Элементы Комбинаторики

Множество и операции над ними.

Любую совокупность действительных чисел называют числовым множеством.

Множества с элементами - это понятие не определяется, а лишь иллюстрируется примерами. Например, можно говорить о множестве яблок в мешке, множестве натуральных чисел и т.д. Множество считается заданным, если о каждом элементе можно однозначно сказать, принадлежит он этому множеству или нет. Обычно множества обозначают прописными латинскими буквами, а их элементы – строчными буквами. Если элемент x принадлежит множеству X, то пишут x Є X, в противном случае пишут x ∉ X.

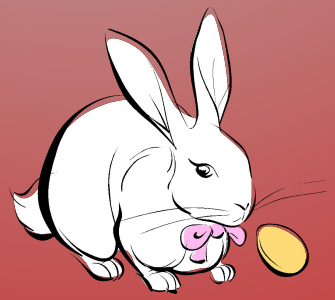
Пример 1: Если X – множество русских слов из словаря В.И. Даля, то «семья» Є X, а «sieben» ∉ X, 8 ∉ X.

Є X

Два множества называют равными, если они состоят из одних и тех же элементов. Например, множество равносторонних треугольников равно множеству равноугольных треугольников. Если множества X и Y равны, то пишут X=Y.

Множество, не содержащее ни одного элемента (например, множество натуральных корней уравнения $4x^2-1=0$), называют пустым множеством. Его обозначают ø.

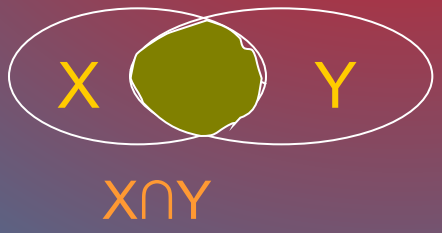
Множество яблок в мешке, рыб в океане, видов живых существ конечны – количество их элементов можно выразить натуральным числом. Множества натуральных чисел, ромбов на плоскости, шаров в пространстве бесконечны. Конечное множество можно задать списком его элементов (например, множество учеников в классе задается их списком в классном журнале). Два списка элементов одного и того же множества X могут отличатся друг от друга лишь порядком элементов. Например, {1, 2, 3} и {3, 1, 2} – списки одного и того же множества {1, 2, 3}={3, 1, 2}.



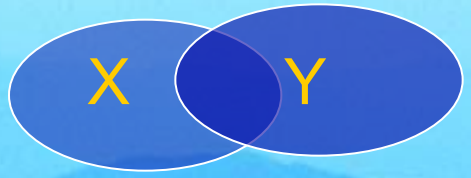
Бесконечное множество нельзя задать списком. Его задают обычно характеристическим свойством – свойством, которым обладают элементы множества и не обладают.

Если каждый элемент множества X является в то же время элементом множества Y, то говорят, что X – часть, или иначе, подмножество множества Y ($X \subset Y$).

Определение: Пересечением множеств X и Y называется множество $X \cap Y$, состоящее из элементов, которые принадлежат как X, так и Y.

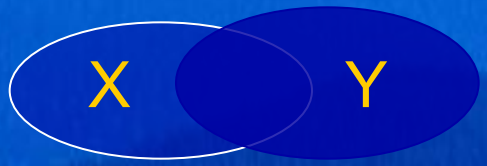


Определение: Объединением множеств X и Y называют множество XuY, состоящее из элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств X,Y.



XuY

Определение: Разностью множеств X и Y называется множество X\Y, состоящее из всех элементов множества X, не принадлежащие множеству Y.



Если $Y \subset X$, то разность X\Y называют дополнением множества Y в множестве X и обозначают Y_x.

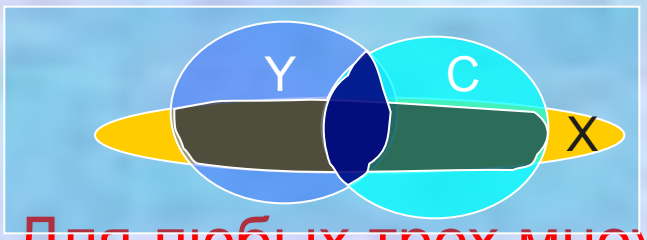
Такие изображения множеств и операций над ними называют диаграммами Эйлера – Венна.

Алгебра множеств.

Операции над множествами обладают свойствами, которые отчасти напоминают свойства действий над числами, а отчасти отличны от этих свойств.

I. Для любых множеств X и Y выполняются равенства

1) $X \cup Y = Y \cup X$ и 1') $X \cap Y = Y \cap X$.



II. Для любых трех множеств X, Y, Z выполняются равенства

2) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$ и 2') $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$

3) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$ и 3') $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$

III. Для любого множества $X \subset U$ имеет место равенство

4) $(X')' = X$

IV. Выполняются равенства

5) ø’=U и 5’) U’=ø,

V. Для любых двух множеств X и Y из U имеем:

6) (X∩Y)’=X’∪Y’ и 6’) (X∪Y)’=X’∩Y’.

