

Математическая логика

Тема 2

Основные понятия

- Логика – это наука о способах доказательства
- Математическая логика представляет собой формальный математический аппарат, изучающий различные способы доказательства логических рассуждений
- Высказывание – предложение, относительно которого можно утверждать, истинно оно или ложно.
- Простейшую из формальных логических теорий называют алгеброй высказываний.
- Любое логическое рассуждение состоит из высказываний
- Будем обозначать элементарные высказывания латинскими буквами $A, B, C, \dots, X, Y, Z \dots$

Основные понятия

- Если высказывание истинно (ложно) в любой логической ситуации, то оно называется тождественно истинным (ложным), или логической константой, обозначаемой соответственно И(Л). Высказывания, истинные в одних логических ситуациях и ложные в других, называются переменными высказываниями.
- Высказыванию, истинному во всех логически возможных случаях, т.е. логической константе, обозначаемой 1 или И, будет соответствовать универсальное множество.
- Высказыванию, ложному во всех логически возможных случаях, т.е. логической константе, обозначаемой 0 или Л, будет соответствовать пустое множество.
- Операции алгебры высказываний образуют Булеву алгебру.

Логические операции

- **Конъюнкция** двух элементарных высказываний истинна тогда и только тогда, когда оба элементарных высказывания истинны. Обозначается $A \wedge B$, $A \& B$, AB . Читается: «А и В».
- **Дизъюнкция** двух элементарных высказываний является ложным высказыванием тогда и только тогда, когда оба высказывания, ее составляющие, ложны. Обозначается $A \vee B$. Читается: «А или В». Разделительный смысл союза «или» исключается.
- **Отрицание**. Единственная логическая операция, относящаяся к одному высказыванию, – унарная, в отличие от остальных – бинарных. Обозначается: $\bar{A}$, $\neg A$. Читается: «не А».

Логические операции

- **Импликация** ложна тогда и только тогда, когда посылка A истинна, а следствие B – ложь. Обозначается $A \rightarrow B$.
Читается: «если A , то B ». При этом A называют посылкой, B – следствием.
- **Двойная импликация** является истинностным высказыванием тогда и только тогда, когда высказывания A и B , ее составляющие, принимают одинаковое значение истинности или ложности. Обозначается $A \leftrightarrow B$ ($A \sim B$).
Читается: « A тогда и только тогда, когда B ».

Таблицы истинности логических операций

Число строк истинностной таблицы, очевидно, равно 2^n , где n – число элементарных высказываний.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$		$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1	1

Пример

- A – «Этот четырехугольник – параллелограмм»
- B – «Этот четырехугольник – ромб»
- Конъюнкция $A \wedge B$: «Этот четырехугольник есть параллелограмм и ромб».
- Дизъюнкция $A \vee B$: «Этот четырехугольник есть параллелограмм или ромб».
- Импликация $A \rightarrow B$: «Если этот четырехугольник есть параллелограмм, то он – ромб».
- Двойная импликация $A \leftrightarrow B$: «Этот четырехугольник есть параллелограмм тогда и только тогда, когда он – ромб».
- Отрицание $\bar{A}$: «Неверно, что этот четырехугольник есть параллелограмм» или «Этот четырехугольник не параллелограмм».

Пример

Построим истинностную таблицу сложного высказывания

$$S = (A \rightarrow B) \wedge C \vee \overline{(A \leftrightarrow \overline{C})}$$

A	B	C	$A \rightarrow B$	$(A \rightarrow B) \wedge C$	$\overline{C}$	$A \leftrightarrow \overline{C}$	$\overline{(A \leftrightarrow \overline{C})}$	
1	1	1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0	1
0	0	0	1	0	1	0	1	1

Формулы алгебры высказываний

- Отдельно стоящая буква $A, B, C, \dots, X, Y, Z \dots$ – формула.
- Если A, B – формулы, то формулами являются и $\bar{A}, \bar{B}, A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B$.
- Других формул нет.
- Две формулы алгебры высказываний называются равносильными, если на всех одинаковых наборах значений составляющих переменных высказываний они принимают одинаковые значения 1 или 0.

Основные равносильные формулы алгебры высказываний

Идемпотентность.

$$\text{а) } A \vee A = A;$$

$$\text{б) } A \wedge A = A.$$

Коммутативность.

$$\text{а) } A \vee B = B \vee A;$$

$$\text{б) } A \wedge B = B \wedge A.$$

Ассоциативность.

$$\text{а) } A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C;$$

$$\text{б) } A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C.$$

Дистрибутивность.

$$\text{а) } A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C);$$

$$\text{б) } A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C).$$

Законы де Моргана.

$$\text{а) } \overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B};$$

$$\text{б) } \overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}.$$

Основные равносильные формулы алгебры высказываний

Законы исключенного третьего и операции с истинными и ложными высказываниями.

а) $A \vee 1 = 1$;

б) $A \vee 0 = A$;

в) $A \wedge 1 = A$;

г) $A \wedge 0 = 0$;

д) $A \wedge \bar{A} = 0$;

е) $A \vee \bar{A} = 1$;

ж) $\bar{\bar{A}} = A$;

з) $\bar{1} = 0$;

и) $\bar{0} = 1$.

Основные равносильные формулы алгебры высказываний

- $A \rightarrow B = \bar{A} \vee B$
- $A \leftrightarrow B = AB \vee \bar{A} \bar{B}$
- $A \leftrightarrow B = (\bar{A} \vee B) \wedge (A \vee \bar{B})$
- Для того, чтобы убедиться в равносильности двух формул, можно построить их истинностные таблицы и убедиться в их совпадении.
- Равносильность формул можно установить также, убедившись в совпадении множеств истинности рассматриваемых высказываний.
- Установить равносильность формул можно также путем их преобразования.

