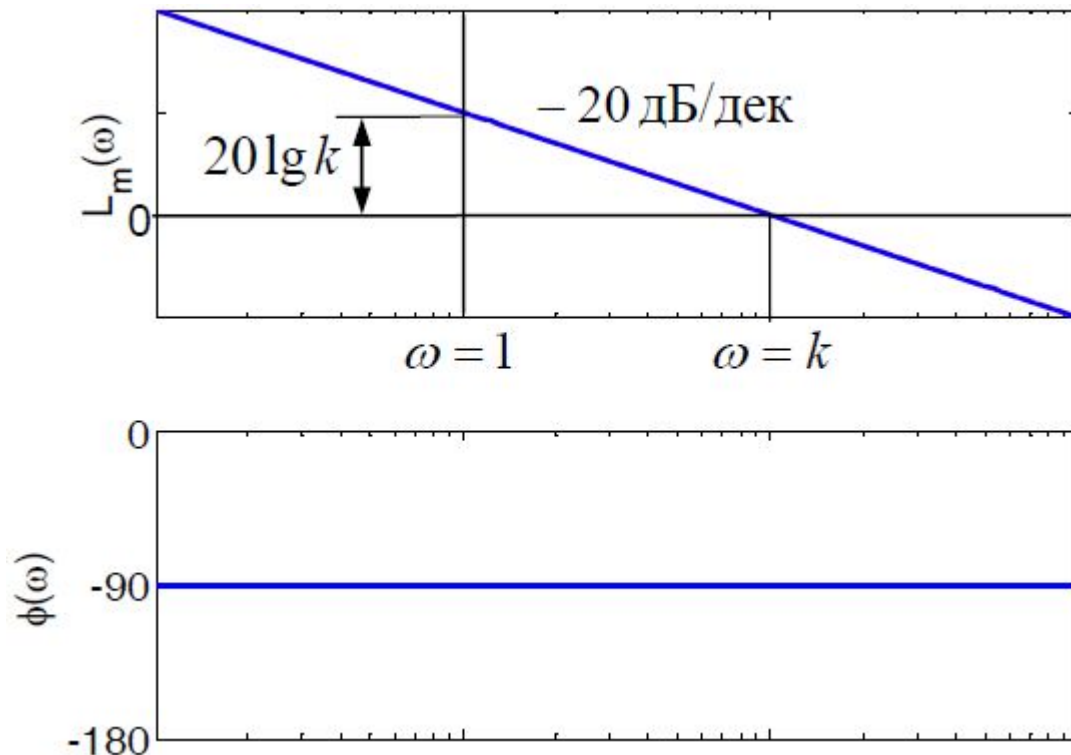
- Частотная характеристика интегрирующего звена определяется формулой

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = -j \frac{k}{\omega}.$$

- Можно показать, что его логарифмическая амплитудная частотная характеристика – это прямая с наклоном – 20 дБ/дек.
- На низких частотах усиление максимально, теоретически на частоте $\omega = 0$ оно равно бесконечности.
- Высокие частоты, наоборот, подавляются интегратором.

4. Типовые динамические звенья

- На частоте $\omega = 1$ значение ЛАЧХ равно $20\lg k$, а при $\omega = k$ ЛАЧХ обращается в нуль, поскольку $W(j\omega) = 1$. Фазовая характеристика $\phi(\omega) = -90^\circ$ – говорит о постоянном сдвиге фазы на всех частотах.



4. Типовые динамические звенья

• 4.5. Дифференцирующие звенья

- Дифференцирующее звено дает на выходе производную входного сигнала. Уравнение идеального дифференцирующего звена

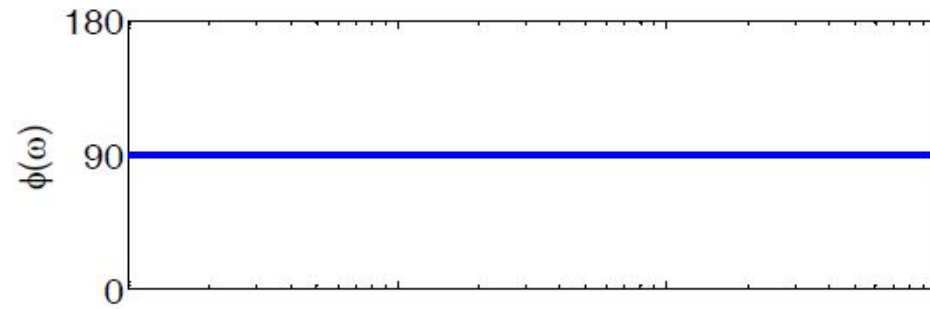
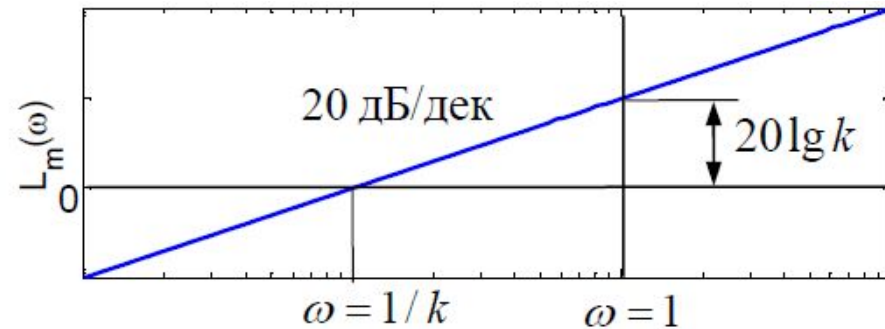
$$y(t) = k \frac{dx(t)}{dt},$$

- , его операторная запись $y(t) = k \cdot p x(t)$, а передаточная функция $W(s) = k \cdot s$.
- Известно, что производная единичного ступенчатого сигнала $1(t)$ в точке $t = 0$ – это дельта-функция $\delta(t)$. Поэтому переходная и весовая функции дифференцирующего звена

$$h(t) = k\delta(t), \quad w(t) = k \frac{d\delta(t)}{dt}$$

4. Типовые динамические звенья

- Это физически нереализуемые функции, так как дельта-функцию и ее производную, имеющие бесконечные значения, невозможно получить на реальном устройстве.
- Поэтому идеальное дифференцирующее относится к *физически нереализуемым* звеньям.
- Логарифмическая амплитудная частотная характеристика дифференцирующего звена – прямая с наклоном 20 дБ/дек, пересекающая ось абсцисс $L_m(\omega) = 0$ на частоте $\omega = 1/k$. При $\omega = 1$ ЛАЧХ равна $L_m(1) = 20 \lg k$.



