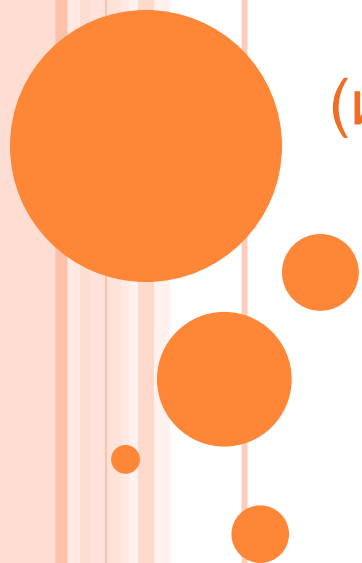


Неравенства

(избранные вопросы по математике на ЕГЭ)



СОДЕРЖАНИЕ

- Неравенства с одной переменной
- Линейные неравенства
- Квадратные неравенства
- Рациональные неравенства
- Неравенства, содержащие знак модуля
- Комбинированные неравенства



Неравенства вида $f(x) > g(x); f(x) \geq g(x); f(x) < g(x); f(x) \leq g(x)$

Где $f(x)$ и $g(x)$ линейные функции, называются **неравенствами с одной неизвестной**.

Решением неравенства с одной переменной называется такое значение переменной, при подстановке которого неравенство обращается в верное числовое неравенство.

Решить неравенство — значит найти все его решения или доказать, что решений нет.



Линейным неравенством называется неравенство вида
(или $ax + b > 0$) $ax + b < 0$

Решая линейное неравенство вида $ax + b \geq 0$ получим: $ax \geq -b$

1 случай: $a > 0$, тогда $x \geq -\frac{b}{a}$

2 случай: $a < 0$, тогда $x \leq -\frac{b}{a}$

3 случай: $a = 0$, тогда $0 \cdot x \geq -b$

Если при этом $b \leq 0$, то решений нет

Если $b > 0$, то $x \in \mathbb{R}$



A1. Укажите наименьшее целое решение неравенства $-x + 0,5(x + 4) < 4$

1) -5 ;

2) -4 ;

3) -3 ;

4) -2 ;

Решение.

$$-x + 0,5(x + 4) < 4$$

$$-x + 0,5x + 2 < 4$$

$$-0,5x < 2$$

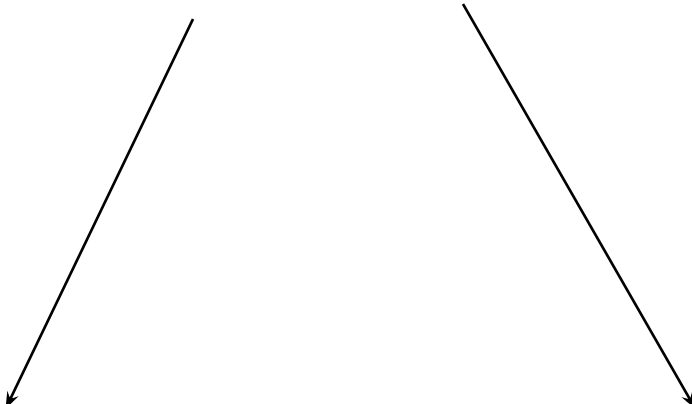
$$x > -4$$

Ответ: -3



Квадратными неравенствами называются неравенства вида $ax^2 + bx + c > 0$; $ax^2 + bx + c \geq 0$; $ax^2 + bx + c < 0$; $ax^2 + bx + c \leq 0$, где x – переменная; a, b, c – действительные числа, причем $a \neq 0$.

Способы решения



```
graph TD; A[Способы решения] --> B[графический]; A --> C[аналитический]
```

графический

аналитический



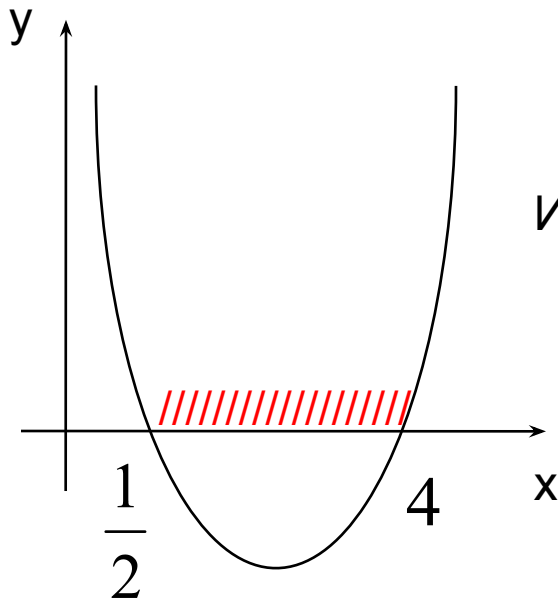
А1. Решите неравенство $2x^2 - 9x + 4 < 0$

