

# Математический кружок

---

## Занятие 3 ИНВАРИАНТЫ



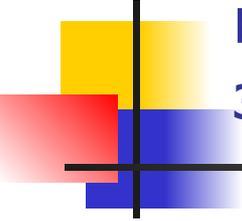
# ИНВАРИАНТЫ

---

- *Инвариантом* некоторого преобразования называется величина или свойство, не изменяющееся при этом преобразовании.

В качестве инвариантов рассматриваются:

- -чётность (нечётность)
- -остаток от деления
- -перестановки
- -раскраски и т.д.



# Чётность — одна из наиболее часто встречающихся идей при решении олимпиадных задач

---

- Какие числа называются чётными (нечётными)?
- Что означает термин «разная чётность»?

Число  $x+2$  имеет ту же чётность, что и число  $x$  (или оба чётные, или оба нечётные), а при прибавлении единицы чётность числа меняется.



Лемма 1. Чётность суммы нескольких чисел совпадает с чётностью количества нечётных слагаемых.

---

Пример 1. Определить чётность числа:

а)  $1 + 2 + 3 + \dots + 10$

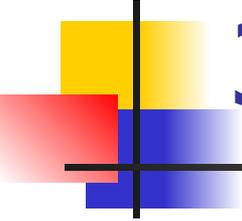
б)  $3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$

Лемма 2. Знак произведения нескольких (отличных от нуля) чисел определяется чётностью количества отрицательных сомножителей.

Пример 2. Определить знак произведения

а)  $(-1)(-2)(-3)(-4)$

б)  $(-1)^2(-3)^4(-5)$

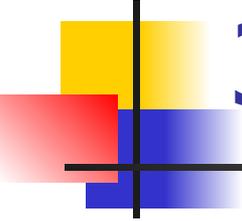


# Задачи 1 и 2

---

1. Учитель написал на листке бумаги число 10. 15 учеников передают листок друг другу, и каждый прибавляет к числу или отнимает от него единицу – как хочет. Может ли в результате получиться число 0?

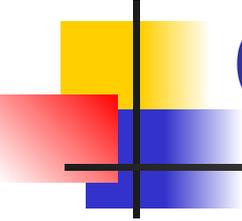
2. На доске записаны 15 чисел: 8 нулей и 7 единиц. Вам предлагается 14 раз подряд выполнить такую операцию: зачеркнуть любые два числа, и если они одинаковые, то допишите к оставшимся числам ноль, а если разные – то единицу. Какое число останется на доске?



## Задачи 3 и 4

---

3. Все костяшки домино выложены в цепь (по правилам домино).  
На одном конце цепи оказалось 3 очка.  
Сколько очков на другом конце?
  
4. Квадрат размером  $5 \times 5$  заполнен числами так, что произведение чисел в каждой строке отрицательно. Докажите, что найдётся столбец, в котором произведение чисел также отрицательно.

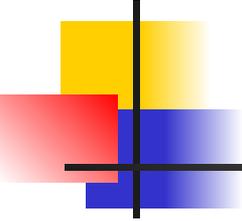


# Самостоятельная работа

---

1. Можно ли разменять купюру достоинством 50 рублей с помощью 15 монет достоинством 1 и 5 рублей?
2. Конь вышел с поля  $a1$  шахматной доски и через несколько ходов вернулся на него. Докажите, что он сделал чётное число ходов.
3. 2012 человек выстроились в шеренгу. Всегда ли можно их расставить по росту, если за один ход разрешается переставлять только 2 людей, стоящих через одного?
4. 16 корзин расположили по кругу. Можно ли в них разложить 55 арбузов так, чтобы количество арбузов в любых двух соседних корзинах отличалось на 1?

# Решение самостоятельной работы



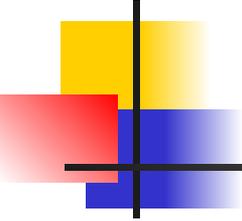
---

1. Нет, т.к. сумма 15 нечётных чисел – число нечётное, а 50 – число чётное.

2. При каждом своём ходе конь меняет цвет поля, поэтому при возвращении обратно он должен сделать чётное число ходов. Что и требовалось доказать.

3. Не всегда. При перестановке сохраняется чётность номера места. Поэтому, если самый высокий человек, например, стоит вторым, то он никогда не станет первым. Здесь число 2012 роли не играет.

## Решение самостоятельной работы



---

4. Так как число арбузов в соседних корзинах отличается на 1, то чётность числа арбузов в этих корзинах будет разной. Тогда чётность числа арбузов в корзинах будет чередоваться, поэтому в половине корзин будет чётное число арбузов, а в половине – нечётное. Тогда общее число арбузов в 8 корзинах с чётным числом арбузов и в 8 корзинах с нечётным числом арбузов будет чётным. По условию же всего арбузов 55, нечётное число. Значит, разложить нельзя.

# Домашнее задание

12. На столе стоят 6 стаканов. Из них 5 стоят правильно, а один перевернут вверх дном. Разрешается переворачивать одновременно 4 любых стакана. Можно ли все стаканы поставить правильно?

13. Мише учитель математики поставил в дневник отметку «2». Миша, желая скрыть от мамы данный факт, порвал свой дневник на 4 части. Этому ему показалось мало, поэтому некоторые из этих частей (может быть, и не все) он порвал на 4 части и т.д. Мама нашла 20 кусочков дневника. Все ли куски нашла мама?

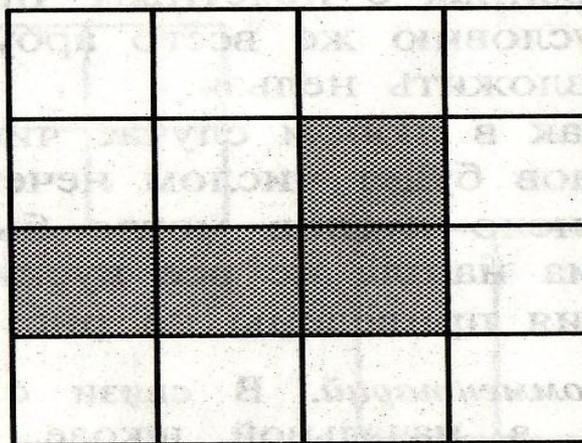


Рис. 14

14. Разрежьте квадрат на 4 части одинаковой формы и размера так, чтобы в каждую часть попало ровно по одному заштрихованному квадрату (рис. 14).

## Решение домашнего задания

12. Нет, т.к. в любом случае число перевернутых вверх дном стаканов будет числом нечётным.

13. Так как число кусков могло быть 4; 7; 10; 13; 16; 19; 22, то мама Нашла не все куски.

14. Решения приведены на рисунках

