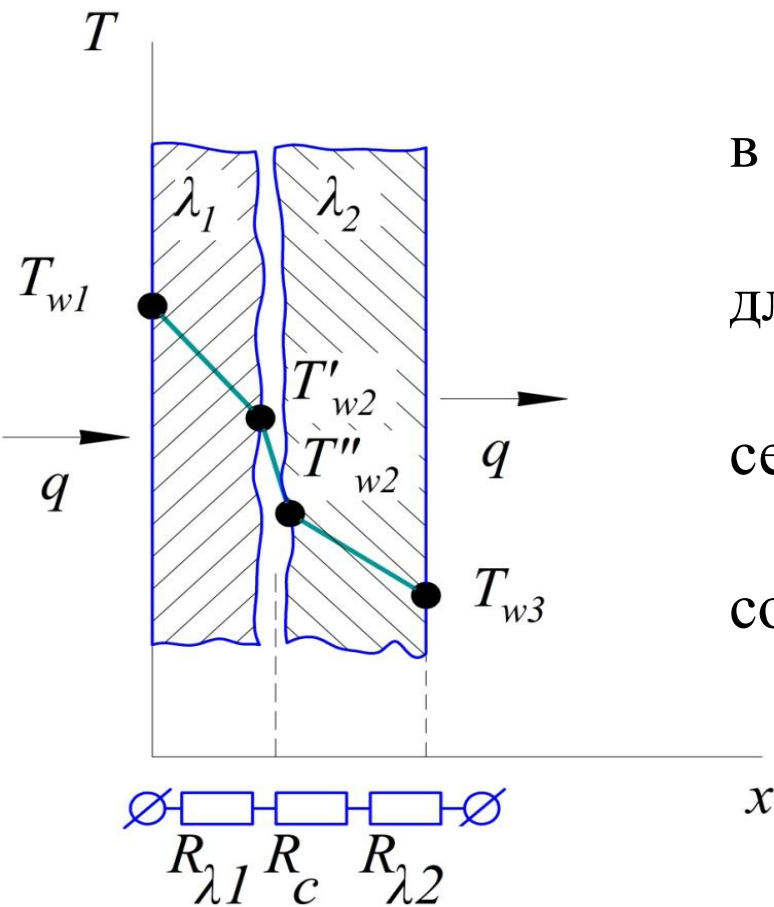


ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Электротепловая аналогия

контактное термическое сопротивление R_{t_k}



$$\Delta T_{tc} = T'_{w2} - T''_{w2}$$

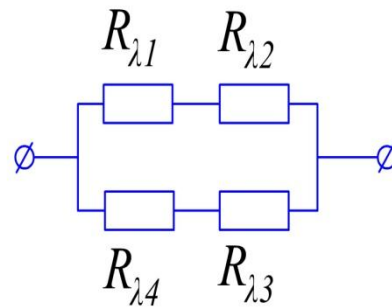
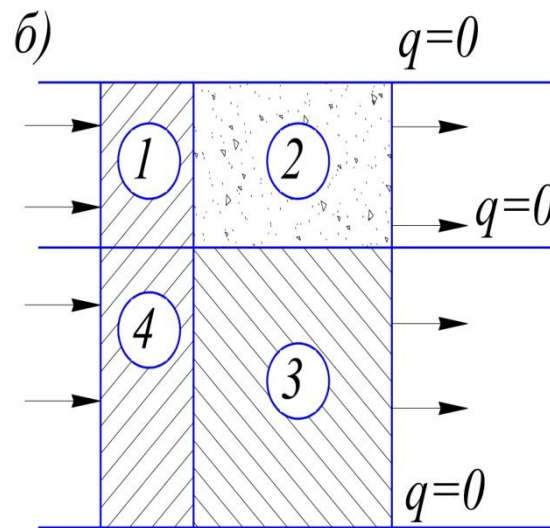
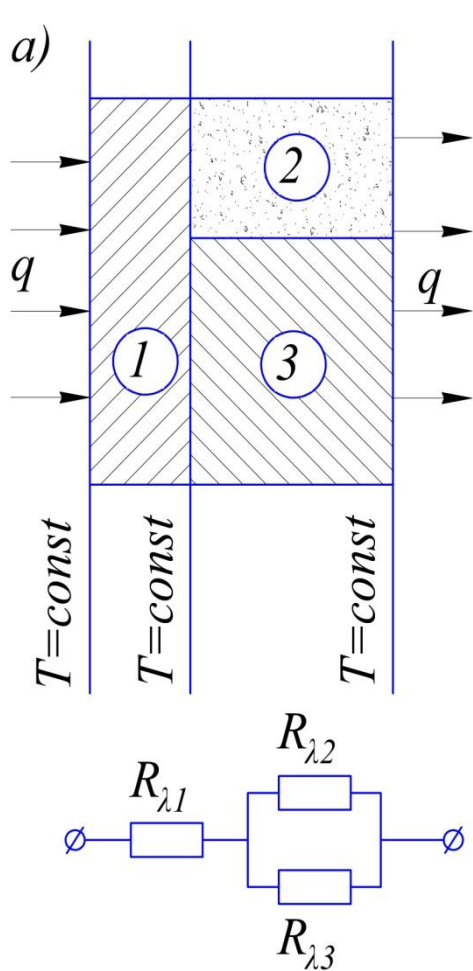
в стационарной задаче теплопроводности