- 1) $(-\infty; \frac{1}{2}) \cup (4; +\infty)$; 2) $(\frac{1}{2}; 4)$; 3) $(-\infty; \frac{1}{2}] \cup [4; +\infty)$; 4) $[\frac{1}{2}; 4]$

Решение.

$$2x^2 - 9x + 4 < 0 \quad D = 49; \quad x_1 = \frac{1}{2}; \quad x_2 = 4$$

Построим эскиз графика функции $y = 2x^2 - 9x + 4$



Из графика следует, что $y < 0$, если $x \in (\frac{1}{2}; 4)$

Ответ: $(\frac{1}{2}; 4)$



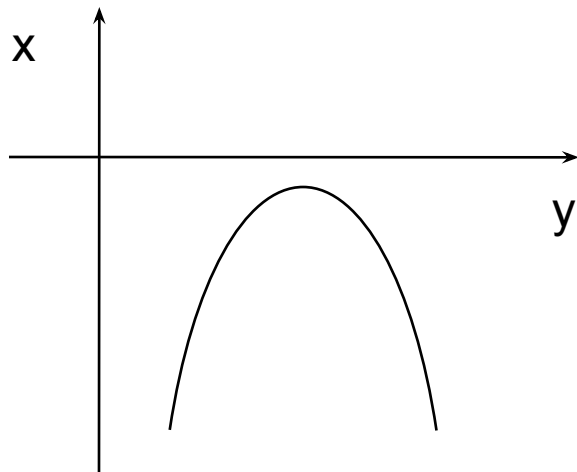
A2. Решите неравенство $-x^2 - 6x - 10 < 0$

- 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $-0,5$; 3) решений нет; 4) 5 ;

Решение.

$$-x^2 - 6x - 10 < 0$$

$D < 0 \Rightarrow$ график функции $y = -x^2 - 6x - 10$ с осью абсцисс не пересекается



Из графика следует, что $y < 0$, если $x \in R$

Ответ: $(-\infty; +\infty)$



Рациональным неравенством называется неравенство вида

$$P_n(x) > 0 \quad P_n(x) < 0 \quad , \quad \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0 \quad , \quad \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0$$

где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ - многочлены

Основной метод решения – метод интервалов



При решении рациональных неравенств методом интервалов нужно:

- все члены неравенства перенести в левую часть; если неравенство дробно – рациональное, то привести левую часть к общему знаменателю;
- найти все значения переменной, при которых числитель и знаменатель обращаются в 0;
- нанести найденные точки на числовую прямую, разбивая ее при этом на интервалы, в каждом из которых рациональная функция сохраняет знак;
- определить знак функции на любом из интервалов (лучше крайнем);
- определить знаки на остальных интервалах: при переходе через точку знак меняется на противоположный, если точка является корнем нечетной степени кратности; при переходе через точку четной кратности знак сохраняется;
- множеством решений неравенства является объединение интервалов с соответствующим знаком функции. В случае нестрогого неравенства к этому множеству добавляются корни числителя.



A1. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$(x-3)(x+4)(7-x) \leq 0$$

1) -5

2) -4

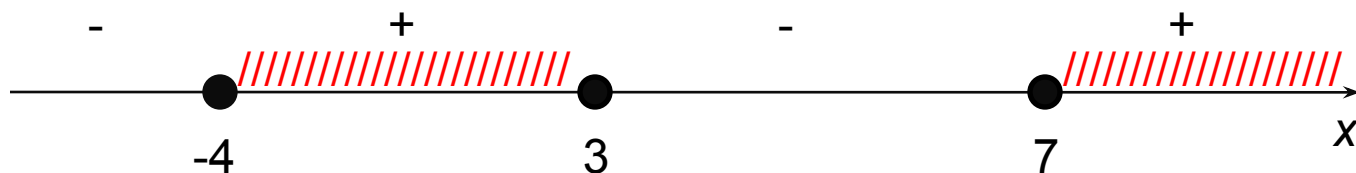
3) -3

4) -1

Решение.

$$(x-3)(x+4)(7-x) \leq 0$$

$$(x-3)(x+4)(x-7) \geq 0$$



Ответ: -4

A2. Укажите число целых решений неравенства $\frac{(x+2)(x-4)}{-x^2+4x-4} \geq 0$

