

# О распределении простых чисел

# Простые числа!

- Простое число – не имеет делителей, кроме себя и 1, и не равно 1:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, ...

# Простые числа!

- Простое число – не имеет делителей, кроме себя и 1, и не равно 1:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, ...

- **Основная теорема арифметики:** каждое натуральное число единственным образом раскладывается в произведение простых.

# Простые числа!

[illegible]

# Простых чисел бесконечно много

Евклид: предположим, что это не так, и что всего есть  $n$  простых чисел  $p_1, \dots, p_n$ .

$$p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 1$$

# Простых чисел бесконечно много

Евклид: предположим, что это не так, и что всего есть  $n$  простых чисел  $p_1, \dots, p_n$ .

$$p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 1$$

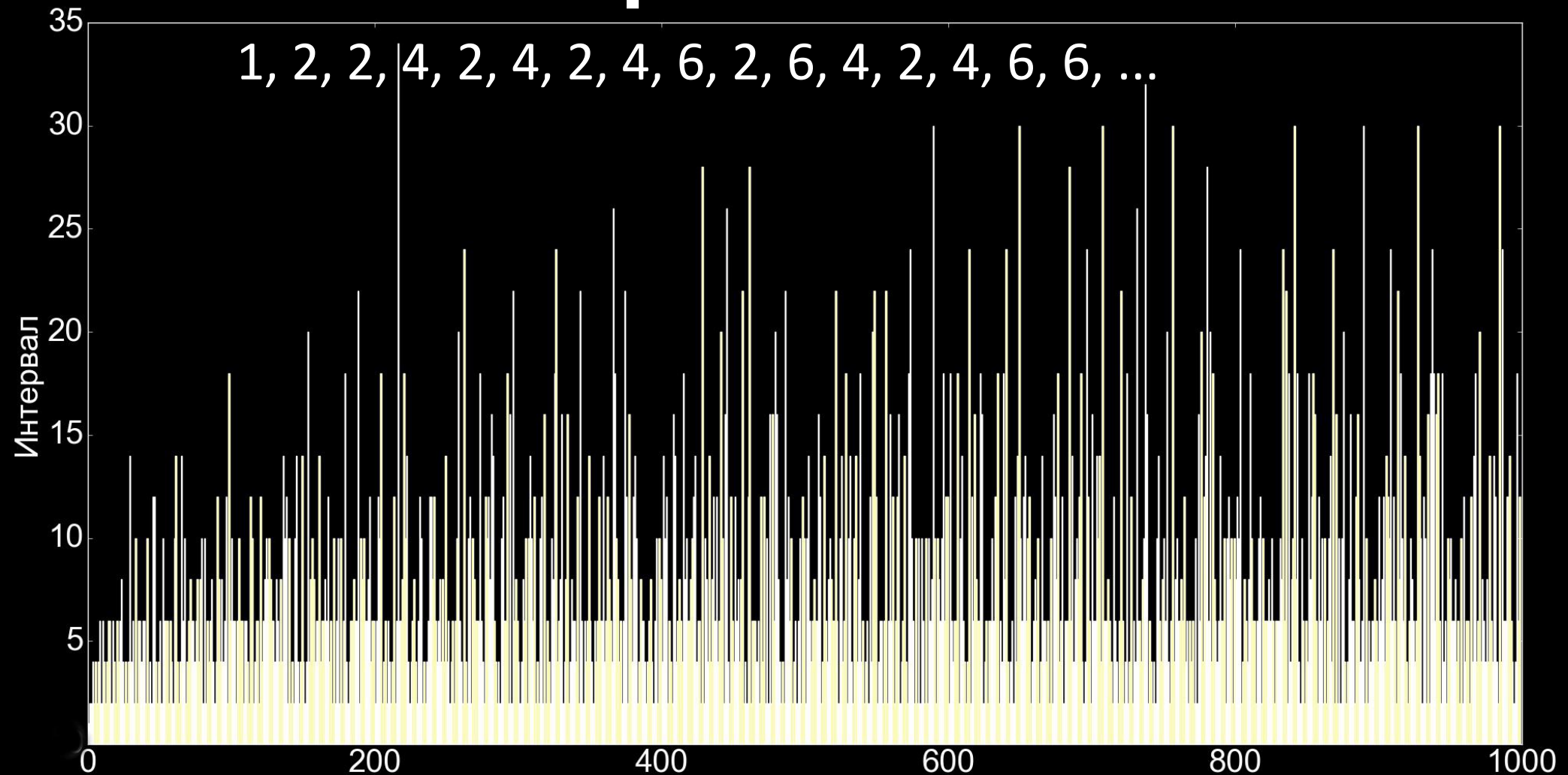
Нет делимости ни на одно из чисел  $p_1, \dots, p_n$ , т.к. в остатке получается 1.