для пластины в любом поперечном

сечении $q = \text{idem}$, контактнoе термическoе

сопротивление

$$R_{tc} = \frac{\Delta T_{tc}}{q} = \frac{T'_{w2} - T''_{w2}}{q}.$$



$$\lambda=0,01\dots 400 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$$

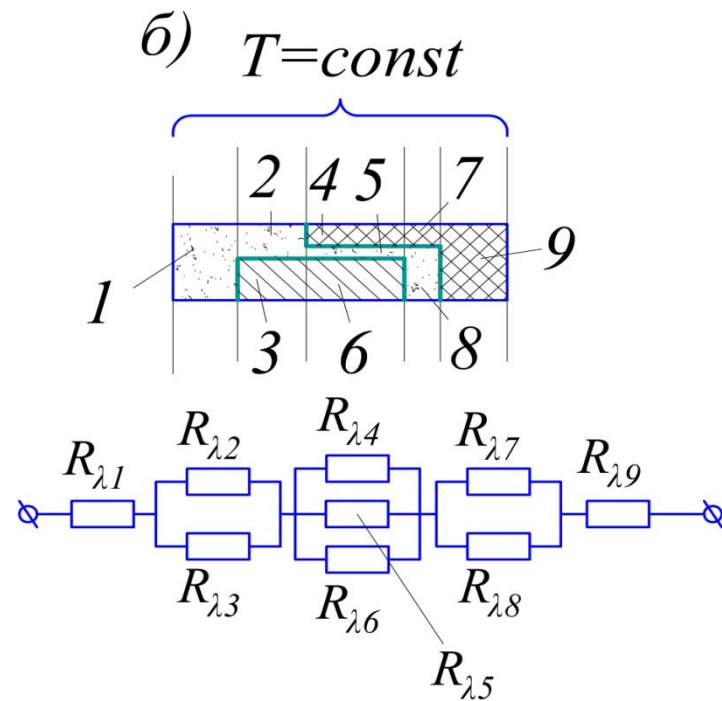
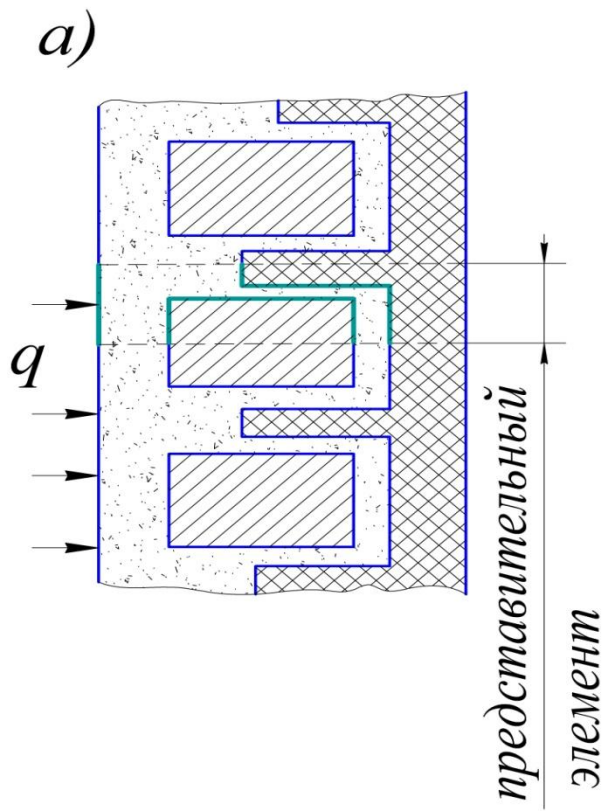
$$R_{\lambda \Sigma} \Big|_{T=const} = R_{\lambda 1} + \frac{1}{\frac{1}{R_{\lambda 2}} + \frac{1}{R_{\lambda 3}}};$$

$$R_{\lambda \Sigma} \Big|_{q=const} = \left(\frac{1}{R_{\lambda 1} + R_{\lambda 2}} + \frac{1}{R_{\lambda 3} + R_{\lambda 4}} \right)^{-1}.$$