1) 7;

2) 5;

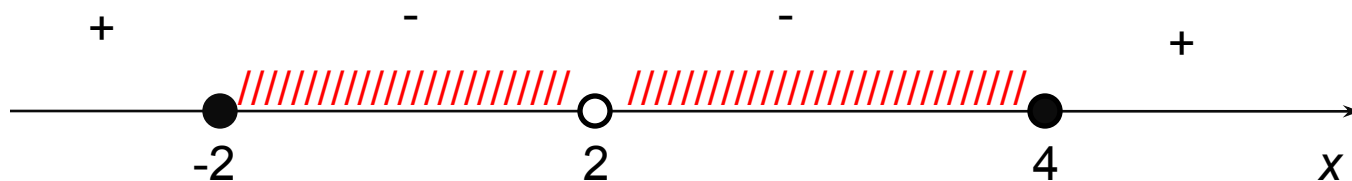
3) 6;

4) целых решений
бесконечно много

Решение.

$$\frac{(x+2)(x-4)}{-(x-2)^2} \geq 0$$

$$\frac{(x+2)(x-4)}{(x-2)^2} \leq 0$$



-2; -1; 0; 1; 3; 4 – целые решения неравенств

Ответ: 6

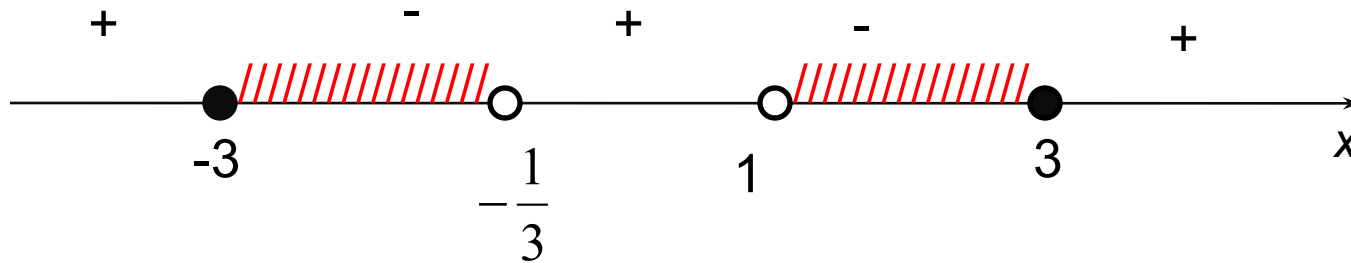


В1. Найдите сумму целых решений неравенства $\frac{9-x^2}{3x^2-2x-1} \geq 0$

Решение.

$$\frac{x^2 - 9}{3x^2 - 2x - 1} \leq 0$$

$$\frac{(x-3)(x+3)}{3(x-1)(x+\frac{1}{3})} \leq 0$$



$-3; -2; -1; 2; 3$ – целые решения неравенства.

$$-3 + (-2) + (-1) + 2 + 3 = -1$$

Ответ: -1

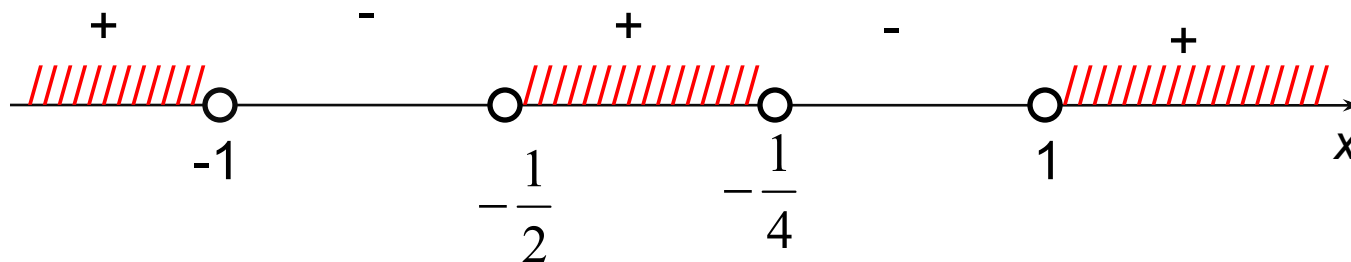


В2. Укажите сумму целых чисел, **не являющихся** решением неравенства

$$\frac{4x^2 - 3x - 1}{2x^2 + 3x + 1} > 0$$

Решение.

