

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

Алгоритм решения уравнения $ax^2+bx+c=0$

1. Вычислить дискриминант D по формуле $D = b^2 - 4ac$.
2. Если $D < 0$, то квадратное уравнение не имеет корней.
3. Если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет один корень:

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

4. Если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Пример 4: Решить уравнение: а) $x^2 + 3x - 5 = 0$;

Решение:

а) $x^2 + 3x - 5 = 0$;

$$a = 1, \quad b = 3, \quad c = -5,$$

$$D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 9 + 20 = 29;$$

$$D > 0:$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{29}}{2}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{29}}{2}.$$

б) $-9x^2 + 6x - 1 = 0$;

$$9x^2 - 6x + 1 = 0;$$

$$a = 9, \quad b = -6, \quad c = 1,$$

$$D = b^2 - 4ac = 36 - 36 = 0;$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2 \cdot 9} = \frac{1}{3}.$$

б) $-9x^2 + 6x - 1 = 0$;

в) $2x^2 - x + 3,5 = 0$;

$$9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2;$$

$$(3x - 1)^2 = 0;$$

$$3x - 1 = 0;$$

$$x = \frac{1}{3}.$$

Пример 4: Решить уравнение:

в) $2x^2 - x + 3,5 = 0;$

$a = 2, \quad b = -1, \quad c = 3,5,$

$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3,5 = 1 - 28 = -27;$

$D < 0:$

Уравнение корней не имеет

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$D = b^2 - 4ac < 0 \quad - \quad \text{КОРНЕЙ НЕТ}$$

$$D = b^2 - 4ac = 0 \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a} \quad - \quad \text{ОДИН КОРЕНЬ}$$

$$D = b^2 - 4ac > 0 \quad - \quad \text{ДВА КОРНЯ}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Пример 5: Решить уравнение:

Решение:

$$a) \frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{7}{12} = 0;$$

$$a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{5}{6}, \quad c = -\frac{7}{12},$$

$$12\left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{7}{12}\right) = 12 \cdot 0;$$

$$8x^2 + 10x - 7 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 224}}{16} = \frac{-10 \pm \sqrt{324}}{16} = \frac{-10 \pm 18}{16};$$

$$x_1 = \frac{-10 + 18}{16} = \frac{1}{2};$$

$$x_2 = \frac{-10 - 18}{16} = -\frac{7}{4}.$$

$$a) \frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{7}{12} = 0;$$

$$б) 3x^2 - 0,2x + 2,77 = 0;$$

Пример 5: Решить уравнение:

$$б) 3x^2 - 0,2x + 2,77 = 0;$$

$$a = 3, \quad b = -0,2, \quad c = 2,77,$$

$$300x^2 - 20x + 277 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 300 \cdot 277}}{2 \cdot 300}.$$

Уравнение корней не имеет

Пример 6: Решить уравнение $5x^2 - 2\sqrt{15}x + 1 = 0$.

Решение:

$$a = 5, \quad b = -2\sqrt{15}, \quad c = 1,$$

$$D = b^2 - 4ac = (-2\sqrt{15})^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = 60 - 20 = 40 > 0$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{2\sqrt{15} + \sqrt{40}}{2 \cdot 5} = \frac{2\sqrt{15} + 2\sqrt{10}}{10} = \frac{2\sqrt{5}(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{10} = \\ &= \frac{\sqrt{5}(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{5}. \end{aligned}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{2\sqrt{15} - \sqrt{40}}{2 \cdot 5} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{5}.$$

Пример 7: Решить уравнение $x^2 - (2p + 1)x + (p^2 + p - 2) = 0$.

Решение:

Уравнение с параметром

$$D = (2p + 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (p^2 + p - 2) = (4p^2 + 4p + 1) - (4p^2 + 4p - 8) = 9;$$

$$x_1 = \frac{(2p + 1) + \sqrt{9}}{2} = \frac{2p + 1 + 3}{2} = \frac{2(p + 2)}{2} = p + 2;$$

$$x_2 = \frac{(2p + 1) - \sqrt{9}}{2} = \frac{2p + 1 - 3}{2} = \frac{2(p - 1)}{2} = p - 1;$$

Пример 8: Решить уравнение $px^2 + (1-p)x - 1 = 0$.

Решение:

$$p = 0: \quad 0 \cdot x^2 + (1-0)x - 1 = 0;$$

$$x - 1 = 0;$$

$$x = 1;$$

$$p \neq 0: \quad x_{1,2} = \frac{-(1-p) \pm \sqrt{(1-p)^2 - 4 \cdot p \cdot (-1)}}{2p} =$$
$$= \frac{p-1 \pm \sqrt{1-2p+p^2+4p}}{2p} = \frac{p-1 \pm \sqrt{(p+1)^2}}{2p} = \frac{p-1 \pm (p+1)}{2p};$$

$$p = -1: \quad D = 0 \quad x_1 = x_2 = 1;$$

$$p \neq -1: \quad x_1 = \frac{p-1+(p+1)}{2p} = \frac{2p}{2p} = 1; \quad x_2 = \frac{p-1-(p+1)}{2p} = \frac{-2}{2p} = -\frac{1}{p};$$

если $p = 0$ или $p = -1$, то $x = 1$;

если $p \neq 0$ или $p \neq -1$, то $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{p}$.