Расчет составных тел

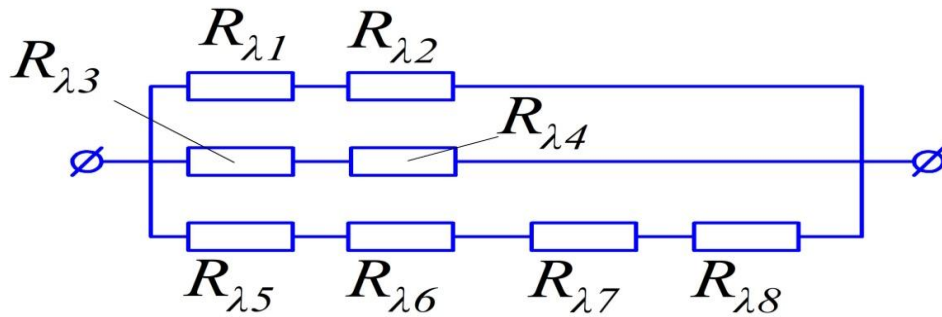
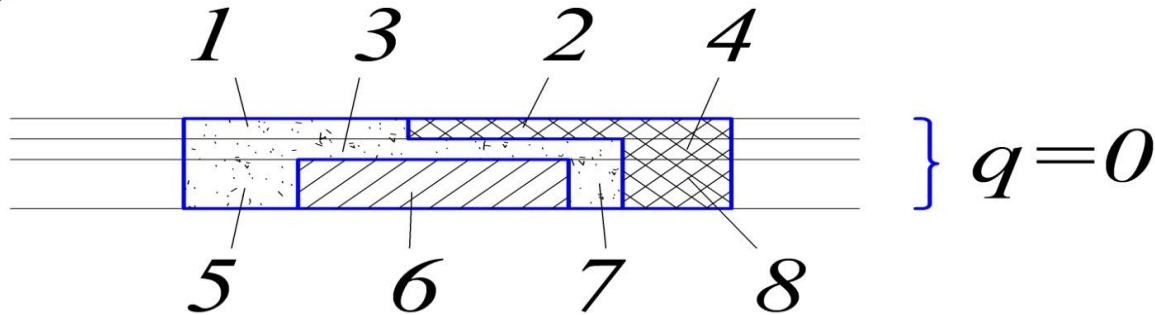
Если составное тело рассматривать как единое целое, следует ввести **ЭКВИВАЛЕНТНУЮ** теплопроводность λ_e

$$\frac{\Delta T}{q} = \frac{\delta_{\Sigma}}{\lambda_e} = R_{\lambda \Sigma}$$



Расчет составных тел

в)



$$R_{\lambda \Sigma} \Big|_{q=\text{const}} = \left[\frac{1}{R_{\lambda 1} + R_{\lambda 2}} + \frac{1}{R_{\lambda 3} + R_{\lambda 4}} + \left(\frac{1}{R_{\lambda 5} + R_{\lambda 6} + R_{\lambda 7} + R_{\lambda 8}} \right) \right]^{-1}.$$

Расчет составных тел

термическое сопротивление тела $R^* = \frac{\Delta T}{Q}, \quad \frac{\text{К}}{\text{Вт}},$

Удельная величина термического сопротивления

$$R^* = \frac{\Delta T}{Q/l}, \quad (\text{К} \cdot \text{м})/\text{Вт}.$$

При соблюдении граничных условий III рода (теплопередача при разности температур жидкостей