$$\frac{4(x-1)(x+\frac{1}{4})}{2(x+\frac{1}{2})(x+1)} > 0$$



-1; 0; 1 – целые числа, не являющиеся решениями неравенства

$$-1 + 0 + 1 = 0$$

Ответ: 0



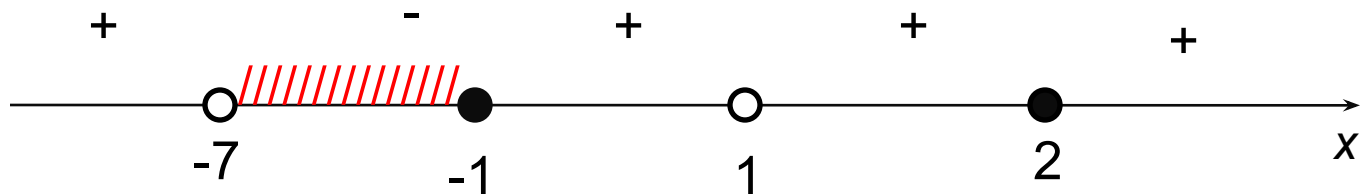
С1. Решите неравенство $\frac{(x^4 - 2x^3 + 2x - 1)(x^2 - 4x + 4)}{7 - 6x - x^2} \geq 0$

Решение.

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 + 2x - 1 &= (x^4 - 1) - (2x^3 - 2x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1) = \\ &= (x^2 - 1)(x^2 + 1 - 2x) = (x - 1)(x + 1)(x - 1)^2 = (x - 1)^3(x + 1) \end{aligned}$$

$$7 - 6x - x^2 = -(x - 1)(x + 7)$$

$$\frac{(x - 1)^3(x + 1)(x - 2)^2}{-(x - 1)(x + 7)} \geq 0$$



Ответ: $-7 < x \leq -1; x = 2$



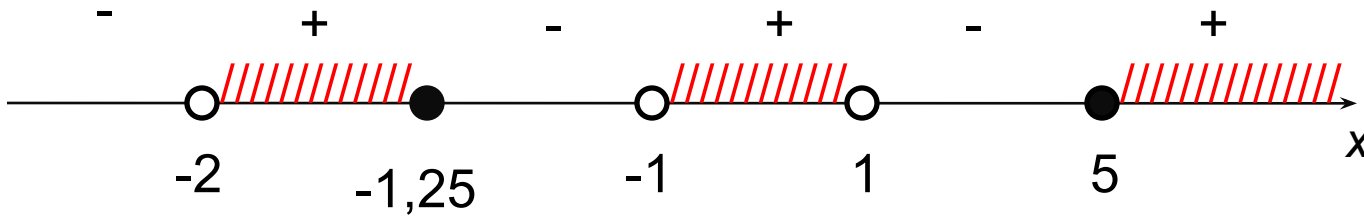
C2. Решите неравенство $\frac{6}{x-1} - \frac{3}{x+1} - \frac{7}{x+2} \leq 0$

Решение.

Преобразуем левую часть неравенства, приведя дроби к общему

знаменателю:
$$\frac{6(x+1)(x+2) - 3(x-1)(x+2) - 7(x^2-1)}{(x-1)(x+1)(x+2)} \leq 0$$

$$\frac{-4x^2 + 15x + 25}{(x-1)(x+1)(x+2)} \leq 0; \quad \frac{4x^2 - 15x - 25}{(x-1)(x+1)(x+2)} \geq 0; \quad \frac{4(x+1,25)(x-5)}{(x-1)(x+1)(x+2)} \geq 0;$$



$$-2 < x \leq -1,25; \quad -1 < x < 1; \quad x \geq 5$$

Ответ: $(-2; -1,25] \cup (-1; 1) \cup [5; +\infty)$

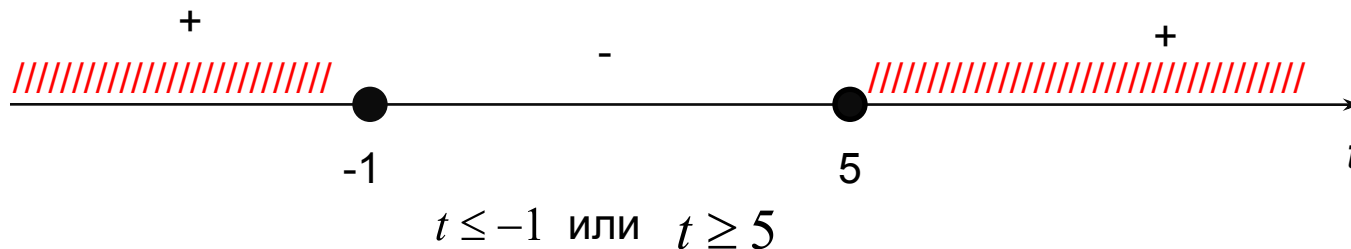


С3. Решите неравенство $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x - 3) \geq 5$

Решение.