4. Типовые динамические звенья

- Дифференцирующее звено подавляет низкие частоты (производная от постоянного сигнала равна нулю) и бесконечно усиливает высокочастотные сигналы, что требует бесконечной энергии и невозможно в физически реализуемых системах.
- Фазовая характеристика не зависит от частоты, звено дает положительный сдвиг фазы на 90° . Действительно, при дифференцировании сигнала $x(t) = \sin \omega t$ получаем
- $y(t) = \cos \omega t = \sin(\omega t + 90^\circ)$.
- Дифференцирующее звено реагирует не на изменение самой входной величины, а на изменение ее производной, то есть на *тенденцию* развития событий. Поэтому говорят, что дифференцирующее звено обладает упреждающим, *прогнозирующим* действием. С его помощью можно ускорить реакцию системы.

4. Типовые динамические звенья

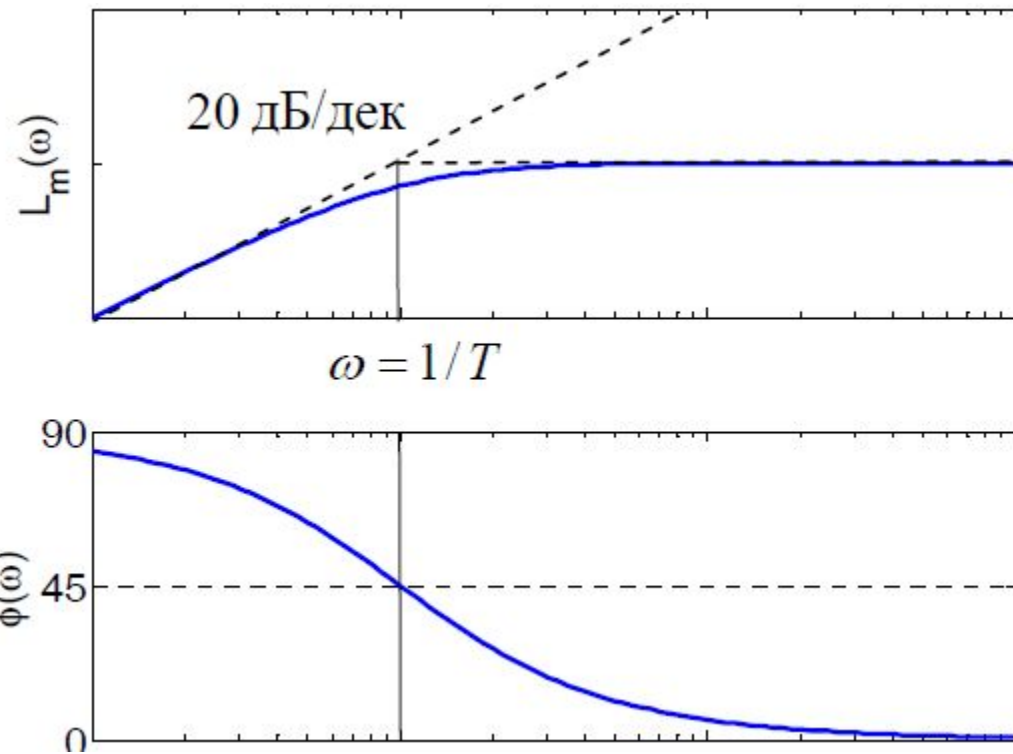
- В технике не могут использоваться физически нереализуемые звенья. Поэтому важно рассмотреть аналогичное звено, которое выполняет дифференцирования низкочастотных сигналов и одновременно имеет ограниченное усиление на высоких частотах. *Инерционное дифференцирующее звено* описывается уравнением

- и имеет передаточную функцию
$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \frac{dx(t)}{dt}$$
$$W(s) = \frac{ks}{Ts + 1}.$$

- Фактически это последовательное соединение идеального дифференцирующего и апериодического звеньев.
- Апериодическое звено добавляет инерционность: обладая свойствами фильтра низких частот, оно ограничивает усиление на высоких частотах.

