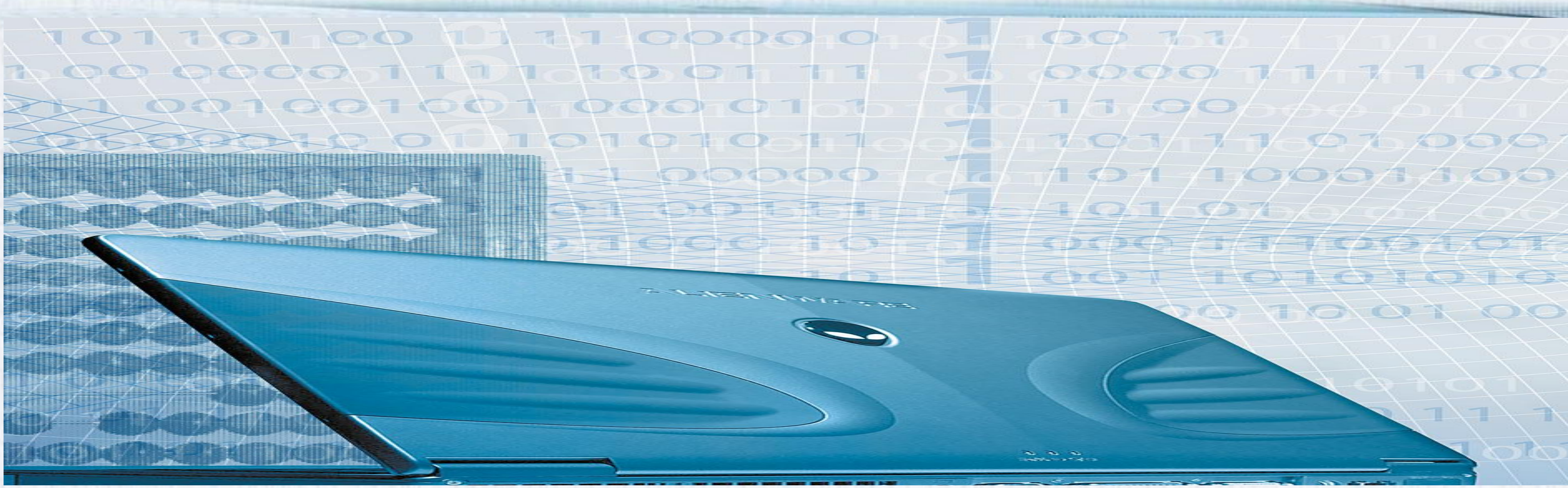


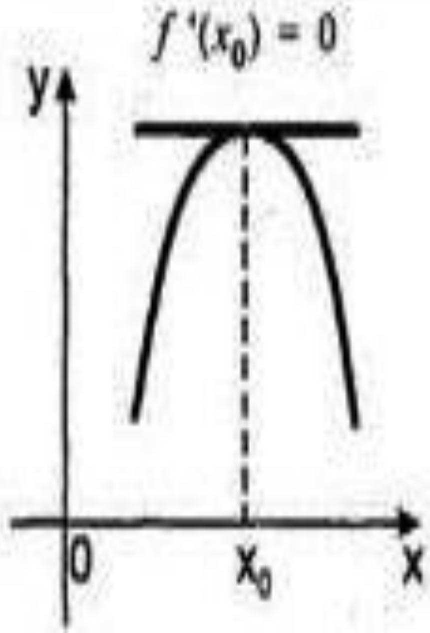
НАХОЖДЕНИЕ ЭКСТРЕМУМОВ И ПРОМЕЖУТКОВ ВОЗРАСТАНИЯ И УБЫВАНИЯ

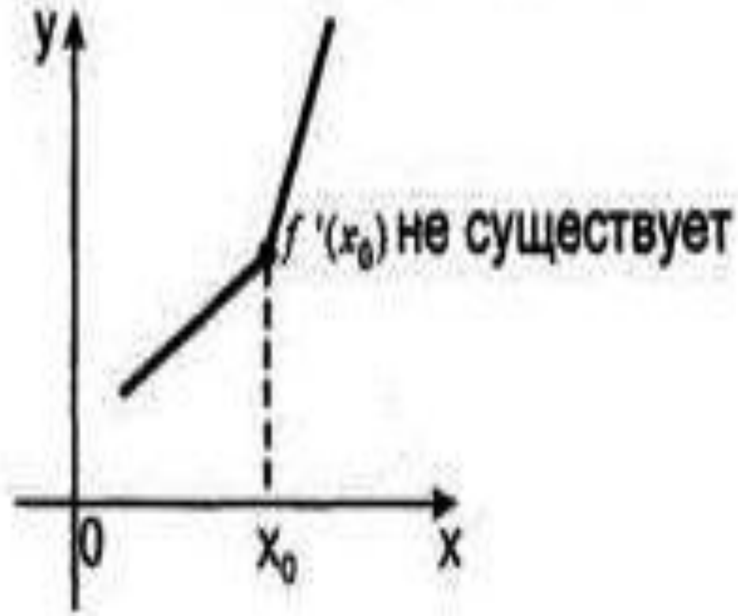
Критические точки функции

$y = f(x)$ — непрерывная функция.

x_0 — внутренняя точка ее области определения.