$$T_{f1} - T_{f2} = \Delta T_\alpha$$

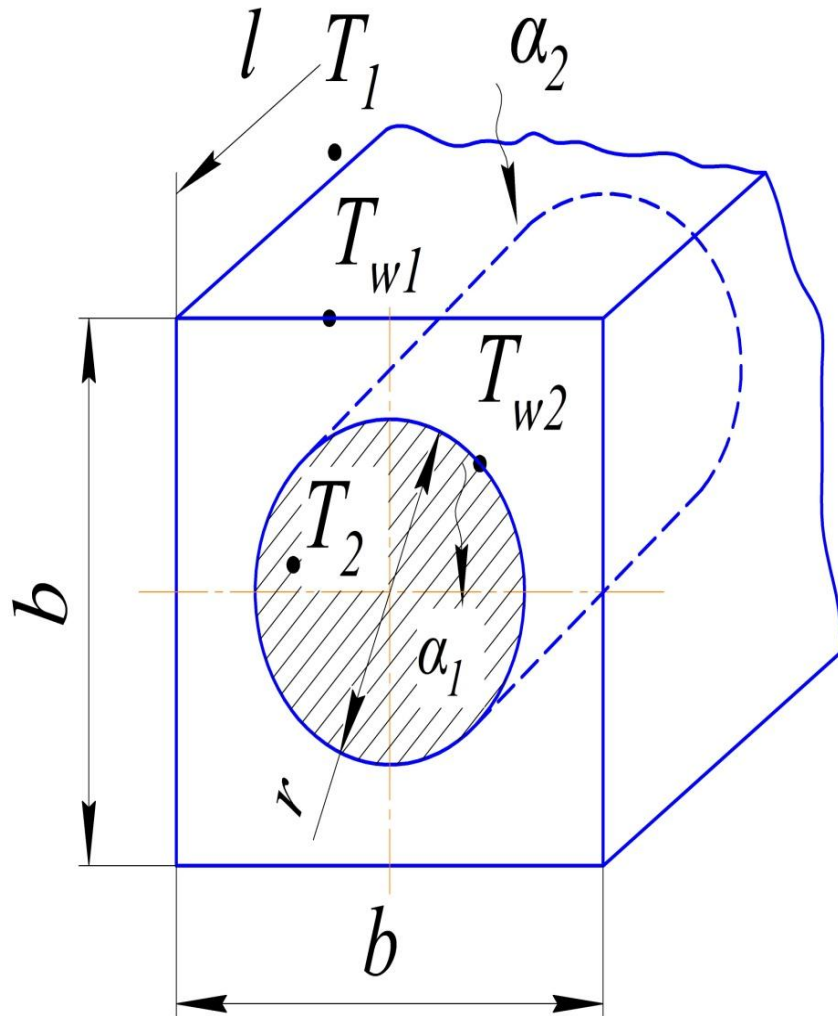
Поскольку

$$R_\Sigma^* = \frac{\Delta T_\alpha}{Q}, \quad \text{К/Вт}.$$

$$\Delta T_\alpha = T_{f1} - T_{f2} > \Delta T = T_{w1} - T_{w2}$$

$$R_\Sigma^* > R^*$$

Расчет составных тел

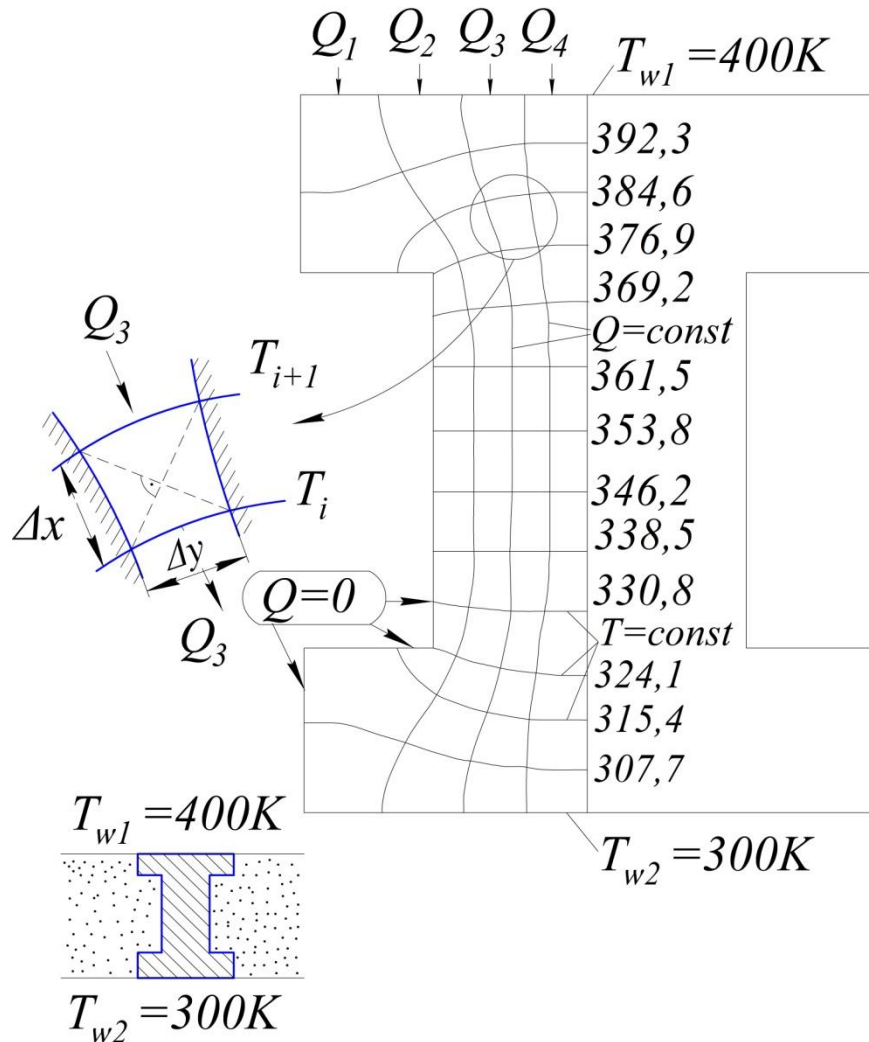


$$R^* = \frac{\ln(0,54b/r)}{2\pi/\lambda}$$

$$R_{\Sigma}^* = \frac{1}{2\pi} \times$$

$$\times \left[\frac{\ln(0,54b/r)}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_1 r} + \frac{1}{2\alpha_2 b} \right].$$

Графический метод



Решение задачи разделяют на три этапа:

1. Вычерчивают, соблюдая масштаб, сечение расчетной области.

2. Наносят линии $T = const$ и $q = const$, добиваясь, чтобы диагонали косоугольных четырехугольников делили одна другую пополам и были взаимно перпендикулярны.

Графический метод

Тепловой поток разделим на составляющие Q_1, Q_2, Q_3 и Q_4 ,

$$Q_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n Q_i.$$

Для каждой ячейки уравнение Фурье

$$q_i = \frac{Q_i}{\Delta y} = \lambda \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x}$$

Если теперь между изотермами на чертеже M промежутков

$$T_{i+1} - T_i = \frac{T_{w1} - T_{w2}}{M}; \quad Q_i = \frac{\lambda(T_{w1} - T_{w2})}{M}; \quad \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{\lambda}{M}(T_{w1} - T_{w2}).$$

Графический метод

Условие $\Delta x = \Delta y$ одно из очень важных $Q_{\Sigma} = N Q_i$

$$Q_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n Q_i = N Q_i = N \frac{\lambda(T_{w1} - T_{w2})}{M} = \frac{4}{13} \frac{\lambda}{M} (T_{w1} - T_{w2}).$$

Отношение $N/M = S$ называют **формфактором теплопроводности**;

$$Q_{\Sigma} = \lambda S (T_{w1} - T_{w2}) = \lambda S \Delta T,$$

$$[S] = \frac{Q_{\Sigma}}{\lambda \Delta T} = \frac{[\text{Вт}] \cdot [\text{м}] \cdot [\text{К}]}{[\text{Вт}] \cdot [\text{К}]} = [\text{м}].$$