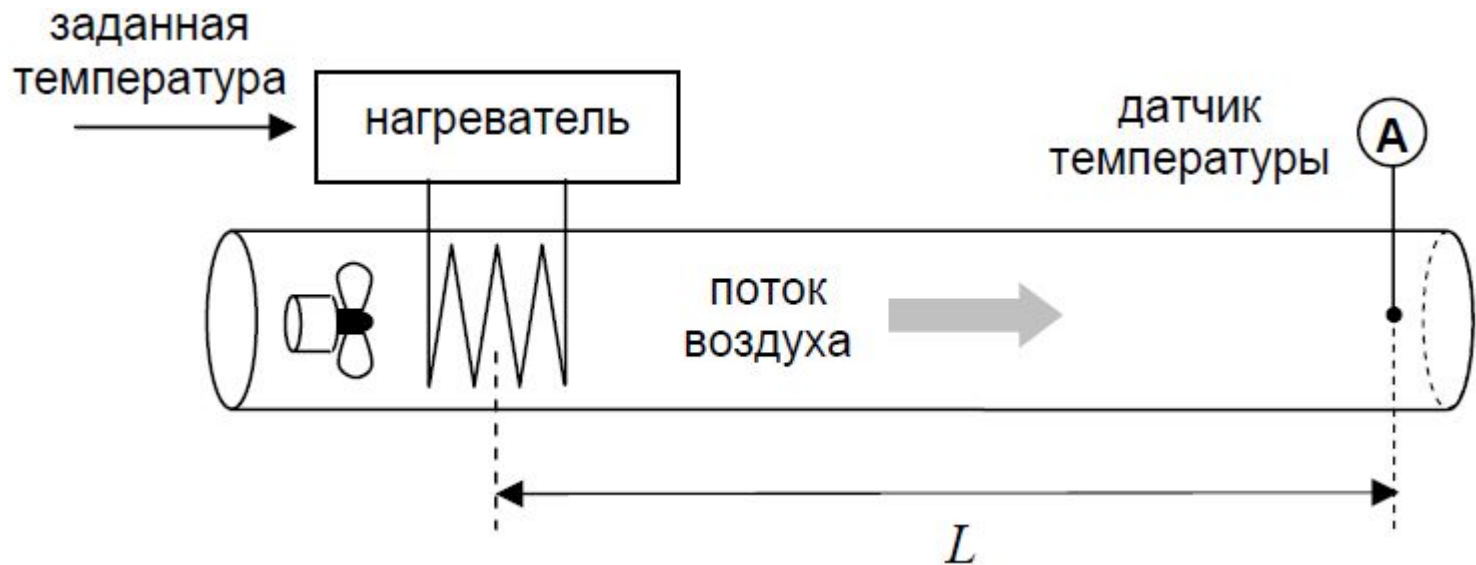
4. Типовые динамические звенья

- Поскольку передаточная функция имеет равные степени числителя и знаменателя, на высоких частотах (выше сопрягающей частоты $\omega_c = 1/T$) ЛАЧХ имеет нулевой наклон,
- поэтому неограниченного роста коэффициента усиления не происходит.
- Одновременно теряется точность дифференцирования, так как фазовая характеристика изменяется от 90° до нуля.



4. Типовые динамические звенья

- **4.6. Запаздывание**
- Представим себе трубу, через которую вентилятор прокачивает воздух. В начале трубы установлен нагреватель, а температура воздуха измеряется датчиком в точке А.



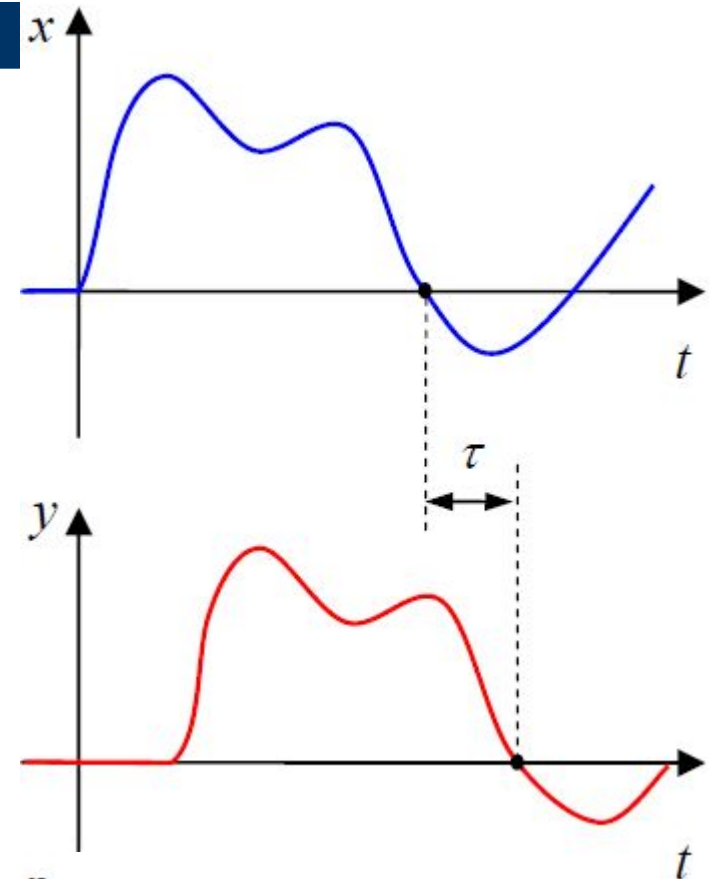
4. Типовые динамические звенья

- Очевидно, что при изменении температуры воздуха датчик обнаружит это не сразу, а через время $t = L / v$, где L – длина трубы (в *метрах*), а v – скорость потока воздуха (в *м/с*). В этом случае говорят, что в системе есть транспортное **запаздывание** на величину t (в *секундах*).
- Другой распространенный пример – вычислительное запаздывание в компьютере. Так называется время, которое необходимо для расчета нового управляющего сигнала после получения всех исходных данных.

4. Типовые динамические звенья

- Запозывание в системе просто сдвигает сигнал вправо на временной оси, не меняя его формы. Математически это можно записать в виде $y(t) = x(t - \tau)$.
- Изображение сигнала на выходе звена запаздывания вычисляется по *теореме о смещении аргумента* для преобразования Лапласа:

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \int_0^{\infty} x(t - \tau) e^{-st} dt = e^{-s\tau} \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt = e^{-s\tau} X(s),$$



4. Типовые динамические звенья

- Передаточная функция звена чистого запаздывания равна

$$W_{\tau}(s) = e^{-s\tau}$$

- Очевидно, что при гармоническом входном сигнале запаздывание не изменяет амплитуду, но вносит дополнительный отрицательный сдвиг фазы. Частотная характеристика этого звена имеет вид
- По общим с $W_{\tau}(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$ одим:
- Таким $A(j\omega) = |W_{\tau}(j\omega)| = 1$, $\phi(j\omega) = \arg W_{\tau}(j\omega) = -\omega\tau$ вена запаздывания – линейная функция частоты ω , чем больше частота, тем больше фазовый сдвиг.