Пусть $x^2 + 3x + 1 = t$, тогда $t(t - 4) \geq 5$;

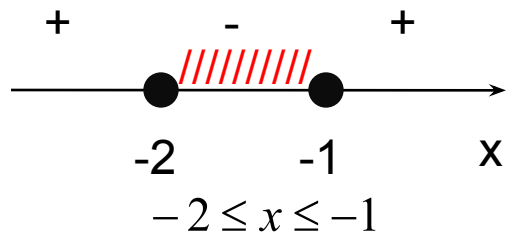
$$t^2 - 4t - 5 \geq 0; (t - 5)(t + 1) \geq 0;$$



1) $x^2 + 3x + 1 \leq -1$

$$x^2 + 3x + 2 \leq 0$$

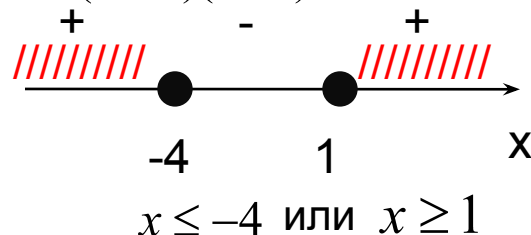
$$(x + 1)(x + 2) \leq 0$$



2) $x^2 + 3x + 1 \geq 5$

$$x^2 + 3x - 4 \geq 0$$

$$(x + 4)(x - 1) \geq 0$$



Ответ: $(-\infty; -4] \cup [-2; -1] \cup [1; +\infty)$



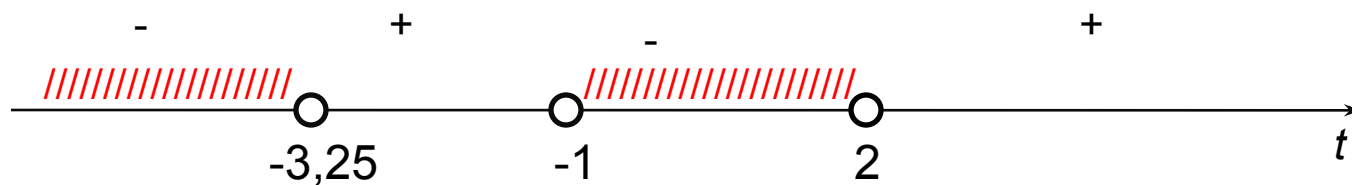
С4. Решите неравенство $2x^2 + 2x + 1 - \frac{15}{x^2 + x + 1} < 0$

Решение.

Пусть $x^2 + x = t$, тогда $2t + 1 - \frac{15}{t + 1} < 0$

$$\frac{2t^2 + 3t - 14}{t + 1} < 0$$

$$\frac{2(t - 2)(t + 3,5)}{t + 1} < 0$$



$$t < -3,5 \quad \text{или} \quad -1 < t < 2$$



$$\begin{aligned}
 1) \quad & x^2 + x < -3,5; \\
 & x^2 + x + 3,5 < 0; \\
 & 2x^2 + 2x + 7 < 0; \\
 & \text{решений нет;}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & -1 < x^2 + x < 2 \\
 & \begin{cases} x^2 + x < 2 \\ x^2 + x > -1 \end{cases} \\
 & \begin{cases} x^2 + x - 2 < 0 \\ x^2 + x + 1 > 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} (x-1)(x+2) < 0 \\ x \in R \end{cases} \\
 & \begin{cases} -2 < x < 1 \\ x \in R \end{cases} \\
 & -2 < x < 1
 \end{aligned}$$

Ответ: (- 2; 1)



Неравенства, содержащие знак модуля

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{ если } f(x) \geq 0 \\ -f(x), \text{ если } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{cases}$$

$$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{cases}$$

$$|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) > g^2(x)$$

где $f(x)$ и $g(x)$ - некоторые функции



A1. Найдите число целых решений неравенства $|3 - 2x| < 4$

1) 3;

2) 4;

3) 5;

4) целых решений
бесконечно много.

Решение.

$$-4 < 3 - 2x < 4$$

$$-7 < -2x < 1$$

$$-\frac{1}{2} < x < 3\frac{1}{2}$$

0; 1; 2; 3 – целые решения неравенства

Ответ: 4



A2. Решите неравенство $|3x + 61| < -1$

- 1) $(-\infty; -20\frac{2}{3}) \cup (-20; +\infty)$ 2) $(-\infty; -20\frac{2}{3})$ 3) $(-\infty; +\infty)$ 4) **решений нет**

Решение.