Вывод: есть еще какие-то простые числа, кроме этих  $n$ .  
Противоречие.

# Промежутки между соседними простыми

1, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6, 4, 2, 4, 6, 6, ...

# Промежутки между соседними простыми



# Проблема простых-близнецов

Простые-близнецы – пары простых чисел, отличающихся на 2: 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, ..., 41 и 43, ..., 1'000'000'007 и 1'000'000'009...

Бесконечно ли много таких пар?

# Проблема простых-близнецов

Простые-близнецы – пары простых чисел, отличающихся на 2: 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, ..., 41 и 43, ..., 1'000'000'007 и 1'000'000'009...

Бесконечно ли много таких пар?

Апрель 2013: пар, отличающихся не более чем на 70'000'000, бесконечно много.

Апрель 2014: пар, отличающихся не более чем на 246, бесконечно много.

# Проблема простых-близнецов

Простые-близнецы – пары простых чисел, отличающихся на 2: 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, ..., 41 и 43, ..., 1'000'000'007 и 1'000'000'009...

**Бесконечно ли много таких пар? – нерешенная проблема.**

Апрель 2013: пар, отличающихся не более чем на 70'000'000, бесконечно много.

Апрель 2014: пар, отличающихся не более чем на 246, бесконечно много.

# Насколько большими бывают промежутки?

Легкое упражнение: промежутки между соседними простыми могут быть сколь угодно большими.

# Насколько большими бывают промежутки?

Легкое упражнение: промежутки между соседними простыми могут быть сколь угодно большими.

Обозначение:  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ .

$$100! + 2$$

$$100! + 3$$

$$100! + 4$$

...

$$100! + 100$$

99 подряд идущих непростых чисел.

# Насколько большими бывают промежутки?

Легкое упражнение: промежутки между соседними простыми могут быть сколь угодно большими.

Обозначение:  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ .

$100! + 2$   
 $100! + 3$   
 $100! + 4$   
...  
 $100! + 100$

99 подряд идущих непростых чисел.

Вместо 100 можно было взять 1000000, 10000000000...

# Постулат Бертрана



На отрезке  $[n; 2n]$  всегда есть простое число.

# Постулат Бертрана



На отрезке  $[n; 2n]$  всегда есть простое число.

Первое доказательство: П.Л. Чебышёв, 1850 г.

Самое простое доказательство:  
П. Эрдёш, 1932 г. (несколько страниц)