4. Типовые динамические звенья

- **4.7. «Обратные» звенья**
- Звено с передаточной функцией $\tilde{W}(s) = \frac{1}{W(s)}$
- назовем «обратным» звеном для звена с передаточной функцией $W(s)$ (или *инверсией* для этого звена).
- Предположим, что мы знаем ЛАФЧХ для исходного звена и хотим найти ЛАФЧХ «обратного» звена без вычислений.
- Эта задача имеет простое решение.
- Для исходного звена $W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$, где $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ – соответственно вещественная и мнимая частотные характеристики. Амплитудная и фазовая характеристики имеют вид

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}, \quad \phi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

4. Типовые динамические звенья

- Для «обратного» звена получим

$$\tilde{W}(j\omega) = \frac{1}{W(j\omega)} = \frac{1}{P(\omega) + jQ(\omega)} = \frac{P(\omega) - jQ(\omega)}{P^2(\omega) + Q^2(\omega)},$$

- что после простых преобразований дает

$$\tilde{A}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}} = \frac{1}{A(\omega)}, \quad \tilde{\phi}(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = -\phi(\omega)$$

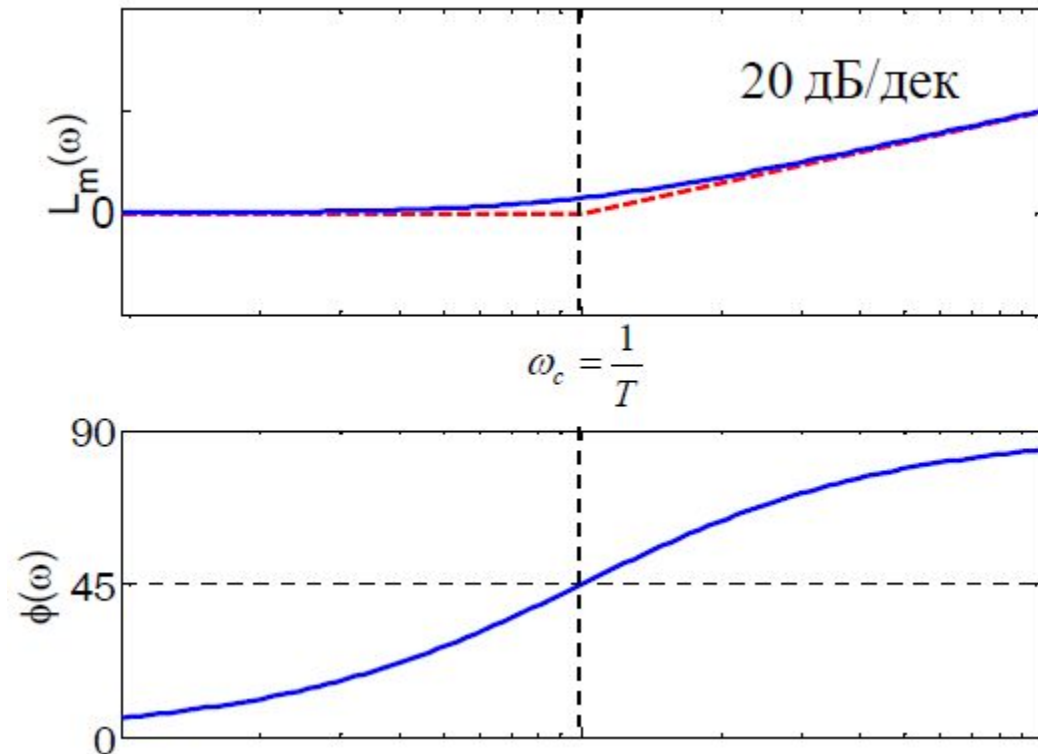
- Таким образом, для логарифмических характеристик получаем

$$20\lg \tilde{A}(\omega) = 20\lg \frac{1}{A(\omega)} = -20\lg A(\omega), \quad \tilde{\phi}(\omega) = -\phi(\omega).$$

- Это значит, что при переходе к «обратной» передаточной функции ЛАЧХ и ЛФЧХ просто меняют знак.

4. Типовые динамические звенья

- Рассмотрим, например, звено с передаточной функцией $W(s) = Ts + 1$. Оно является «обратным» для апериодического звена, поэтому можно сразу нарисовать его ЛАФЧХ так, как на рисунке.



4. Типовые динамические звенья

- Для звена чистого запаздывания «обратным» будет звено с передаточной функцией $\tilde{W}_\tau(s) = e^{s\tau}$, его амплитудная частотная характеристика равна 1 на всех частотах, а фазовая вычисляется как $\phi(\omega) = \omega\tau$. Положительный сдвиг фазы говорит о том, что сигнал на выходе является *раньше*, чем на входе. Такое звено называется *звеном упреждения* или *предсказания*.
- Понятно, что в реальных системах нельзя «заглянуть в будущее», поэтому звено упреждения физически нереализуемо. Тем не менее, модели некоторых практических задач могут включать звенья упреждения.
- Например, известны «автопилоты» для автомобилей, которые используют данные о рельефе дороги на некотором расстоянии *впереди* машины (будущие значения!), полученные с помощью лазерного измерителя.

4. Типовые динамические звенья

• 4.8. ЛАФЧХ сложных звеньев

- Для построения ЛАФЧХ звеньев со сложными передаточными функциями их числитель и знаменатель разбивают на сомножители первого и второго порядков.
- Фактически сложное звено при этом представляется как последовательное соединение простых звеньев, для которых известны все характеристики. При этом асимптотическую ЛАЧХ можно легко построить даже вручную.
- Рассмотрим звено второго порядка с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{a_1 s + a_0}{b_2 s^2 + b_1 s + b_0} = \frac{k(\bar{T}_2 s - 1)}{(T_1 s + 1)(T_3 s + 1)}$$

- Здесь T_i ($i = 1, \dots, 3$) – положительные постоянные времени. Для определенности примем $T_1 > T_2 > T_3$.

4. Типовые динамические звенья

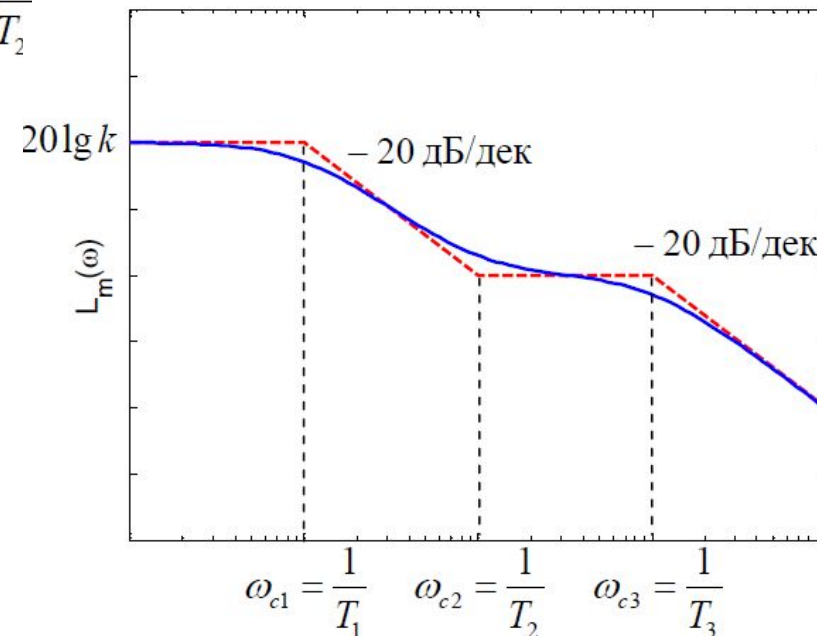
- Представим передаточную функцию в виде произведения

$$W(s) = k \cdot \frac{1}{T_1 s + 1} \cdot (T_2 s - 1) \cdot \frac{1}{T_3 s + 1}. \quad (43)$$