Так как $|3x + 61| \geq 0$, то исходное неравенство решений не имеет

Ответ: решений нет



А3. Решите неравенство $|3x - 2| > -2$

1) Решений нет 2) $(-\infty; +\infty)$ 3) $(-1; 1)$ 4) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

Решение.

Так как $|3x - 2| \geq 0$, то исходное неравенство справедливо для любого действительного x

Ответ: $(-\infty; +\infty)$

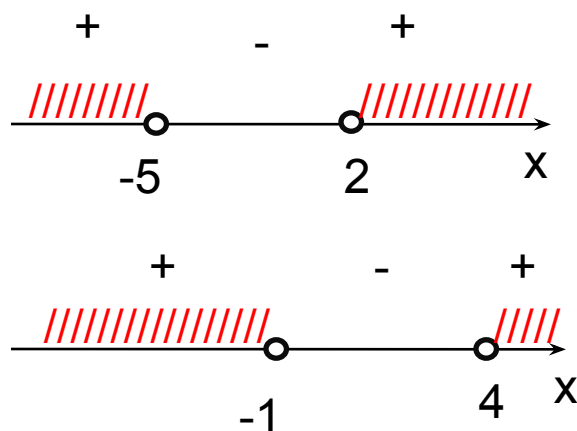


C1. Решите неравенство $3|x-1| + x^2 > 7$

Решение.

$$3|x-1| > 7 - x^2$$

$$\begin{cases} 3(x-1) > 7 - x^2 \\ 3(x-1) < -(7 - x^2) \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 + 3x - 10 > 0 \\ x^2 - 3x - 4 > 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} (x+5)(x-2) > 0 \\ (x+1)(x-4) > 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x < -5 \\ x > 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x < -1 \\ x > 4 \end{cases}$$

$$x < -1 \text{ или } x > 2$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$$



C2. Решите неравенство $|x - 6| > |x^2 - 5x + 9|$

Решение.

$$(x - 6)^2 > (x^2 - 5x + 9)^2$$

$$(x - 6)^2 - (x^2 - 5x + 9)^2 > 0$$

Применим формулу разности квадратов

$$(x - 6 - x^2 + 5x - 9) - (x - 6 + x^2 - 5x + 9) > 0$$

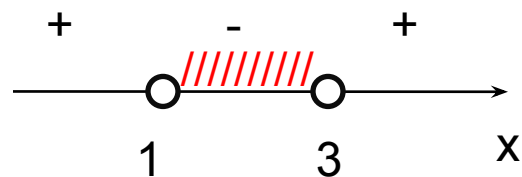
$$(-x^2 + 6x - 15)(x^2 - 4x + 3) > 0$$

$$(x^2 - 6x + 15)(x^2 - 4x + 3) < 0$$

Так как $x^2 - 6x + 15 > 0$ для всех x , то

$$x^2 - 4x + 3 < 0$$

$$(x - 1)(x - 3) < 0$$



$$1 < x < 3$$

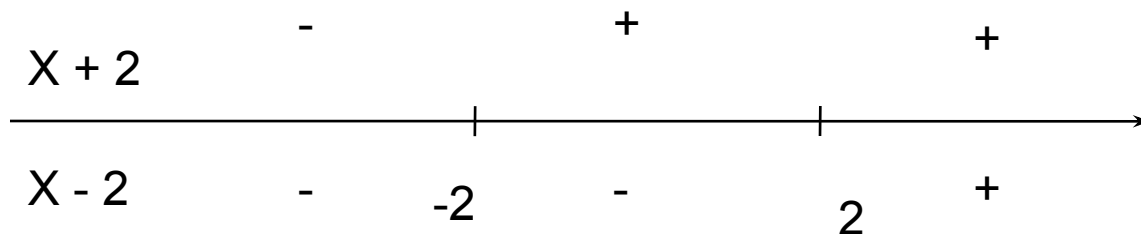
Ответ: $1 < x < 3$



С3. Решите неравенство $|x + 2| + |x - 2| < 6$

Решение.