Пример

- Проверить равносильность двух формул

$$\alpha = (x \rightarrow \bar{y}) \rightarrow (\bar{z} \rightarrow x) \quad \beta = (y \rightarrow \bar{x}) \rightarrow (\bar{x} \rightarrow z)$$

- Преобразуем формулы, заменив импликацию равносильной формулой

$$\alpha = (x \rightarrow \bar{y}) \rightarrow (\bar{z} \rightarrow x) = (\bar{x} \vee \bar{y}) \rightarrow (\bar{\bar{z}} \vee x) = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} \vee \bar{z} \vee x = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{z} \vee x = xy \vee x \vee z$$

$$\beta = (y \rightarrow \bar{x}) \rightarrow (\bar{x} \rightarrow z) = (\bar{y} \vee \bar{x}) \rightarrow (\bar{\bar{x}} \vee z) = \overline{\bar{y} \vee \bar{x}} \vee x \vee z = xy \vee x \vee z$$

Пример

По обвинению в ограблении перед судом предстали Иванов, Петров, Сидоров. Следствием установлено следующее:

- 1) Если Иванов не виновен или Петров виновен, то Сидоров виновен.
- 2) Если Иванов не виновен, то Сидоров не виновен.

Виновен ли Иванов?

Решение

- А – Иванов виновен,
- В – Петров виновен,
- С – Сидоров виновен.

Установленные факты с помощью логических связей примут

вид: $(\bar{A} \vee B) \Rightarrow C$

1)

$$\bar{A} \Rightarrow \bar{C}$$

2)

Таблица истинности полученных высказываний

A	B	C	$\bar{A}$	$\bar{C}$	$\bar{A} \vee B$	$(\bar{A} \vee B) \Rightarrow C$	$\bar{A} \Rightarrow \bar{C}$
0	0	0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1	1	1

Когда оба установленные утверждения истинны, то и высказывание A также истинно. Таким образом, Иванов виновен.

Варианты импликации

- «А достаточное условие для В» выражается формулой: $A \rightarrow B$,
- «А необходимое условие для В» – выражается формулой $B \rightarrow A$ (конверсия импликации)
- Достаточное условие $A \rightarrow B$ может быть выражено формулой $\bar{B} \rightarrow \bar{A}$, называемой контрпозицией
- Необходимое условие может быть выражено формулой $\bar{A} \rightarrow \bar{B} = B \rightarrow A$, называемой конверсией контрпозиции
- «А достаточно для В»: $A \rightarrow B = \bar{B} \rightarrow \bar{A}$, «А только, если В»;
- «А необходимо для В»: $B \rightarrow A = \bar{A} \rightarrow \bar{B}$.
- Необходимое и достаточное условие выражается двойной импликацией $A \leftrightarrow B = (\bar{A} \vee B)(A \vee \bar{B})$

Пример

Написать формулы следующих высказываний.

- S_1 : дифференцируемая функция непрерывна;
- S_2 : функция дифференцируема только в случае ее непрерывности;
- S_3 : функция непрерывна только в случае ее дифференцируемости;
- S_4 : дифференцируемость функции есть необходимое условие ее непрерывности;
- S_5 : дифференцируемость функции есть достаточное условие ее непрерывности;
- S_6 : дифференцируемость функции есть необходимое и достаточное условие ее непрерывности.

Решение

- Введем обозначения: A – данная функция дифференцируема, B – данная функция непрерывна.
- Очевидно: $S1 = A \rightarrow B$;
- $S2$: « A только, если B », т.е. «Если $\bar{B}$, то $\bar{A}$ », т.е. $\bar{B} \rightarrow \bar{A} = A \rightarrow B$;
- $S3$: « B только, если A », т.е. $\bar{A} \rightarrow \bar{B} = B \rightarrow A$;
- $S4 = B \rightarrow A$;
- $S5 = A \rightarrow B$;
- $S6 = A \leftrightarrow B$.

Высказывания $S1$, $S2$, $S5$ выражают достаточность A для B , а высказывания $S3$, $S4$ – необходимость.

Функции алгебры высказываний

Будем рассматривать функции, аргументы (переменные) которых определены на множестве $E=\{0,1\}$, и такие, что значения эти функции принимают на том же множестве $E=\{0,1\}$,

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in E \quad \alpha_i \in E$$

при $(i=1, 2, \dots, n)$. Эти функции будем называть **функциями алгебры логики** или **булевыми функциями**.

Пусть логическая функция зависит от n аргументов. Различных наборов значений истинности и ложности аргументов существует 2^n (строки истинностной таблицы).

Число логических функций, зависящих от n аргументов

Основные функции алгебры логики

1. $f_1(x) = 0$ – константа 0. Данная функция принимает на всех наборах переменной x значение 0.
2. $f_2(x) = 1$ – константа 1. Данная функция принимает на всех наборах переменной x значение 1.
3. $f_3(x) = x$ – тождественная функция. Данная функция принимает те же значения, что и переменная x .
4. $f_4(x) = \bar{x}$ – отрицание x ($\bar{x}$ читается «не x ») Данная функция принимает значения, противоположные переменной x .

Основные функции алгебры логики

5. $f_5(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$ — конъюнкция x_1 и x_2 (читается « x_1 и x_2 »). Вместо знака $\wedge$ употребляется знак $\cdot$ или вообще знак опускается, т.е. пишут x_1x_2 . Эту функцию часто называют логическим умножением. Принимает значение 1 только на единичном наборе, т.е. когда обе переменные x_1 и x_2 равны 1.

6. $f_6(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$ — дизъюнкция x_1 и x_2 (читается « x_1 или x_2 »). Эту функцию часто называют логическим сложением. Принимает значение 0 только на нулевом наборе, т.е. когда обе переменные x_1 и x_2 равны 0.