# Постулат Бертрана

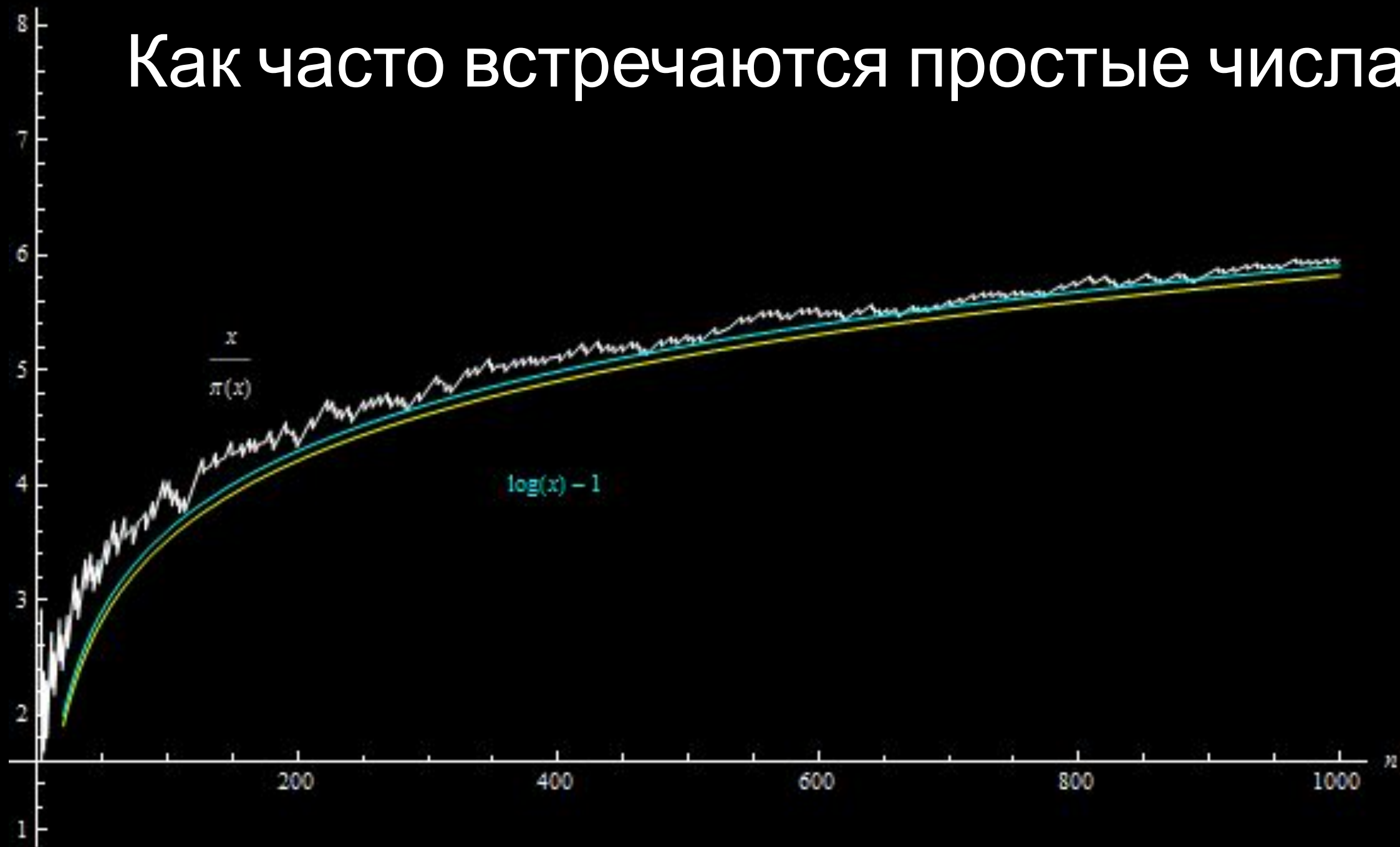
На отрезке  $[n; 2n]$  всегда есть простое число.

**Вопрос:** Насколько малым можно взять  $f(n)$ , чтобы на отрезке  $[n; n + n \cdot f(n)]$  всегда было простое число?

Наилучший результат на сегодня:  $f(n) = n^{-19/40}$ .

Как часто встречаются простые числа?