Поскольку для любого множества X справедливо ø $\subset$ X и X $\subseteq$ X, то всегда верны равенства ø∩X=ø, ø∪X=X, X∩X=X, X∪X=X.

Если два выражения имеют одинаковую нормальную форму (с точностью до перестановки), то они тождественно равны – при подстановке вместо букв любых множеств из них получается одно и то же множество.

Разбиение множества на подмножества.

Определение: Пусть U – некоторое множество и X_α, $\alpha \in A$ – система подмножеств из U, обладающая следующими свойствами:

а) объединение всех множеств X_α совпадает с U, $U=\upsilon_\alpha X_\alpha$;

б) если $\alpha \neq \beta$, то пересечение множеств X_α и X_β пусто:

$$X_\alpha \cap X_\beta = \varnothing.$$

Тогда говорят, что множество U разбито на части X_α, $\alpha \in A$.

Пример: Если X – подмножество в U, то U разбивается на множества X и X’ (дополнение к X).

Кортежи и декартово произведение множеств.

Определение: Пусть даны множества $X_1, \ldots, X_n$.

Кортежем длины n, составленным из элементов этих множеств, называется конечная последовательность $\alpha=(x_1, \ldots, x_n)$, где для всех k, $1<=k<=n$, имеем: $x_k \in X_k$. Элемент x_k называется k-й координатой (или k-й компонентной) кортежа α.

Пример: Любое слово является кортежем, составленным из букв, десятичная запись любого натурального числа – кортежем, составленным из цифр, и т.д.

Определение: Два кортежа равны в том и только в том случае, когда они имеют одинаковую длину, причем их координаты, стоящие на местах с одинаковыми номерами, равны.

Кортежи длины 2 называют упорядоченными парами, длины 3 – упорядоченными тройками, …, длины n – упорядоченными n-ками. Для краткости речи слово «упорядоченные» часто опускают

Пример:Кортежи $(1^2,2^2,3^2)$ и $(\sqrt{1}, \sqrt{16}, \sqrt{81})$ равны, поскольку $1^2=\sqrt{1}$, $2^2=\sqrt{16}$, $3^2=\sqrt{81}$.

Отличия понятия кортежа и множества:

Кортежи	Множества
1) отличающиеся порядком элементов, различны даже в случае, когда они имеют одинаковый состав.	1) Порядок элементов не играет роли.
2) Координаты могут повторяться.	2) Все элементы различны.
3) Кортежи – в круглые скобки	3) Множества – в фигурные скобки.

Определение: Пусть A_1, …, A_n – некоторые множества. Их декартовым произведением называют множество, состоящее из всех кортежей вида (a_1, …, a_n), где $a_k \in A_k$, $1 <= k <= n$. Декартово произведение множеств A_1, …, A_n обозначают A_1, …, A_n обозначают $A_1 X \dots X A_n$.

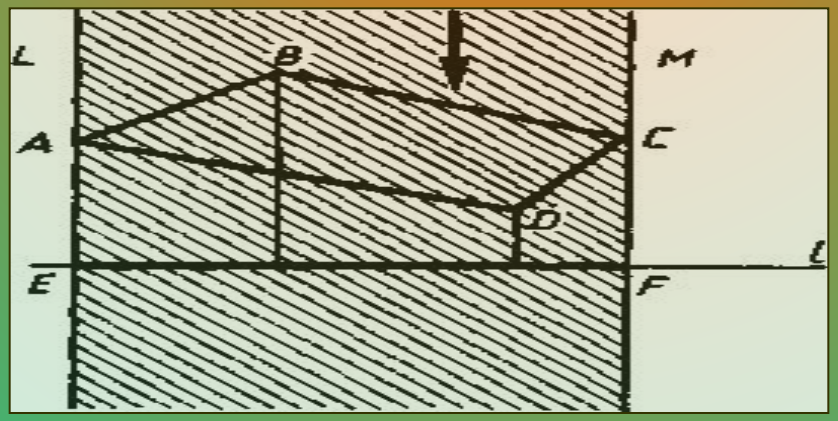
Пример: Декартово произведение RXR состоит из пар (x, y) действительных чисел, причем (x_1, y_1)=(x_2, y_2) в том и только в том случае, когда $x_1=x_2$, $y1=y_2$. Каждой такой паре соответствует точка M (x; y) на плоскости, для которой числа x и y являются декартовыми координатами (отсюда название «декартово произведение»). Декартово произведение RXRXR состоит из троек чисел (x, y, z), которые можно рассматривать как координаты точки M (x; y; z) в трехмерном пространстве. Декартово произведение RXRX…XR (n множителей) называют n-мерным арифметическим пространством. Его обозначают R^n.

Отображение множеств.

Определение: Соответствие, сопоставляющее каждому элементу x множества X один и только один элемент множества Y, называется отображением множества X в множество Y.

Пример: Ставя в соответствие каждому треугольнику вписанную в него окружность, получаем отображение множества треугольников X в множество окружностей Y.