7. $f_7(x_1, x_2) = x_1 \rightarrow x_2$ — импликация x_1 и x_2 (читается «из x_1 следует x_2 »). Эту функцию часто называют логическим следствием.

Основные функции алгебры логики

8. $f_8(x_1, x_2) = x_1 \sim x_2 = x_1 \leftrightarrow x_2$ — эквивалентность x_1 и x_2 (читается « x_1 и x_2 эквивалентны»).

9. $f_9(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$ — сложение по модулю 2 (исключающее «или»).

10. $f_{10}(x_1, x_2) = x_1 | x_2 = \overline{x_1 x_2}$ — штрих Шеффера.

11. $f_{11}(x_1, x_2) = x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2}$ — стрелка Пирса.

Истинностные таблицы основных функций логики

x	0	1	x	$\bar{x}$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

$x_1 x_2$	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \rightarrow x_2$	$x_1 \sim x_2$	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 x_2$	$x_1 \downarrow x_2$
0 0	0	0	1	1	0	1	1
0 1	0	1	1	0	1	1	0
1 0	0	1	0	0	1	1	0
1 1	1	1	1	1	0	0	0

ФИКТИВНЫЕ И СУЩЕСТВЕННЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Переменная x_i называется существенной для функции $F(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$, если существуют такие значения $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n$ переменных $x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$, что $F(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) \neq F(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$. Если x_i не является существенной переменной, то она называется несущественной или фиктивной.

Если переменная x_i – фиктивная, то функцию $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ можно свести к равной ей функции $g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ от $(n-1)$ -ой переменной. Для этого нужно в таблице функции f вычеркнуть все строки, где $x_i=1$ (или $x_i=0$), и столбец, соответствующий переменной x_i .

Пример

- Рассмотрим функцию $f(x_1, x_2)$, заданную таблицей

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

- Содержит ли $f(x_1, x_2)$ фиктивные переменные? Если да, требуется свести функцию «f» к равной ей функции «g» от одной переменной.

Решение

- Проверим переменную x_1 .

Рассмотрим наборы $\sigma_1=(0, 0)$, $\tilde{\sigma}_1=(1, 0)$; $f(\sigma_1)=1$, $f(\tilde{\sigma}_1)=0$, т.е. $f(\sigma_1) \neq f(\tilde{\sigma}_1)$.

Рассмотрим наборы $\sigma_2=(0, 1)$, $\tilde{\sigma}_2=(1, 1)$; $f(\sigma_2)=1$, $f(\tilde{\sigma}_2)=0$, т.е. $f(\sigma_2) \neq f(\tilde{\sigma}_2)$.

x_1 – существенная переменная.

Проверим переменную x_2 .

Рассмотрим наборы $\sigma_1=(0, 0)$, $\tilde{\sigma}_1=(0, 1)$; $f(\sigma_1)=1$, $f(\tilde{\sigma}_1)=1$, т.е. $f(\sigma_1) = f(\tilde{\sigma}_1)$.

Рассмотрим наборы $\sigma_2=(1, 0)$, $\tilde{\sigma}_2=(1, 1)$; $f(\sigma_2)=0$, $f(\tilde{\sigma}_2)=0$, т.е. $f(\sigma_2) = f(\tilde{\sigma}_2)$.

x_2 – фиктивная переменная.

Решение

- Вычеркиваем в таблицы истинности первую и третью строки: (0,0) и (1,0), где $x_2=0$ (или вторую и четвертую: (0,1) (1,1), где $x_2=1$) и столбец, соответствующий фиктивной переменной x_2 , получим функцию переменной x_1 : $g(x_1) = f(x_1, x_2)$.

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

$$g(x) = f(x_1) = \overline{x_1} = \overline{x}$$

x	g
0	1
1	0

Формулы алгебры логики

- Пусть V – некоторое подмножество функций из множества E всех логических функций. Каждая функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ из V называется формулой над V .
- Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – функция из V и $A_1, A_2, \dots, A_n$ – выражения, являющиеся либо формулами над V , либо символами переменных. Тогда выражение $f(A_1, A_2, \dots, A_n)$ называется формулой над V .
- Тавтологией называют всегда истинное логическое выражение, какое бы при этом значение не принимала переменная x ($f(x) = 1$).
- Противоречие, напротив, всегда ложное выражение ($f(x) = x \wedge \bar{x} = 0$).

Формулы алгебры логики

- Каждой формуле над B соответствует функция алгебры логики, причем различным формулам могут соответствовать равные функции, т.е. функции, принимающие равные значения на одинаковых наборах переменных.
- Формулы U и V над B называются эквивалентными, если соответствующие им функции f_U и f_V равны, т.е. $f_U = f_V$.
- Запись $U=V$ будет означать, что формулы U и V эквивалентны.

$$0 = x \wedge \bar{x}$$

$$(x \rightarrow y) = (\bar{y} \rightarrow \bar{x})$$

$$(x \rightarrow y) = (\bar{x} \vee y)$$

Основные законы логики Буля

Коммутативность:

$$x \vee y = y \vee x$$

$$xy = yx$$

$$x \oplus y = y \oplus x$$

$$x \sim y = y \sim x.$$

Ассоциативность:

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$$

$$(xy)z = x(yz)$$

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Дистрибутивность:

$$(x \oplus y)z = (xz) \oplus (yz)$$

$$(x \vee y)z = (xz) \vee (yz)$$

$$(xy) \vee z = (x \vee z) \cdot (y \vee z).$$

Правила де Моргана:

$$\overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$\overline{x \cdot y} = \bar{x} \vee \bar{y}.$$

Основные законы логики Буля

Законы склеивания

$$(x \vee \bar{y})(x \vee y) = x$$

$$x\bar{y} \vee xy = x$$

$$x \vee xy = x$$

$$x(x \vee y) = x$$

Законы поглощения.