- Таким образом, это звено представляет собой последовательное соединение усилителя, двух апериодических звеньев $\frac{1}{T_1 s + 1}$ и $\frac{1}{T_3 s + 1}$ усилителя с дифференцированием (его передаточная функция $T_2 s - 1$).
- Как следует из свойств ЛАФЧХ (37)–(38), для построения ЛАЧХ системы с передаточной функцией $W(s)$ (43) достаточно сложить ЛАЧХ всех ее сомножителей.

4. Типовые динамические звенья

- На низких частотах, до первой сопрягающей частоты $\omega_{c1} = \frac{1}{T_1}$
- , «работает» только усилитель, и асимптотическая ЛАЧХ идет
- на постоянном уровне $20 \lg k$. Начиная с частоты $\omega_{c1} = \frac{1}{T_1}$
- первое апериодическое звено дает наклон
- ЛАЧХ – 20 дБ/дек, а с частоты $\omega_{c2} = \frac{1}{T_2}$
- звено $T_2 s - 1$
- восстанавливает нулевой
- наклон. На частотах выше $\omega_{c3} = \frac{1}{T_3}$
- включается второе
- (быстродействующее)
- апериодическое звено, которое
- определяет наклон – 20 дБ/дек
- оставшейся высокочастотной
- части ЛАЧХ.

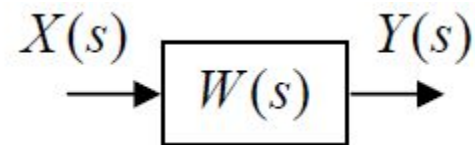
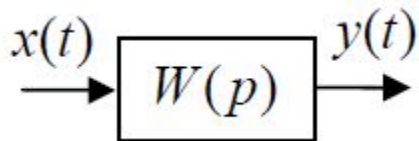


4. Типовые динамические звенья

- Для построения фазовой характеристики желательно использовать компьютерные программы.
- Однако принцип остается тот же, что и для ЛАЧХ: полная фазовая характеристика равна сумме фазовых характеристик отдельных звеньев, входящих в произведение.

5. Структурные схемы

- **5.1. Условные обозначения**
- Систему управления можно разбить на блоки, имеющие вход и выход (объект, регулятор, привод, измерительная система).
- Для того, чтобы показать взаимосвязи этих блоков, используют структурные схемы. На них каждый элемент изображается в виде прямоугольника, внутри которого записывается его передаточная функция.
- Вход и выход блока показывают соответственно «входящей» и «выходящей» стрелками.

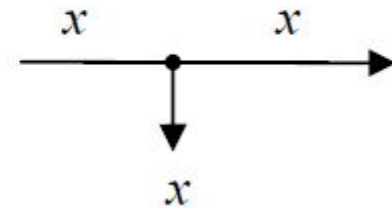
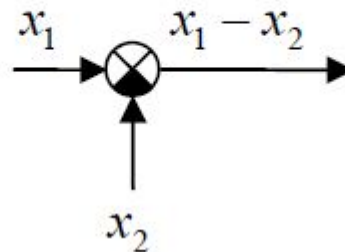
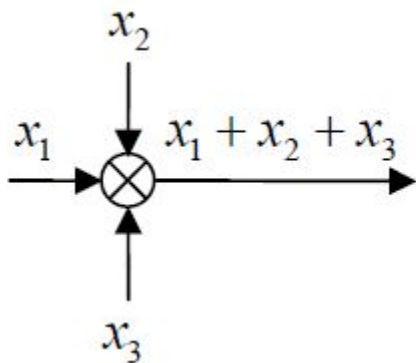


5. Структурные схемы

- Строго говоря, есть две формы записи:
- *операторная запись*, когда передаточная функция записывается как функция оператора дифференцирования p , входы и выходы блоков – функции времени;
- *запись в изображениях*, когда передаточная функция записывается как функция комплексной переменной s , а для обозначения входов и выходов используют их изображения по Лапласу.
- Однако суть дела от этого не меняется. Поэтому дальше при обозначении сигналов мы, несколько жертвуя строгостью ради простоты записи, будем обозначать сигналы строчными буквами, не указывая независимую переменную (t или s), а в записи передаточных функций будем использовать переменную s , как принято в литературе.