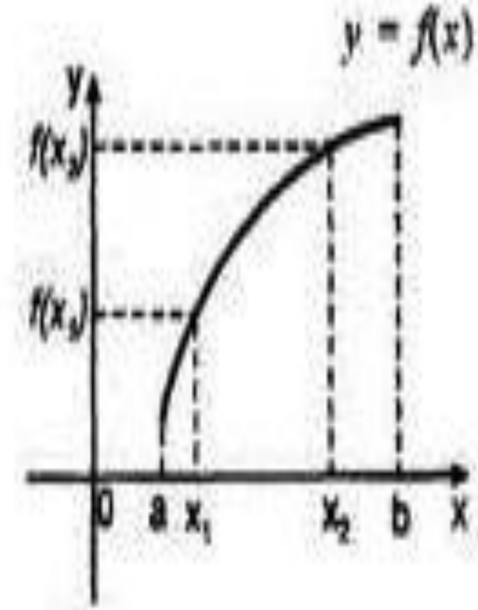
Если $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует, то x_0 — критическая точка.



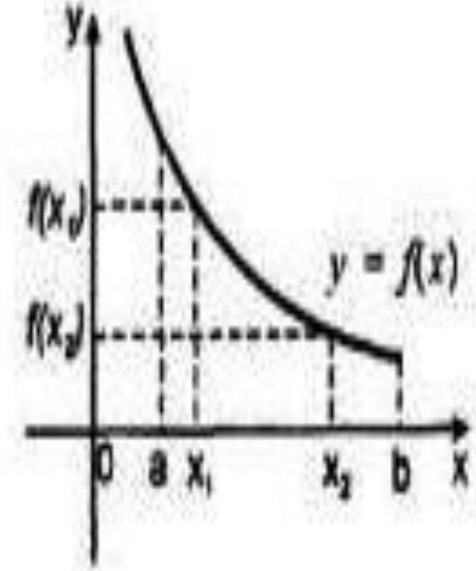


Возрастание и убывание функции на промежутке

Функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке (a, b) $\Leftrightarrow$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ для всех $x_1, x_2 \in (a, b)$



Функция $y = f(x)$ убывает на промежутке (a, b) $\Leftrightarrow$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ для всех $x_1, x_2 \in (a, b)$



Достаточный признак возрастания и убывания функции

Достаточный признак возрастания, убывания функции

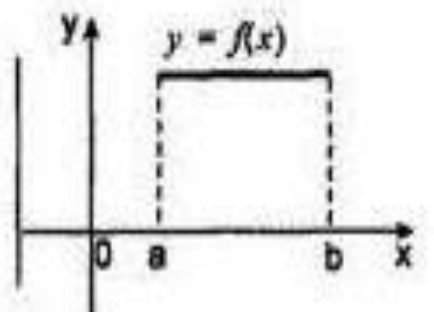
Если $f'(x) > 0$ для всех $x \in (a, b)$, то функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке (a, b).

Если $f'(x) < 0$ для всех $x \in (a, b)$, то функция $y = f(x)$ убывает на промежутке (a, b).

Если функция непрерывна в конце промежутка, то его можно присоединить к промежутку возрастания (убывания) функции.

Достаточное и необходимое условие постоянства функции

Если $f'(x) = 0$ для всех $x \in (a, b)$, то функция $y = f(x)$ постоянная на промежутке (a, b).



Пример 1. Найдите промежутки возрастания и убывания функции.

$y = x^2 - 5x + 7.$

Р е ш е н и е:

$Д(x) = R$

$y' = 2x - 5$

$y' = 0 \qquad 2x - 5 = 0$

$x = 2{,}5$

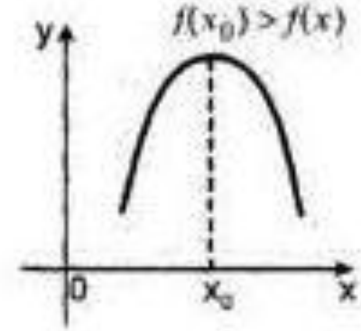
x	(– ∞; 2,5]	[2,5; + ∞)
f '(x)	–	+
f(x)	$\searrow$	$\nearrow$