$$x \vee x = x$$

$$x \cdot x = x$$

$$x \vee \bar{x} = 1$$

$$x \cdot \bar{x} = 0$$

$$x \vee 1 = 1$$

$$x \cdot 1 = x$$

$$x \vee 0 = x$$

$$x \cdot 0 = 0.$$

Другие эквивалентности

$$\overline{\overline{x}} = x,$$

$$x|y = \overline{x \cdot y}$$

$$x \downarrow y = \overline{x \vee y}$$

$$x \rightarrow y = \bar{x} \vee y$$

$$x \oplus y = (x \cdot \bar{y}) \vee (\bar{x} \cdot y)$$

$$x \sim y = \overline{x \oplus y} = (x \cdot y) \vee (\bar{x} \cdot \bar{y}).$$

Принцип двойственности

- Булева функция $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *двойственной* к функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})}$.
- Например, функция $f^*(x, y) = xy$ является двойственной к функции

$$f(x, y) = x \vee y$$

$$f^*(x, y) = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}} = \overline{\overline{x}} \wedge \overline{\overline{y}} = xy$$

Принцип двойственности

Теорема. Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, $g_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\dots$, $g_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – булевы функции и пусть $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(g_1(x_1, x_2, \dots, x_n), g_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, x_2, \dots, x_n))$ – суперпозиция функций $f, g_1, g_2, \dots, g_m$. Тогда двойственная функция от суперпозиции функций равна суперпозиции двойственных функций:

$$\Phi^*(x_1, x_2, \dots, x_m) = f^*(g_1^*(x_1, x_2, \dots, x_n), g_2^*(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, g_m^*(x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

- Две булевы функции равны тогда и только тогда, когда равны двойственные им функции.

Пример

- Пусть $f = x \vee \bar{x}y$, $g = x \vee y$. Доказать, что функции равны, т.е. $f = g$
- Построим двойственные функции.

$$f^* = \overline{f(\bar{x}, \bar{y})} = \overline{\bar{x} \vee \bar{x}y} = \overline{\bar{x} \vee x\bar{y}} = \bar{x} \wedge x\bar{y} = x(\bar{x} \vee \bar{y}) = x(\bar{x} \vee y) = x\bar{x} \vee xy = xy$$

$$g^* = \overline{g(\bar{x}, \bar{y})} = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} = \bar{x} \wedge \bar{y} = xy$$

- Т.к. $f^* = g^*$, то $f = g$, т.е. $x \vee \bar{x}y = x \vee y$.

Полные системы связок

- Система связок логики высказываний называется **полной**, если всякая формула логики высказываний равносильна некоторой формуле, содержащей лишь связки этой системы.
- Дизъюнкция, конъюнкция, отрицание образуют полную систему связок.
- $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$ – полные системы связок.
- $\{\neg, \leftrightarrow\}$, $\{\vee, \rightarrow\}$, $\{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ – неполные системы связок.

Пример

- Проиллюстрировать полноту связок $\{\neg, \vee\}$ на примерах:

$$S_1 = x\bar{y} \vee (y \rightarrow x) \quad S_2 = x \leftrightarrow y \vee z$$

- Преобразуем S_1 :

$$S_1 = x\bar{y} \vee (y \rightarrow x) = x\bar{y} \vee \bar{y} \vee x = (x\bar{y} \vee x) \vee \bar{y} = x \vee \bar{y}$$

- Преобразуем S_2 :

$$S_2 = x \leftrightarrow y \vee z = x(y \vee z) \vee \bar{x}(\overline{y \vee z}) = \overline{\bar{x}(\overline{y \vee z})} \vee (\overline{x \vee y \vee z})$$

Логические отношения

- **Отношение следствия.** Говорят, что из высказывания P следует высказывание Q , если Q истинно всякий раз, когда истинно P .

A	B	$A \rightarrow B = Q$	$A \leftrightarrow B = P$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	0	1	1

P	Q	$P \rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

- Из Q не следует P , так как в третьей строке таблицы Q принимает значение 1, в то время как $P=0$. Но из P следует Q , так как Q принимает значение 1 в первой и четвертой строках таблицы, т. е. тогда, когда истинно P .

Пример

- Между какими парами высказываний, приведенных ниже, существует отношение следствия?
- S1: Если прямая перпендикулярна радиусу окружности и проходит через точку пересечения радиуса с окружностью, то она – касательная к окружности.
- S2: Прямая есть касательная к окружности тогда и только тогда, когда она перпендикулярна к радиусу окружности и проходит через точку пересечения радиуса с окружностью.
- S3: Если прямая перпендикулярна к радиусу окружности, но не проходит через точку пересечения радиуса с окружностью, то она не является касательной к окружности.
- S4: Если прямая проходит через точку пересечения радиуса с окружностью, но не является касательной, то прямая не перпендикулярна к радиусу окружности.

Решение

- Введем элементарные высказывания:

А: Прямая перпендикулярна к радиусу окружности.

В: Прямая проходит через точку пересечения радиуса с окружностью.

С: Прямая – касательная к окружности.

- Запишем формулы приведенных высказываний.

$$S_1 = A \vee B \rightarrow C$$

$$S_2 = C \leftrightarrow A \vee B$$

$$S_3 = A \vee \bar{B} \rightarrow \bar{C}$$

$$S_4 = B \vee \bar{C} \rightarrow \bar{A}$$

Таблицы истинности полученных высказываний

A	B	C	S_1	S_2	S_3	S_4	$S_2 \rightarrow S_1$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Из высказывания S_2 следует S_1 и S_4 , т. к. при истинностных значениях «1» в первой, четвертой, шестой и восьмой строках высказывания S_2 те же значения «1» имеем в указанных строках высказываний S_1 и S_4 и импликации $S_2 \rightarrow S_1$, $S_2 \rightarrow S_4$ становятся тождественно истинными высказываниями $S_2 \rightarrow S_1 \equiv 1$, $S_2 \rightarrow S_4 \equiv 1$.