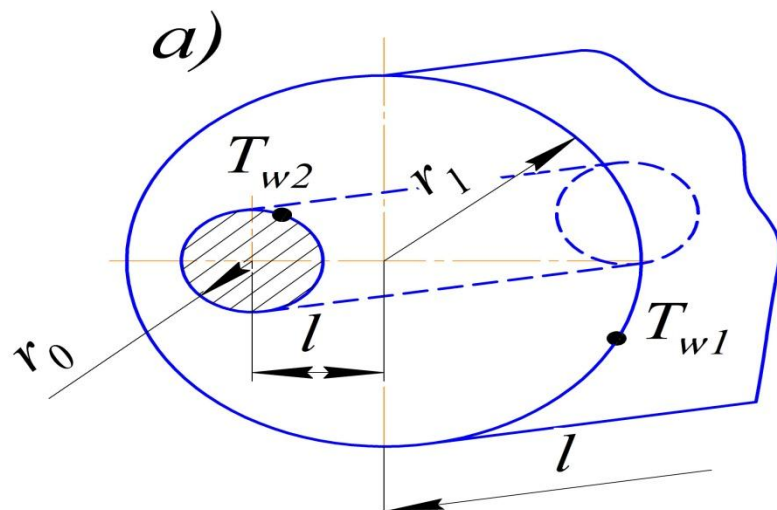
Графический метод

для пластины размерами $h \times b \times d$ $S = hb/\delta$

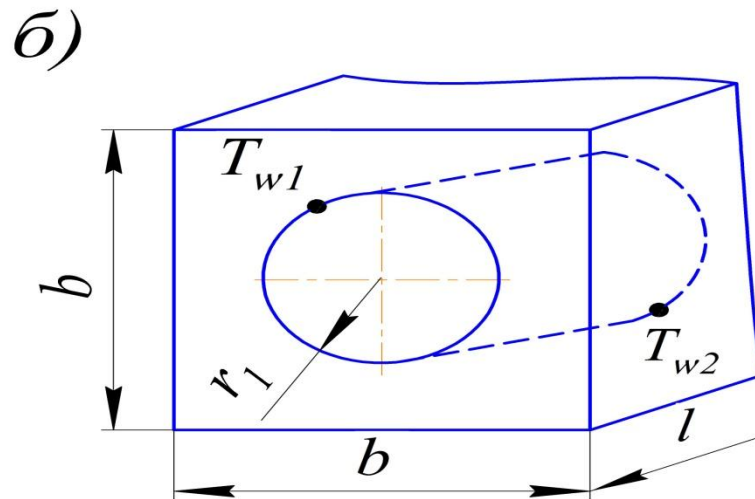
для полого цилиндра $D \times d \times h$ $S = \frac{2\pi r}{\ln(d/D)}$

формфактор S связан с термическим сопротивлением тела R^* зависимостью

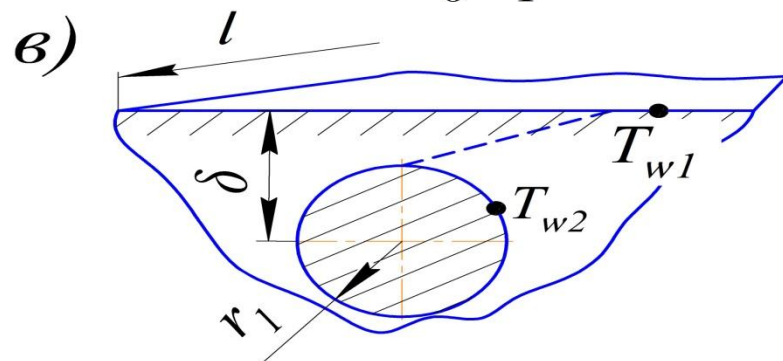
$$R = 1/\lambda S$$



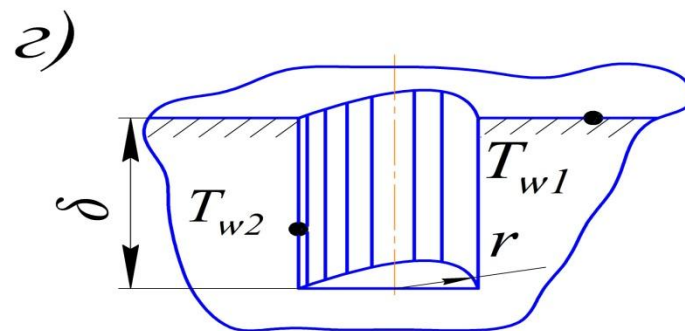
$$S = \frac{2\pi l}{\operatorname{arch}\left(\frac{r_0^2 + r_1^2 - t^2}{2r_0 r_1}\right)}$$