# Как часто встречаются простые числа?



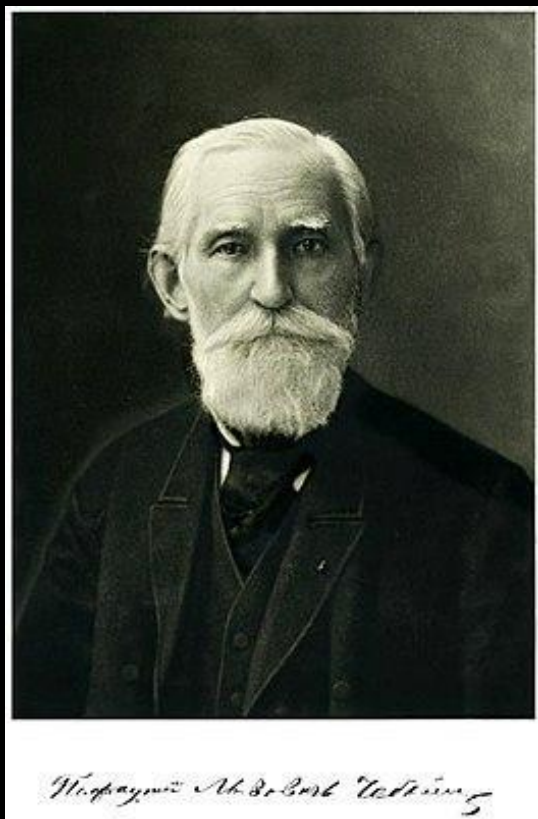
# Как часто встречаются простые числа?

$\ln x$  – натуральный логарифм: степень, в которую нужно возвести число  $e$ , чтобы получить  $x$

$$\ln x = a \Leftrightarrow e^a = x$$

$$e \approx 2,718281828459045\dots$$

# Как часто встречаются простые числа?

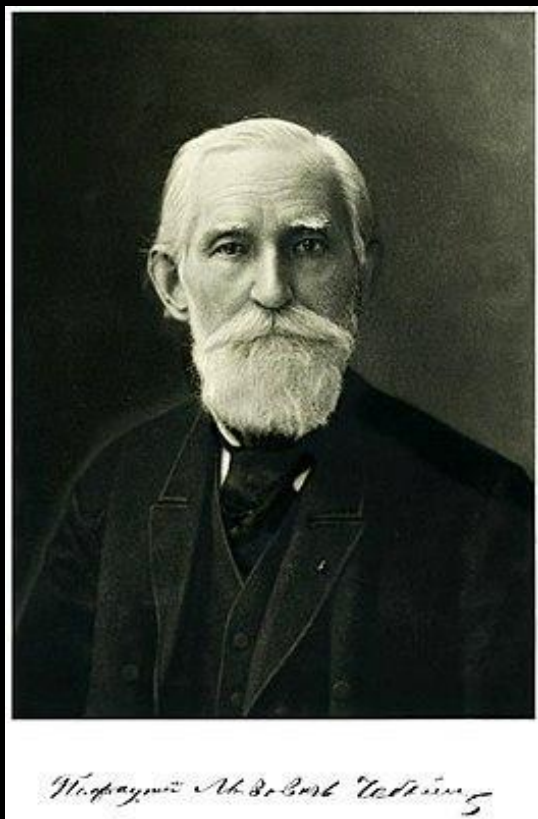


П.Л.Чебышёв, 1850 г.:

Количество простых чисел на отрезке  $[1; n]$  растёт **примерно** (с точностью до умножения на константу) как

$$\frac{n}{\ln n}$$

# Как часто встречаются простые числа?



П.Л.Чебышёв, 1850 г.:

Количество простых чисел на отрезке  $[1; n]$  растет **примерно** (с точностью до умножения на константу) как

$$\frac{n}{\ln n}$$

Адамар, Валле-Пуссен, 1896 г.:  
Константа равна 1.

# Как часто встречаются простые числа?

Пример: сколько простых чисел есть среди первых  $10^{100}$  чисел?

$$\frac{10^{100}}{\ln 10^{100}} = \frac{10^{100}}{100 \ln 10} \approx \frac{10^{100}}{230}$$

17—16—15—14—13  
|  
18 5—4—3 12  
| | |  
19 6 1—2 11  
| | |  
20 7—8—9—10  
|  
21—22—23—24—25...