Логические отношения

- **Отношение эквивалентности.** Отношение эквивалентности сопряжено со связкой двойной импликацией P тогда и только тогда, когда Q , т.е. $P \leftrightarrow Q$ и имеет место только в том случае, когда $P \leftrightarrow Q \equiv 1$.

Логические отношения

- **Несовместимость.** Два высказывания называются несовместимыми, если не существует логической возможности, при которой оба высказывания были бы одновременно истинными, т.е. при истинном значении одного из них другое обязательно ложно.
- Это понятие распространяется на любое число высказываний.
- Чтобы установить совместимость высказываний, нужно построить их истинностные таблицы. Если найдется хотя бы одна строка, в которой все высказывания принимают значения «истинно», данные высказывания будут совместимы, в противном случае – нет.
- Совместимы те высказывания, когда существует хотя бы одна логическая возможность, когда высказывания совместимы, т.е. $P \wedge Q \neq 0$

Проверка правильности рассуждений

- Рассуждение – это утверждение того, что некоторое высказывание (заключение) следует из других высказываний (посылок).
- Рассуждение считается правильным только в том случае, если из конъюнкции посылок следует заключение, т.е. между конъюнкцией посылок и заключением установлено отношение следствия.
- Если $P_1, P_2, \dots, P_n$ – посылки, а Q – заключение, то рассуждение правильно, если между высказыванием $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n$ и Q установлено отношение следствия. Тогда $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow Q \equiv 1$.
- При большом числе посылок установить тот факт, что является тавтологией, удобнее с помощью преобразований высказывания к равносильной ему формуле, являющейся тавтологией.

Проверка правильности рассуждений

- Метод «от противного» заключается в предположении, что заключение ложно, и установление того факта, что при этом конъюнкция $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n$ – ложна (что имеет место в том случае, если хотя бы одна из посылок P_i ($i = 1, n$) принимает значение «ложно»). Если это выполняется, то рассуждение верно, в противном случае – нет. Таким образом, в случае правильного рассуждения мы убеждаемся в том, что импликация $S = P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow Q \equiv 1$, т. к. отсутствует логическая возможность, соответствующая $P = P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n = 1$, $Q = 0$, где импликация $P \rightarrow Q$ принимает значение ложно.

Пример

Проверить правильность следующего рассуждения

- «Если функция непрерывна на данном интервале и имеет разные знаки на его концах, то внутри интервала функция обращается в нуль. Функция не обращается в нуль внутри данного интервала, но на концах интервала имеет разные знаки. Следовательно, функция разрывна».

Решение

Посылки и заключения в данном рассуждении состоят из следующих элементарных высказываний:

А – «функция непрерывна на данном интервале»,

В – «функция имеет разные знаки на концах интервала»,

С – «функция обращается в нуль внутри данного интервала».

$$\begin{array}{ll} A \wedge B \rightarrow C & (1\text{-я посылка } P_1) \\ \overline{C} \wedge B & (2\text{-я посылка } P_2) \\ \hline \overline{A} & (\text{заключение } Q) \end{array}$$

Если $P_1 \wedge P_2 \rightarrow Q \equiv 1$, то данное рассуждение верно.

Доказательство с помощью таблицы истинности

A	B	C	AB	$AB \rightarrow C$	$\overline{C}$	$\overline{C} \vee B$	$P_1 \wedge P_2$	$\overline{A}$	$P_1 \wedge P_2 \rightarrow Q$
1	1	1	1	1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	1	0	0	1	1

Убеждаемся, что рассуждение верно.

Доказательство методом от противного

- Предположим, что заключение Q ложно. Покажем, что в этом случае конъюнкция посылок $P_1 \wedge P_2$ ложна, т. е. $P \rightarrow Q$ тождественно истинна.
- В самом деле, если $Q = \bar{A}$ ложно, то A истинно.
- Пусть $P_2 = \bar{C} \wedge B$ истина, тогда B – истинно, $\bar{C}$ – истинно т. е. C – ложно, но в этом случае посылка принимает значение ложно, т.к. $P_1 = A \wedge B \rightarrow C$ принимает значение ложно, так как $A \wedge B = 1$, а $C = 0$, что и требовалось проверить.

Выполнимость формул

- Если в какой-либо логической ситуации данная формула принимает значение «истинно», она называется **выполнимой**.
- В противном случае формула называется **невыполнимой**.
- К классу выполнимых формул относятся такие формулы, множество истинности которых не пусто.

Нормальные формы формул алгебры

ЛОГИКИ

- Пусть x – булева переменная.
- Обозначим $x^\sigma = x^\sigma \vee \overline{x}^\sigma$, где параметр $\sigma \in \{0,1\}$
- Тогда $x^\sigma = \begin{cases} x & \text{если } \sigma = 1, \\ \overline{x} & \text{если } \sigma = 0, \end{cases}$ т.е. $x^1 = x, x^0 = \overline{x}$
- Формулы алгебры логики вида $x_{i_1}^{\sigma_1} \wedge x_{i_2}^{\sigma_2} \wedge \dots \wedge x_{i_n}^{\sigma_n}$ и $x_{i_1}^{\sigma_1} \vee x_{i_2}^{\sigma_2} \vee \dots \vee x_{i_n}^{\sigma_n}$ называются соответственно **элементарной конъюнкцией (э.к.)** и **элементарной дизъюнкцией (э.д.)** на множестве булевых переменных $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
- Число множителей в э.к. и логических слагаемых в э.д. называется **рангом э.к. и э.д.** соответственно.
 $K_1 = x_1 x_2 \overline{x_3} x_4$
- $D_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$ - э.к. 4-го ранга;
- - э.д. 3-го ранга.