$$S = \frac{2\pi l}{\ln\left(\frac{0,54b}{r_1}\right)}$$

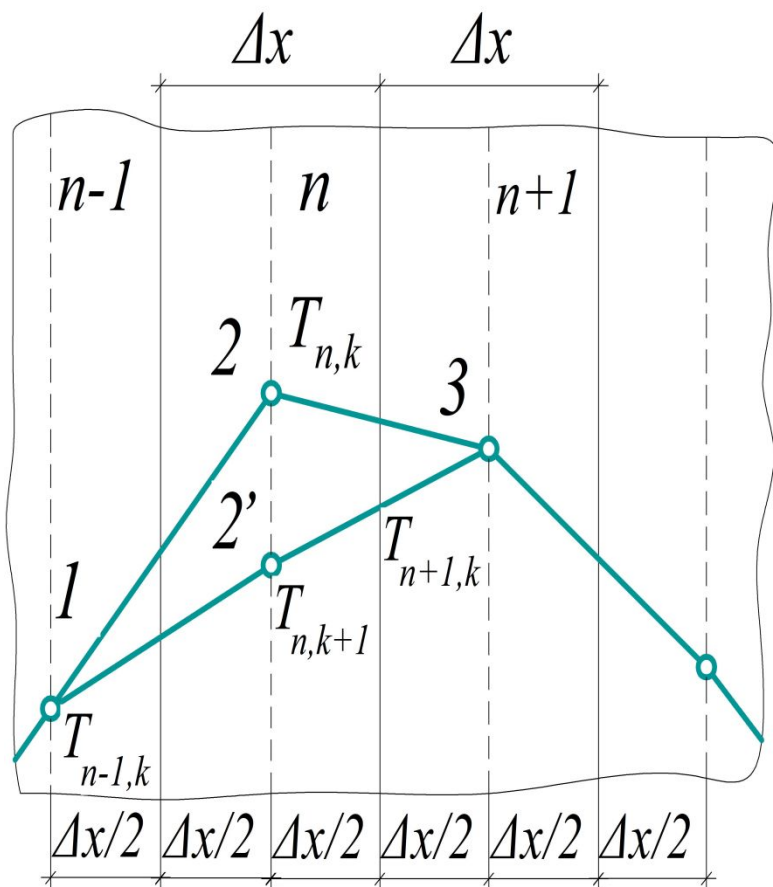


$$S = \frac{2\pi l}{\operatorname{arc}\delta\left(\frac{\delta}{r_1}\right)}$$



$$S = \frac{2\pi\delta}{\ln\frac{28}{r}}$$

Метод конечных разностей



Заменяем дифференциальное уравнение Фурье

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

конечно – разностным приближением

$$\frac{\Delta T}{\Delta \tau} = a \frac{\Delta^2 T}{\Delta x^2}.$$

для некоторого момента $\tau = k\Delta\tau$

аналог частной производной $\frac{\Delta T}{\Delta \tau}$



имеет два значения

“левое” $\left(\frac{\Delta T}{\Delta \tau}\right)_-$

“правое” $\left(\frac{\Delta T}{\Delta \tau}\right)_+$

Метод конечных разностей

$$\left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right)_{-} = \frac{T_{n,k} - T_{n-1,k}}{\Delta x}; \quad \left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right)_{+} = \frac{T_{n+1,k} - T_{n,k}}{\Delta x}.$$

Аналог второй частной производной

$$\frac{\Delta^2 T}{\Delta x^2} = \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right)_{-} + \left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right)_{+} \right] = \frac{1}{\Delta x^2} (T_{n+1,k} + T_{n-1,k} - 2T_{n,k})$$

Аналог производной $\frac{\Delta T}{\Delta \tau}$

$$\frac{\Delta T}{\Delta \tau} = \frac{T_{n,k+1} - T_{n,k}}{\Delta \tau}.$$

Метод конечных разностей

С учетом подстановок перепишем уравнение Фурье

$$\frac{T_{n,k+1} - T_{n,k}}{\Delta\tau} = a \frac{T_{n+1,k} + T_{n-1,k} - 2T_{n,k}}{\Delta x^2};$$

$$T_{n,k+1} - T_{n,k} = \frac{2a\Delta\tau}{\Delta x^2} \left(\frac{T_{n+1,k} + T_{n-1,k}}{2} - T_{n,k} \right)$$

Δx и $\Delta\tau$ задали произвольно, выберем его так, чтобы

$$\frac{2a\Delta\tau}{\Delta x^2} = 1 \quad \longrightarrow \quad T_{n,k+1} = \frac{1}{2}(T_{n+1,k} + T_{n-1,k}),$$

т. е. температура в n -м слое в момент $(k+1)\Delta\tau$ равна полусумме температур в двух соседних слоях в момент $k\Delta\tau$

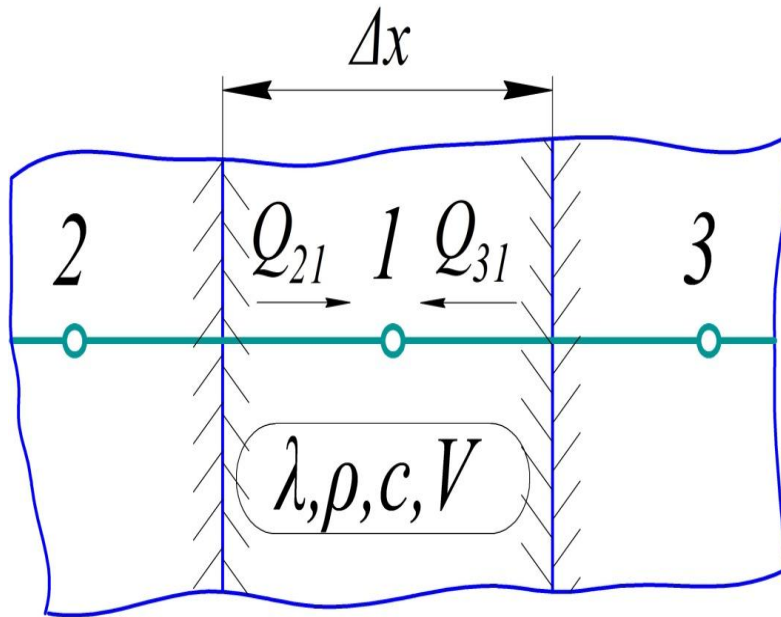
Метод конечных разностей

$$\frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2} = Fo \quad \text{условие} \quad \frac{2a\Delta\tau}{\Delta x^2} = 1 \longrightarrow Fo=0,5$$