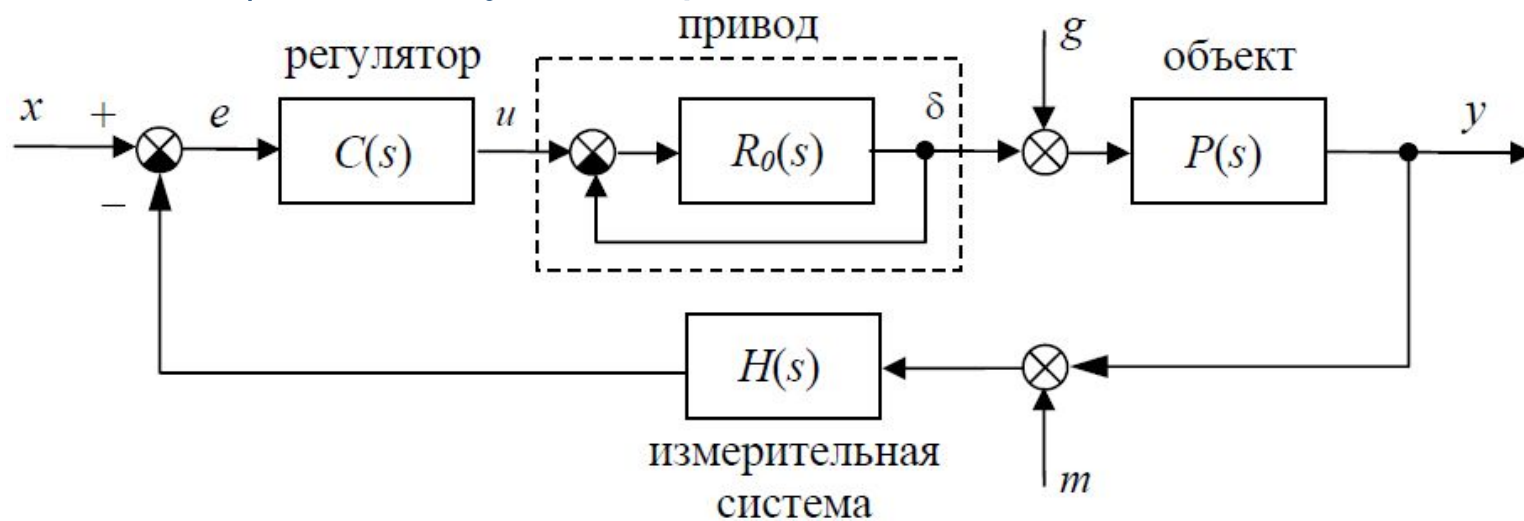
5. Структурные схемы

- Для суммирующих элементов используют специальное обозначение – круг, разбитый на сектора.
- Если сектор залит черным цветом, поступающий в него сигнал вычитается, а не складывается с другими.
- Разветвление сигнала обозначается точкой, как и в радиотехнике.



5. Структурные схемы

- На следующем рисунке показана типичная схема системы управления кораблем по курсу. Здесь вход x – заданный курс, выход y – фактический курс. Сигналы e , u и δ обозначают соответственно ошибку регулирования, сигнал управления и управляющее воздействие привода на объект (угол поворота руля). Сигнал g – это возмущение (влияние ветра и морского волнения), а m – шум измерений.

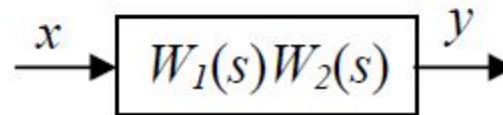
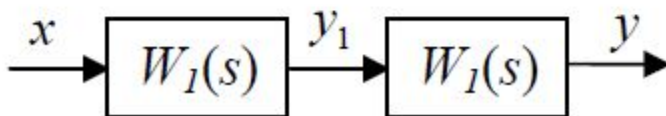
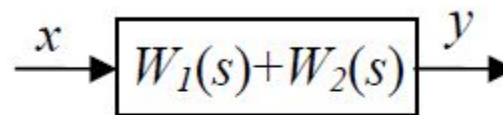
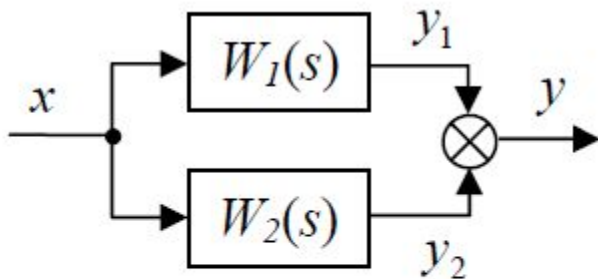


5. Структурные схемы

- В системе управления курса кроме «большого» контура управления (регулятор – привод – объект) есть еще внутренний контур привода (звено с передаточной функцией $R_0(s)$ которое охвачено *отрицательной обратной связью*).
- **5.2. Правила преобразования**
- Многие инженерные (классические) методы исследования систем управления основаны на использовании передаточных функций.
- Для построения передаточной функции системы между заданными входом и выходом нужно преобразовать структурную схему так, чтобы в конечном счете остался один блок с известной передаточной функцией.
- Для этого используют *структурные преобразования*.

5. Структурные схемы

- Легко показать, что передаточные функции параллельного и последовательного соединений равны соответственно сумме и произведению исходных передаточных функций:



- Действительно, в изображениях по Лапласу для параллельного соединения получаем

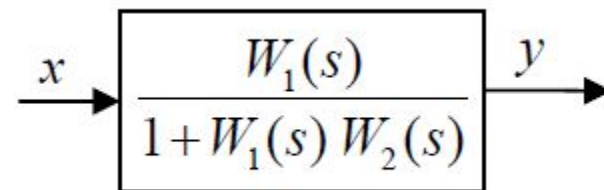
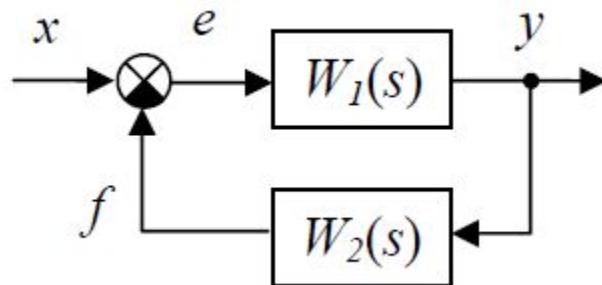
$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = W_1(s)X(s) + W_2(s)X(s) = [W_1(s) + W_2(s)]X(s),$$

5. Структурные схемы

- а для последовательного

$$Y(s) = W_2(s) Y_1(s) = W_1(s) W_2(s) X(s)$$

- Для контура с отрицательной обратной связью имеем



Для доказательства заметим, что $Y(s) = W_1(s) E(s)$, а изображение ошибки равно

$$E(s) = X(s) - F(s) = X(s) - W_2(s) Y(s).$$

Поэтому

$$Y(s) = W_1(s) [X(s) - W_2(s) Y(s)].$$

5. Структурные схемы

- Переносим $X(s)$ в левую часть, получаем

$$Y(s)[1 + W_1(s) W_2(s)] = W_1(s) X(s) \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s) W_2(s)} X(s).$$