Нормальные формы

- **Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)** называется формула, равносильная данной формуле алгебры высказываний и являющаяся произвольной дизъюнкцией различных элементарных конъюнкций, т.е. формулы вида:
.
Число s называется длиной ДНФ.
- **Конъюнктивной нормальной формой (КНФ)** называется формула, равносильная данной формуле алгебры высказываний и являющаяся произвольной конъюнкцией различных элементарных дизъюнкций, т.е. формулы вида:
.
Число s называется длиной КНФ.

Основные теоремы

- Элементарная конъюнкция является тождественно ложной тогда и только тогда, когда она содержит пару сомножителей, один из которых является элементарным высказыванием, а другой – его отрицанием.
- Элементарная сумма является тождественно истинной тогда и только тогда, когда она содержит хотя бы одну пару слагаемых, из которых одно является элементарным высказыванием, а другое – его отрицанием.
- Формула алгебры высказываний является тождественно истинной тогда и только тогда, когда каждый множитель ее КНФ содержит пару слагаемых, одно из которых является элементарным высказыванием, а другое – его отрицанием.
- Формула алгебры высказываний является тождественно ложной тогда и только тогда, когда каждое слагаемое (т.е. каждое элементарное произведение) ее ДНФ содержит пару сомножителей, один из которых есть элементарное высказывание, другой – его отрицание.
- Для каждой булевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, отличной от тождественного нуля, существует ДНФ D , такая, что $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = D$
- Для каждой булевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, отличной от тождественной единицы, существует КНФ K , такая, что $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = K$

Способы построения ДНФ и КНФ

1 способ (*Метод эквивалентных преобразований*).

Пусть булева функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ задана формулой. Алгоритм построения ДНФ и КНФ состоит в следующем:

- Формулу преобразовать так, чтобы в ней были только операции $\wedge$ и $\vee$ и $\neg$
- Добиться с помощью законов де Моргана, чтобы знак отрицания стоял лишь над отдельными переменными.
- Для построения ДНФ раскрыть скобки по первому дистрибутивному закону:
- Для построения КНФ раскрыть скобки по второму дистрибутивному закону:

Способы построения ДНФ и КНФ

2 способ (С использованием таблицы истинности).

Пусть булева функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ задана таблицей или набором своих значений. Алгоритм построения ДНФ и КНФ состоит в следующем:

- При построении ДНФ воспользоваться разложением функции по переменным $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$
- При построении КНФ воспользоваться разложением функции по переменным $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$
- Полученные формулы по возможности упростить с помощью

$$a \rightarrow b = \bar{a} \vee b;$$

$$a \& \bar{a} = 0, \quad a \vee \bar{a} = 1;$$

$$a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b)(b \rightarrow a) = (\bar{a} \vee b)(\bar{b} \vee a) = \bar{a}\bar{b} \vee ab;$$

$$a \oplus b = \overline{a \leftrightarrow b} = \overline{(\bar{a} \& \bar{b}) \vee (a \& b)} = (a \vee b)(\bar{a} \vee \bar{b});$$

$$a \oplus b = a\bar{b} \vee \bar{a}b; \quad a \vee 1 = 1;$$

$$a \downarrow b = \overline{a \vee b} = \bar{a}\bar{b}; \quad a|b = \overline{a\bar{b}} = \bar{a} \vee \bar{b}; \quad \text{и т.д.}$$

Пример 1

- Построить ДНФ и КНФ для функции $f(x, y, z) = (x \oplus y) \rightarrow yz$

1. Построим ДНФ

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x \oplus y) \rightarrow yz = \overline{\overline{(x \leftrightarrow y)}} \vee yz = (x \leftrightarrow y) \vee yz = (x \rightarrow y)(y \rightarrow x) \vee yz = \\ &= (\bar{x} \vee y)(\bar{y} \vee x) \vee yz = \bar{x}\bar{y} \vee y\bar{y} \vee \bar{x}x \vee xy \vee yz = xy \vee \bar{x}\bar{y} \vee yz. \end{aligned}$$

2. Построим КНФ. Применим 2-ой дистрибутивный закон к построенной ДНФ

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x \oplus y) \rightarrow yz = xy \vee \bar{x}\bar{y} \vee yz = (xy \vee \bar{x}\bar{y}) \vee yz = (xy \vee \bar{x})(xy \vee \bar{y}) \vee yz = \\ &= (x \vee \bar{x})(y \vee \bar{x})(x \vee \bar{y})(y \vee \bar{y}) \vee yz = (y \vee \bar{x})(x \vee \bar{y}) \vee yz = (y \vee \bar{x} \vee yz)(x \vee \bar{y} \vee yz) = \\ &= (y \vee \bar{x} \vee y)(y \vee \bar{x} \vee z)(x \vee \bar{y} \vee y)(x \vee \bar{y} \vee z) = (y \vee \bar{x})(y \vee \bar{x} \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z). \end{aligned}$$

Пример 2

- Построить ДНФ и КНФ для функции (11010011)
- Построим таблицу истинности для данной функции
- Построим ДНФ:

$$f(x, y, z) = (x^0 y^0 z^0 \wedge 1) \vee (x^0 y^0 z^1 \wedge 1) \vee (x^0 y^1 z^0 \wedge 0) \vee (x^0 y^1 z^1 \wedge 1) \vee \\ \vee (x^1 y^0 z^0 \wedge 0) \vee (x^1 y^0 z^1 \wedge 0) \vee (x^1 y^1 z^0 \wedge 1) \vee (x^1 y^1 z^1 \wedge 1) = \\ = \overline{\overline{x}} \overline{\overline{y}} \overline{\overline{z}} \vee \overline{\overline{x}} \overline{\overline{y}} \overline{\overline{z}} \vee \overline{\overline{x}} \overline{\overline{y}} \overline{\overline{z}} \vee \overline{\overline{x}} \overline{\overline{y}} \overline{\overline{z}} \vee \overline{\overline{x}} \overline{\overline{y}} \overline{\overline{z}}$$