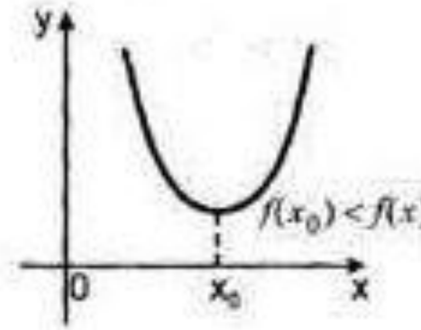
Ответ: $f(x) \searrow$ при $x \in (-\infty; 2{,}5]$

$f(x) \nearrow$ при $x \in [2{,}5; +\infty)$

Точки экстремума

x_0 — точка максимума	$\Leftrightarrow$	Вблизи точки x_0 $f(x_0)$ — наибольшее значение.
x_0 — точка минимума	$\Leftrightarrow$	Вблизи точки x_0 $f(x_0)$ — наименьшее значение.





x_0 — точка максимума
$f(x_0)$ — максимум функции

x_0 — точка минимума
$f(x_0)$ — минимум функции

точки экстремума

экстремумы функции

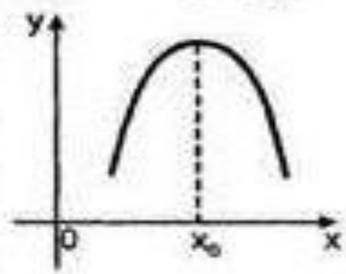
Достаточный признак экстремума функции

Первый признак

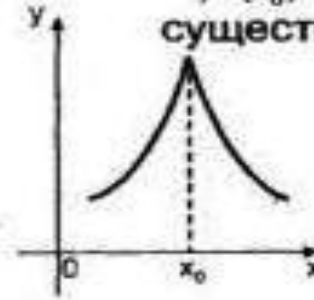
Если x_0 — критическая точка, $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ — не существует.

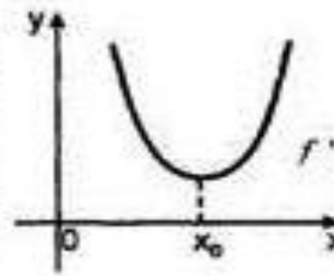
Если при переходе через x_0 производная $f'(x)$ изменяет знак с «+» на «-», $+$ x_0 $-$ x	то	x_0 — точка максимума.
Если при переходе через x_0 производная $f'(x)$ изменяет знак с «-» на «+», $-$ x_0 $+$ x	то	x_0 — точка минимума.

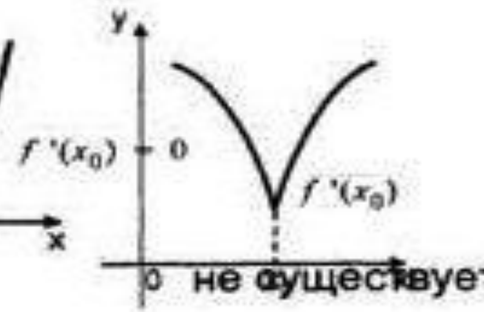
$f'(x_0) = 0$



$f'(x_0)$ не существует

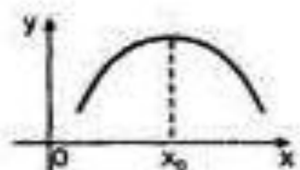


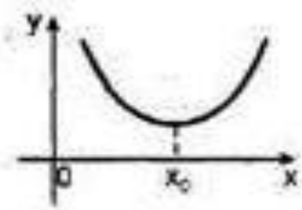




Второй признак

$f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) < 0$	$\Rightarrow$	x_0 — точка максимума.
$f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) > 0$	$\Rightarrow$	x_0 — точка минимума.





Пример 4. Найдите точки экстремума функции $y = x^3 - 6x^2$.

Р е ш е н и е:

$$y' = (x^3 - 6x^2)' = 3x^2 - 12x$$

$$y' = 0,\ 3x^2 - 12x = 0$$

$$3x(x - 4) = 0$$

$$x = 0 \qquad x = 4$$

x	(– ∞; 0)	0	(0; 4)	4	(4; + ∞)
f '(x)	+		–		+
f(x)	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
Экстр.		max		min	

Ответ: $x_{max} = 0,\ x_{min} = 4$

Пример 5. Найдите экстремумы функции $y = 3 + 4x - x^2$.

Решение:

$y' = (3 + 4x - x^2)' = 4 - 2x$

$y' = 0, \quad 4 - 2x = 0$

$x = 2$

x	$(-\infty; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–
$f(x)$	$\nearrow$	7	$\searrow$
Экстр.		max	

$3 + 4 \cdot 2 - 2^2 = 3 + 8 - 4 = 7$

Ответ: $y_{max} = y(2) = 7$