- Если обратная связь – положительная (сигналы x и f складываются), в знаменателе будет стоять знак «минус»:

$$W(s) = \frac{W_1(s)}{1 - W_1(s) W_2(s)}$$

5. Структурные схемы

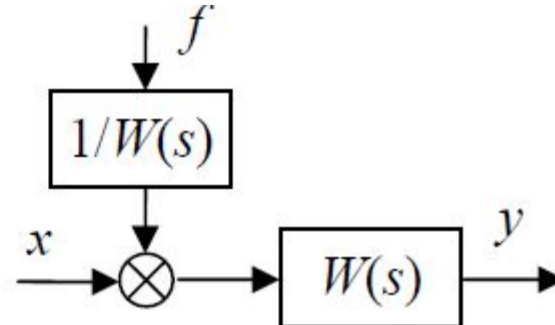
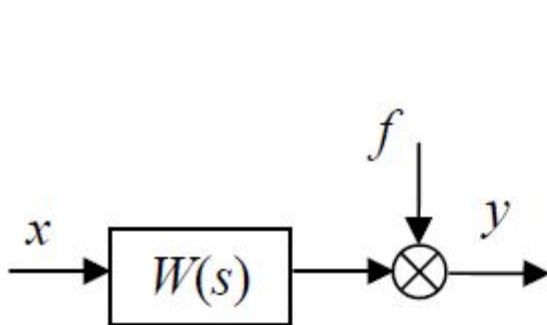
Звено можно переносить через сумматор как вперед, так и назад. Чтобы при этом передаточные функции не изменились, перед сумматором нужно поставить дополнительное звено:



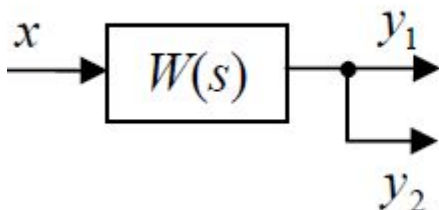
- Обратите внимание, что передаточные функции от обоих входов к выходу на двух схемах одинаковые.

5. Структурные схемы

- Для следующей пары это условие тоже выполняется:

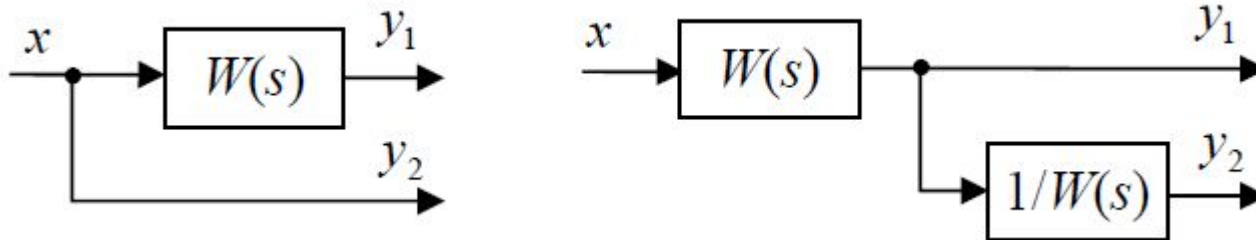


- Звено можно переносить также через точку разветвления, сохраняя все передаточные функции:



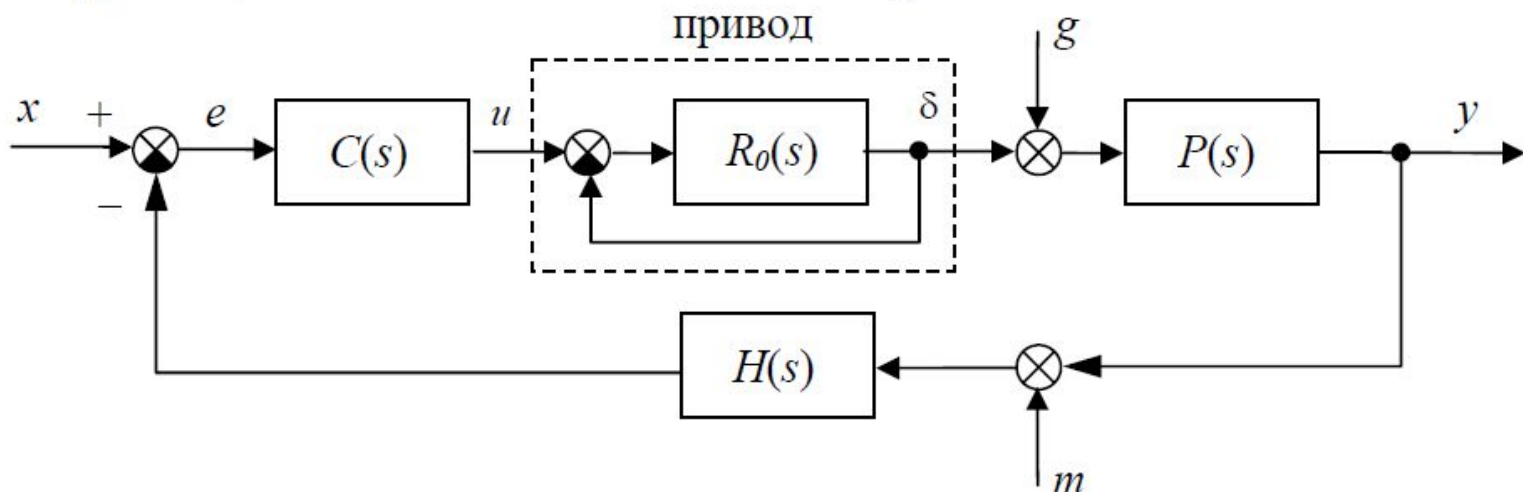
5. Структурные схемы

- Эти две схемы тоже равносильны:



5. Структурные схемы

- **5.3. Типовая одноконтурная система**
- Применим показанные выше приемы для вычисления передаточных функций рассмотренной выше системы. Здесь три входа (x , g и m), а в качестве выходов обычно рассматривают выход системы y , сигнал управления u и ошибку e . Таким образом, всего можно записать 9 передаточных функций, соединяющих все возможные пары вход-выход.