Используем метод интервалов для модулей



Решим неравенство в каждом из трех промежутков

$$\begin{aligned} 1) \quad & \begin{cases} x < -2 \\ -(x + 2) - (x - 2) < 6 \end{cases} & 2) \quad \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ (x + 2) - (x - 2) < 6 \end{cases} \\ & \begin{cases} x < -2 \\ -2x < 6 \end{cases} & & \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ 4 < 6 \end{cases} \\ & \begin{cases} x < -2 \\ x > -3 \end{cases} & & \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \in R \end{cases} \\ & -3 < x < -2 & & -2 \leq x \leq 2 \end{aligned}$$



$$3) \quad \begin{cases} x > 2 \\ (x+2) + (x-2) < 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2 \\ 2x < 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2 \\ x < 3 \end{cases}$$

$$2 < x < 3$$

$$\begin{bmatrix} -3 < x < -2 \\ -2 \leq x \leq 2 \\ 2 < x < 3 \\ -3 < x < 3 \end{bmatrix}$$

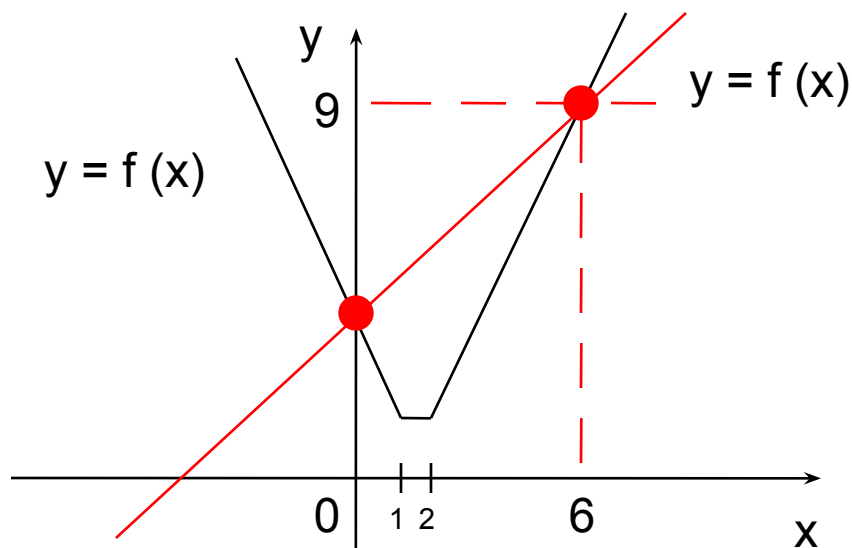
Ответ: $-3 < x < 3$



С4. Решите неравенство $|x - 1| + |2 - x| < x + 3$

Решение.

Построим графики функций $f(x) = |x - 1| + |2 - x|$ и $g(x) = x + 3$



Найдем абсциссы точек пересечения графиков

График функции $f(x)$ расположен ниже графика функции $g(x)$ при $x \in (0; 6)$

Ответ: $(0; 6)$

В1. Найдите количество целочисленных решений неравенства

$$\frac{x^2 - 3x - 10}{1 + \sqrt{4 - x^2}} \leq 0$$

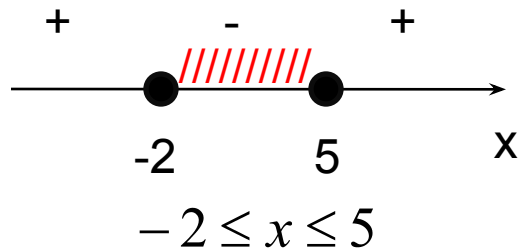
Решение.

Так как $1 + \sqrt{4 - x^2} > 0$ при $-2 \leq x \leq 2$, то

$$x^2 - 3x - 10 \leq 0$$

$$(x + 2)(x - 5) \leq 0$$

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ -2 \leq x \leq 5 \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$$



- 2; -1; 0; 1; 2 - целые решения неравенства

Ответ: 5

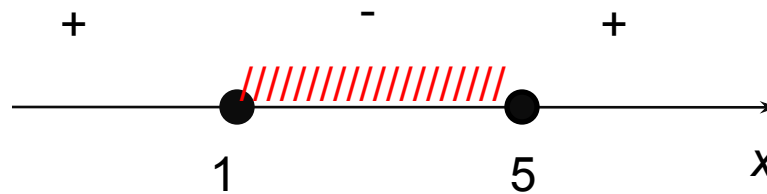


В2. Найти количество целочисленных решений неравенства $\frac{6x - x^2 - 5}{2 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{2}} \geq 0$

Решение.

$$2 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{2} > 0, \quad \cos \frac{\pi x}{2} \neq 0; \quad \frac{\pi x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \quad x \neq 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$6x - x^2 - 5 \geq 0; \quad x^2 - 6x + 5 \leq 0; \quad (x - 5)(x - 1) \leq 0$$



$1 \leq x \leq 5$ 1; 2; 3; 4; 5 – целые решения неравенства

Условию $x \neq 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$ удовлетворяют числа 2 и 4

Ответ: 2



C1. Найдите все значения x , для которых точки графика функции $f(x) = \frac{4^{2x} - 9 \cdot 4^x}{17 - 10x}$ лежат выше соответствующих точек графика функции $g(x) = \frac{8}{10x - 17}$

Решение.