- Т.к. $ab \vee ac = a(b \vee c)$, то можно получить и другие ДНФ

$$f(x, y, z) = \overline{\overline{x}} \overline{\overline{y}} \overline{\overline{z}} \vee \overline{\overline{x}} \overline{\overline{y}} \overline{\overline{z}} \vee \overline{\overline{x}} \overline{\overline{y}} \overline{\overline{z}} \vee \overline{\overline{x}} \overline{\overline{y}} \overline{\overline{z}} \vee \overline{\overline{x}} \overline{\overline{y}} \overline{\overline{z}} = \overline{\overline{x}} \overline{\overline{y}} (\overline{\overline{z}} \vee \overline{\overline{z}}) \vee \overline{\overline{x}} \overline{\overline{y}} \overline{\overline{z}} \vee \overline{\overline{x}} \overline{\overline{y}} \overline{\overline{z}} = \\ = \overline{\overline{x}} \overline{\overline{y}} \vee \overline{\overline{x}} \overline{\overline{y}} \overline{\overline{z}} \vee \overline{\overline{x}} \overline{\overline{y}} \overline{\overline{z}}$$

x	y	z	f(x, y, z)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Пример 2

- Построим КНФ:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x^{\bar{0}} \vee y^{\bar{0}} \vee z^{\bar{0}} \vee 1) (x^{\bar{0}} \vee y^{\bar{0}} \vee z^{\bar{1}} \vee 1) (x^{\bar{0}} \vee y^{\bar{1}} \vee z^{\bar{0}} \vee 0) \wedge \\ &\wedge (x^{\bar{0}} \vee y^{\bar{1}} \vee z^{\bar{1}} \vee 1) (x^{\bar{1}} \vee y^{\bar{0}} \vee z^{\bar{0}} \vee 0) (x^{\bar{1}} \vee y^{\bar{0}} \vee z^{\bar{1}} \vee 0) (x^{\bar{1}} \vee y^{\bar{1}} \vee z^{\bar{0}} \vee 1) \wedge \\ &\wedge (x^{\bar{1}} \vee y^{\bar{1}} \vee z^{\bar{1}} \vee 1) = (x \vee \bar{y} \vee z) (\bar{x} \vee y \vee z) (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \end{aligned}$$

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

- Применяя различные равносильные преобразования, можно получить различные нормальные формы, реализующие одну и ту же функцию

Минимальные и кратчайшие ДНФ

- ДНФ функции называется **кратчайшей**, если она имеет наименьшую длину среди всех эквивалентных ей ДНФ.
- ДНФ функции называется **минимальной**, если она имеет наименьшее число вхождений – букв $x_i^{\sigma_i}$ среди всех эквивалентных ей ДНФ.
- Сумма рангов э.к., входящих в ДНФ, называется **сложностью ДНФ** и обозначается ρ_D .
- ДНФ, у которой сложность ρ_D минимальна среди всех ее ДНФ, является минимальной.

Способ построения минимальной ДНФ

С помощью равносильных преобразований, применяя формулы:

поглощения $K_1 \vee K_1 K_2 = K_1$;

склеивания $XK \vee \overline{X}K = K$;

неполного склеивания $XK \vee \overline{X}K = XK \vee \overline{X}K \vee K$;

обобщенного склеивания $XK_1 \vee \overline{X}K_2 = XK_1 \vee \overline{X}K_2 \vee K_1 K_2$

из любой ДНФ функции можно построить ДНФ, которая

- либо совпадает с минимальной или кратчайшей;
- либо минимальная (кратчайшая) получается из нее удалением одной или нескольких э.к.

Пример

- Для функции $f=(11101100)$ построить несколько ДНФ. Указать кратчайшую и минимальную среди них.
- Построив таблицу истинности для функции f и применяя преобразования, получим следующие ДНФ:

$$D_1 = \bar{x} \bar{y} z \vee \bar{x} y \bar{z} \vee \bar{x} y z \vee x \bar{y} \bar{z} \vee x \bar{y} z; \quad \rho_{D_1} = 15;$$

$$D_2 = \bar{x} \bar{y} \vee \bar{x} y \bar{z} \vee x \bar{y} \bar{z} \vee x \bar{y} z; \quad \rho_{D_2} = 11;$$

$$D_3 = \bar{x} \bar{y} \vee \bar{x} y \bar{z} \vee x \bar{y}; \quad \rho_{D_3} = 7;$$

$$D_4 = \bar{x} \bar{y} \vee \bar{x} \bar{z} \vee x \bar{y}; \quad \rho_{D_4} = 6;$$

$$D_5 = \bar{y} \vee \bar{x} \bar{z}; \quad \rho_{D_5} = 3.$$

- Кратчайшей ДНФ является D_5 , у нее число логических слагаемых, т.е. длина ДНФ $s=2$ – наименьшее.
- Минимальной ДНФ является D_5 , т.к. $\rho_{D_5} = \min \rho_{D_i} = 3$.