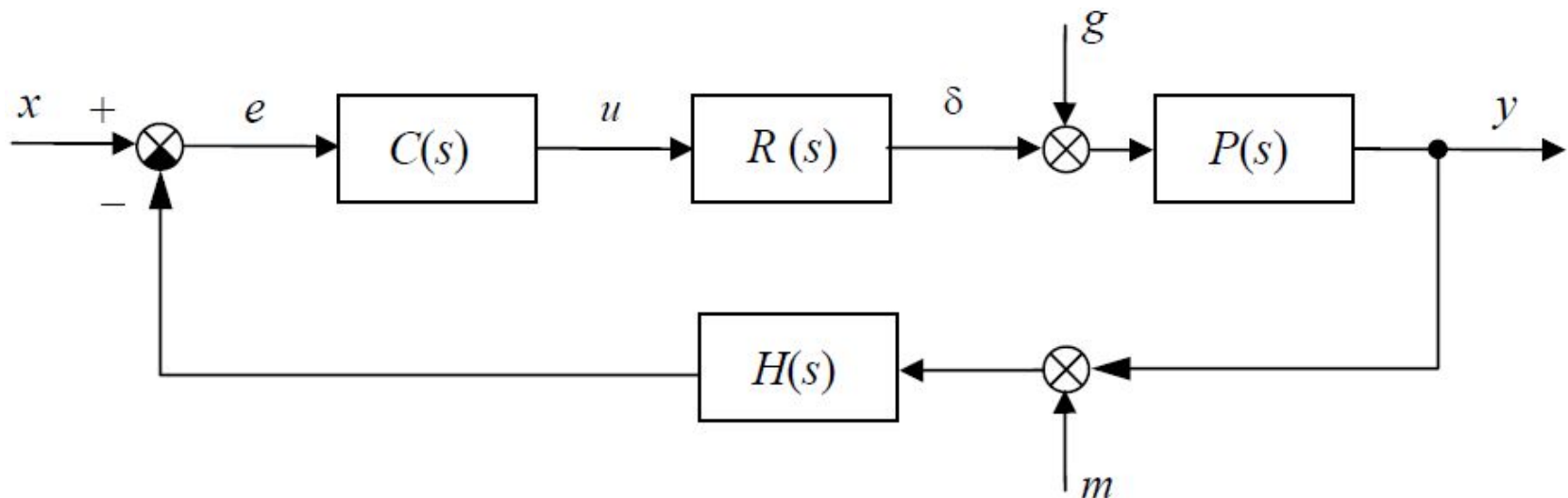


5. Структурные схемы

- Сначала найдем полную передаточную функцию привода (обведенного штриховой рамкой), используя формулу для контура с отрицательной обратной связью:

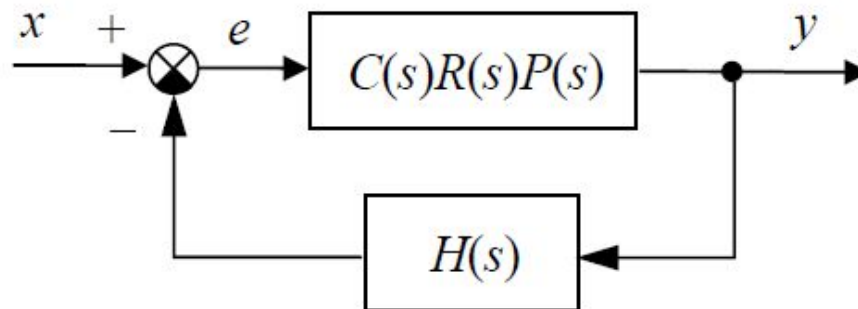
$$R(s) = \frac{R_0(s)}{1 + R_0(s)}$$

- Получаем следующую схему:



5. Структурные схемы

- Теперь найдем передаточные функции от входа x ко всем выходам. Для этого все остальные входы будем считать нулевыми и удалим со схемы.
- Кроме того, заменим последовательное соединение звеньев с передаточными функциями $C(s)$, $R(s)$ и $P(s)$ на одно звено:

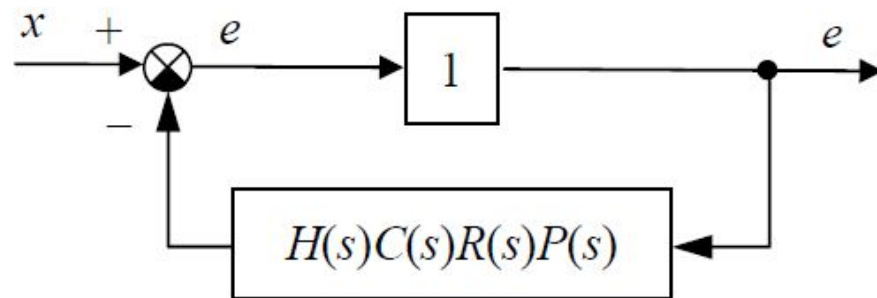
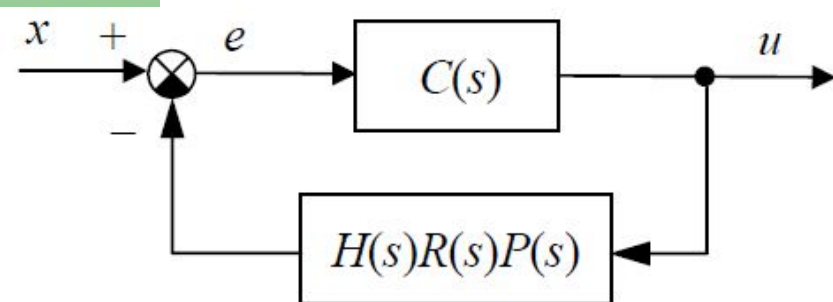


- Для получения окончательного результата снова используем формулу для контура с отрицательной обратной связью:

$$W(s) = \frac{C(s)R(s)P(s)}{1 + H(s)C(s)R(s)P(s)}.$$

5. Структурные схемы

- Принимая в качестве выходов управление u и ошибку e , получим похожие схемы:



- Первая из этих схем дает передаточную функцию по управлению $W_u(s)$, а вторая – передаточную функцию по ошибке $W_e(s)$ (здесь блок с передаточной функцией, равной единице, можно было вообще не рисовать). Снова применяя формулу для контура с отрицательной обратной связью, получаем:

$$W_u(s) = \frac{C(s)}{1 + H(s)C(s)R(s)P(s)}, \quad W_e(s) = \frac{1}{1 + H(s)C(s)R(s)P(s)}$$