Составим неравенство, которому удовлетворяют значения x :

$$f(x) > g(x); \quad \frac{4^{2x} - 9 \cdot 4^x}{17 - 10x} > \frac{8}{10x - 17}; \quad \frac{4^{2x} - 9 \cdot 4^x + 8}{17 - 10x} > 0$$

Решим данное неравенство методом интервалов

Найдем те точки, в которых обращаются в ноль числитель и знаменатель дроби:

а) $4^{2x} - 9 \cdot 4^x + 8 = 0$

$$4^x = t, \quad t > 0$$

$$t^2 - 9t + 8 = 0$$

$$t = 8, \quad t = 1,$$

$$4^x = 1, \quad 4^x = 8,$$

$$x = 0, \quad x = 1,5.$$

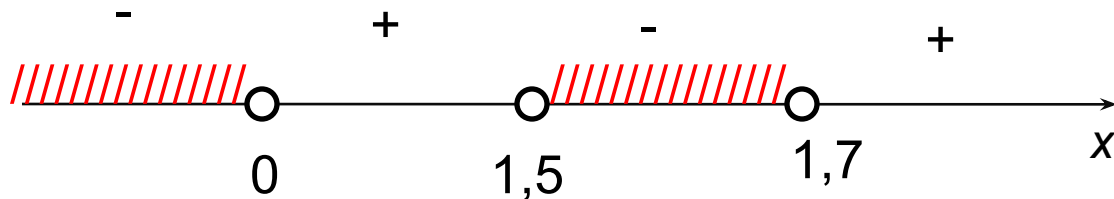
б) $17 - 10x = 0$

$$x = 1,7$$



Запишем неравенство в виде $\frac{(4^x - 4^0)(4^x - 4^{1,5})}{-10(x - 1,7)} > 0;$

$$\frac{(4^x - 4^0)(4^x - 4^{1,5})}{x - 1,7} < 0$$



$$x < 0; \quad 1,5 < x < 1,7$$

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (1,5; 1,7)$



С2. Решите неравенство $5^{\log_5^2 x + 1} + x^{\log_5 x} \geq 6 \sqrt[4]{5}$

Решение.

ОДЗ: $x > 0$; пусть $\log_5 x = t$, тогда $x = 5^t$

$$5^{t^2+1} + 5^{t^2} \geq 6 \sqrt[4]{5}$$

$$5 \cdot 5^{t^2} + 5^{t^2} \geq 6 \sqrt[4]{5}$$

$$6 \cdot 5^{t^2} \geq 6 \cdot 5^{\frac{1}{4}}$$

$$5^{t^2} \geq 5^{\frac{1}{4}}$$

$$t^2 \geq \frac{1}{4}$$

$$|t| \geq \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} t \geq \frac{1}{2} \\ t \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_5 x \geq \frac{1}{2} \\ \log_5 x \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \sqrt{5} \\ x \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \geq \sqrt{5} \\ x \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \sqrt{5} \\ 0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Ответ: $\left(0; \frac{1}{\sqrt{5}}\right] \cup [\sqrt{5}; +\infty)$



Литература

- ЕГЭ 2009. Математика: сборник заданий/ В.В. Кочагин, М.Н. Кочагина. – М.: Эксмо, 2008
- ЕГЭ 1009. Математика: сборник экзаменационных заданий / Авт.- сост. Л.О. Денищева и др. – М.: Эксмо, 2009
- Математика. Подготовка К ЕГЭ / Г.Г. Мамонтова. – М.: Новое знание, 2008
- ЕГЭ 2009, Математика. Справочник / Авт. – сост. А.М. Титаренко и др. – М.: Эксмо, 2008
- Математика: практикум для старшеклассников и абитуриентов / Авт. – сост. А.В. Борзенков. – Волгоград: Учитель, 2009
- ЕГЭ. Математика: Раздаточный материал тренировочных тестов / С.Л. Никушкина, О.И. Судавная. – СПб.: Тригон, 2009
- Система подготовки к ЕГЭ по математике. А.Семенов, Е. Юрченко. – Газета «Математика» №21, 2008