Совершенные нормальные формы

- ДНФ функции называется **совершенной (СДНФ)**, если она составлена из попарно различных э.к. ранга n , т.е. формула вида

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)=1} (x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n})$$

- КНФ функции называется **совершенной (СКНФ)**, если она состоит из попарно различных э.д. ранга n , т.е. формула вида

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigwedge_{f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)=0} (x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \dots \vee x_n^{\sigma_n})$$

- Любую логическую функцию можно задать формулой над B , взяв в качестве B множество, состоящее из трех функций: отрицания, конъюнкции и дизъюнкции

Правила построения СДНФ и СКНФ с помощью таблицы истинности

- Для составления формулы, реализующей СДНФ заданной функции, необходимо в таблице истинности этой функции выбрать наборы (строки) переменных $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, на которых данная функция равна единице, т.е. $f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)=1$; для каждой такой строки необходимо образовать логическое произведение $x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n}$ и затем все полученные конъюнкции соединить знаком дизъюнкции.
- Для составления формулы, реализующей СКНФ заданной функции, необходимо в таблице истинности этой функции выбрать наборы (строки) переменных $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, на которых данная функция равна нулю, т.е. $f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)=0$; для каждой такой строки необходимо образовать логическую сумму $x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee x_2^{\overline{\sigma_2}} \vee \dots \vee x_n^{\overline{\sigma_n}}$ и затем все полученные дизъюнкции соединить знаком конъюнкции.

Правила построения СДНФ и СКНФ с помощью равносильных преобразований

- Для получения СДНФ реализуемой формулой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ нужно построить ДНФ этой функции. Затем, если какая-нибудь э.к. ДНФ не содержит переменной x_i , заменить ее парой конъюнкций K_j :

$$K_j x_i \vee K_j \bar{x}_i = K_j.$$

- Замену производить до тех пор, пока каждое слагаемое ДНФ не будет содержать все переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ (их отрицаний или их самих)
- Для получения СКНФ реализуемой формулой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 1$ нужно построить КНФ этой функции. Затем, если какая-нибудь э.д. КНФ не содержит переменной x_i , заменить ее парой дизъюнкций D_j :

$$(D_j \vee x_i)(D_j \vee \bar{x}_i) = D_j.$$

Пример

- Для функции $f(x, y, z) = \overline{x \vee z} \leftrightarrow xy$ построить СДНФ и СКНФ.
- Сначала построим ДНФ и КНФ.

$$f(x, y, z) = \overline{x \vee z} \leftrightarrow xy = (\overline{x \vee z})xy \vee (\overline{\overline{x \vee z}})\overline{xy} = (\overline{x}z\overline{xy}) \vee (x \vee z)(\overline{x} \vee \overline{y}) =$$

$$= \overline{x}z\overline{x}\overline{y} \vee \overline{x}z\overline{y} \vee x\overline{y} \vee yz = \overline{x}z\overline{y} \vee x\overline{y} \vee yz =$$

$$f(x, y, z) = \overline{x \vee z} \leftrightarrow xy = (\overline{\overline{x \vee z} \vee xy})(\overline{x \vee z} \vee \overline{xy}) = (\overline{x \vee z \vee xy})(\overline{x}z \vee \overline{xy}) =$$

$$= (\overline{x \vee z})(\overline{x}z \vee \overline{x} \vee \overline{y}) = (\overline{x \vee z})(\overline{x} \vee \overline{y}) = \text{КНФ}$$

Решение

- В первом слагаемом ДНФ не хватает переменной y , во втором – z , в третьем – x . Согласно $K_j x_i \vee K_j \bar{x}_i = K_j$ получим

$$\begin{aligned}\text{СДНФ} &= (\bar{x}zy \vee \bar{x}z\bar{y}) \vee (x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z}) \vee (\bar{y}zx \vee \bar{y}z\bar{x}) = \\ &= \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{y}xz \vee \bar{y}z\bar{x} = \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z}\end{aligned}$$

- В первом слагаемом КНФ не хватает переменной y , во втором – z . Согласно $(D_j \vee x_i)(D_j \vee \bar{x}_i) = D_j$ получим

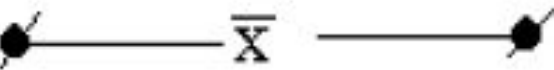
$$\begin{aligned}\text{СКНФ} &= (x \vee z \vee y)(x \vee z \vee \bar{y})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) = \\ &= (x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})\end{aligned}$$

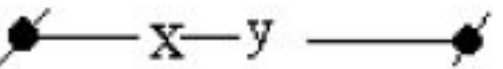
Моделирование алгебры высказываний с помощью релейно-контактных схем

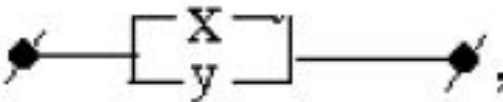
- Релейно-контактная схема представляет собой устройство из проводников и контактов, связывающих полюса источника тока.
- Каждому реле можно поставить в соответствие значение 1, если оно находится под током, и 0, если нет.
- Все замыкающие контакты, подключенные к реле x , будем обозначать $x_1, \dots, x_n$, а размыкающие – $\overline{x_1}, \dots, \overline{x_k}$.
- Всей схеме также можно поставить функцию, принимающую одно из двух значений 1, если схема проводит ток, и 0, если не проводит. Эту логическую функцию называют **функцией проводимости**.

Элементы РКС

1. x 

2. $\bar{x}$ 

3. $x \wedge y$ 

4. $x \vee y$ 

- Для любой булевой функции можно составить соответствующую схему, а каждой схеме соответствует некоторая формула алгебры логики, задающая некоторую булеву функцию.
- **Две схемы** считаются **эквивалентными**, если через одну из них проходит ток тогда и только тогда, когда он проходит через другую.
- Из двух **эквивалентных** схем *более простой* считается та, которая содержит меньшее число контактов.

Пример

- Составить РКС для следующей функции $f(x, y, z) = (x \rightarrow y) \rightarrow (\bar{x}(y \vee z))$
- С помощью равносильных преобразований найдем нормальную форму (ДНФ или КНФ).
- $f(x, y, z) = (x \rightarrow y) \rightarrow (\bar{x}(y \vee z)) = \overline{(\bar{x} \vee y)} \vee (\bar{x}y \vee \bar{x}z) = x\bar{y} \vee \bar{x}y \vee \bar{x}z$