Пример: Пусть f – ортогональная проекция плоскости на прямую l. Образом четырехугольника ABCD является отрезок EF. Полным прообразом отрезка EF является полоса, ограниченная прямыми EL и FM.

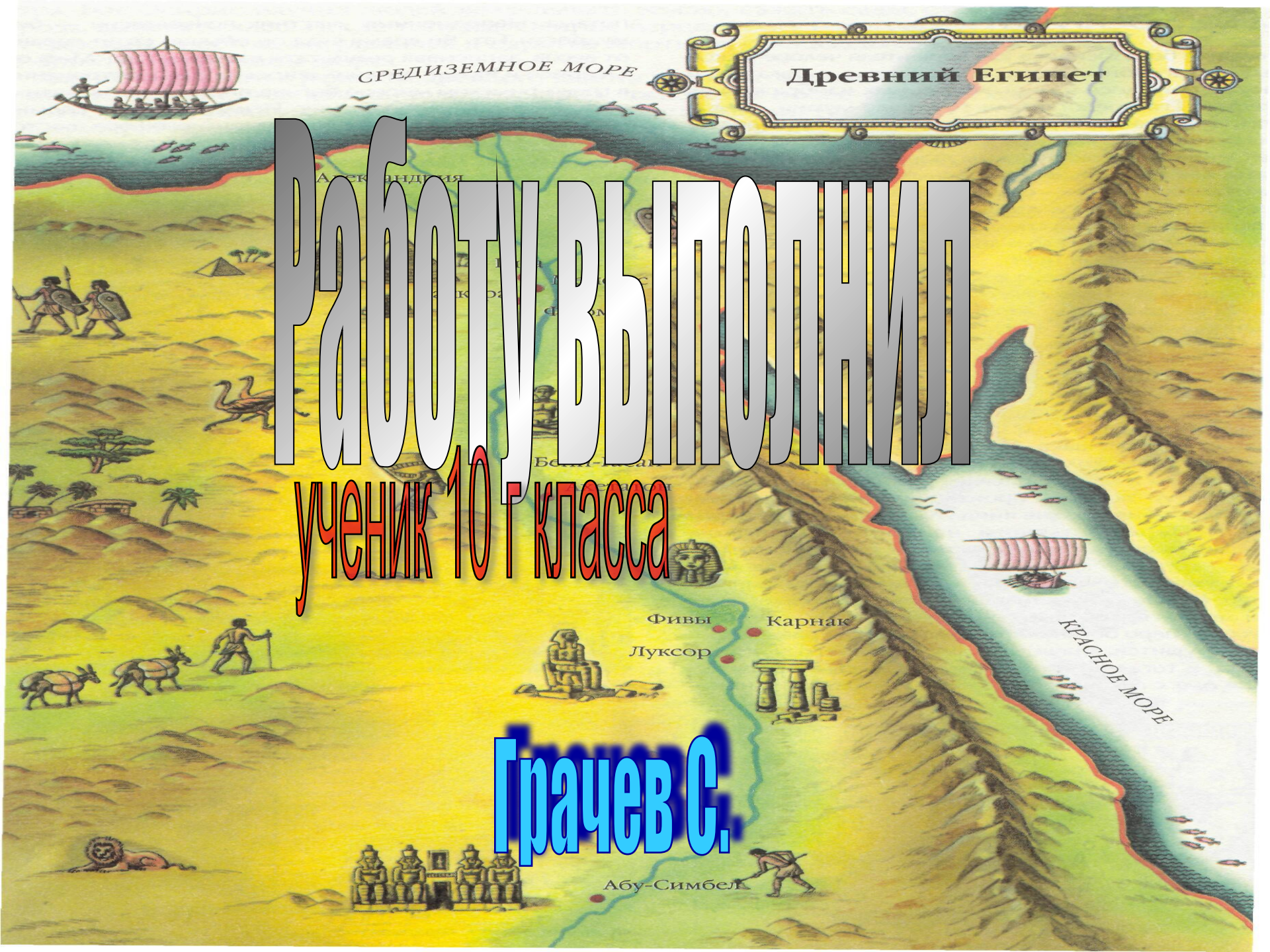


Определение: Если при отображении f различные элементы множества X переходят в различные элементы множества Y, то отображение f называют обратимым.

Определение: Если при отображении f каждый элемент множества Y является образом хотя бы одного элемента из X (т.е. если все полные прообразы $f^{-1}(y)$, $y \in Y$ не пусты), то f называют отображением X на Y, а не X в Y.

Определение: Обратимое отображение множества X на множество Y называют взаимно однозначным отображением X на Y.

Пример: Отображение, при котором каждому пальто сопоставляется крючок, на котором оно висит, является обратимым, если на каждом крючке висит не более одного пальто (некоторые крючки могут быть пустыми). Оно является отображением множества пальто X на множество крючков Y, если на каждом крючке висит хоть одно пальто (на некоторых крючках может быть несколько пальто). Наконец, оно является взаимно однозначным отображением X на Y если на каждом крючке висит ровно одно пальто.



Работу выполнил

ученик 10 г класса

Грачев С.