для решения задачи методом Шмидта необходимо:

- разбить сечение на n слоев толщиной Δx каждый;
- выбрать интервал времени $\Delta\tau$, удовлетворяющий условию $Fo=0,5$;
- задать начальное распределение температур 1-2-3-....;
- последовательно определить температуры в моменты $\Delta\tau$, $2\Delta\tau$, $k\Delta\tau$ используя итоговое соотношение

Метод элементарных балансов



три постулата

- Изменение температуры между расчетными точками (узлами) происходит по линейному закону и определяется термическим сопротивлением тепловых связей.
- Изменение температуры во времени происходит скачками.
- Увеличение энтальпии элементарного объема, прилегающего к данному узлу, пропорционально приращению температуры в этом узле.

Метод элементарных балансов

расчеты ведем для пластины единичной площади

$$V = \Delta x \cdot \Delta x \cdot 1 = (\Delta x^2).$$

Теплота, переданная слою по связи 2-1, постулата 1

$$Q_{21} = \frac{\lambda}{\Delta x} (T_2 - T_1) \Delta x \Delta \tau;$$

а переданная по связи 3-1

$$Q_{31} = \frac{\lambda}{\Delta x} (T_3 - T_1) \Delta x \Delta \tau;$$

в силу постулата 3 температура узла 1

$$c\rho V(T_1' - T_1)\Delta\tau = Q_{21} + Q_{31} = \frac{\lambda\Delta x}{\Delta x}\Delta\tau(T_2 - T_3 - 2T_1),$$

Метод элементарных балансов

$$T_1' = \frac{\lambda \Delta \tau}{c \rho V} \left(T_2 + T_3 - 2T_1 + \frac{T_1}{\frac{\lambda \Delta \tau}{c \rho V}} \right).$$

Если учесть $\frac{\lambda}{c \rho V} = a$

$$V = (\Delta x)^2$$

$$\frac{a \Delta \tau}{(\Delta x)^2} = Fo$$

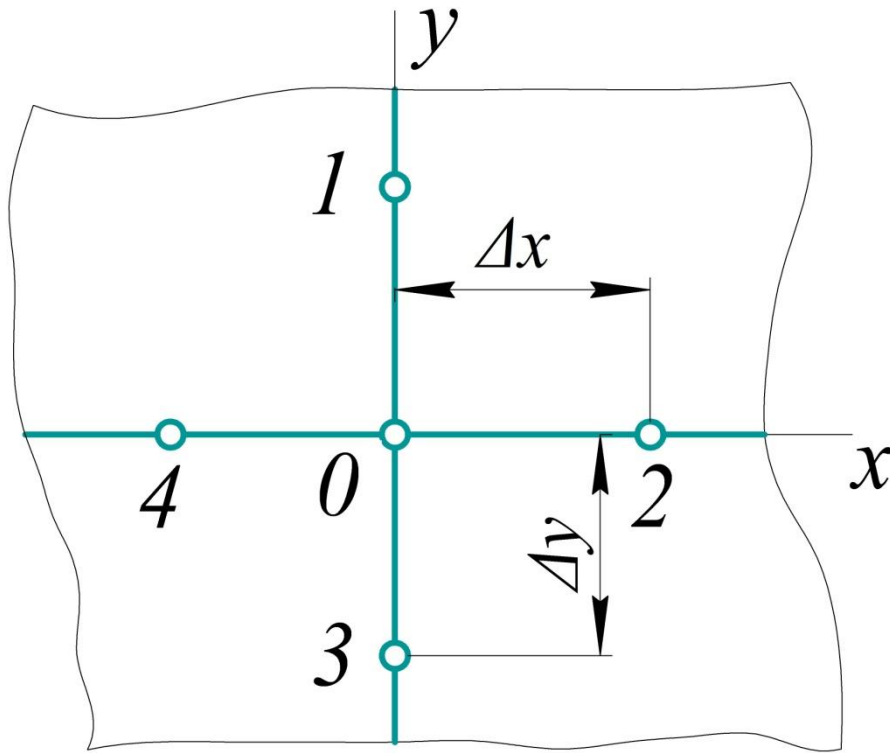
$$T_1' = Fo \left[T_2 + T_3 + T_1 \left(\frac{1}{Fo} - 2 \right) \right]$$

$$Fo = 0,5 \Rightarrow T_1' = \frac{T_2 + T_3}{2}.$$

$$\text{при } Fo = 1/3 \quad T_1' = \frac{1}{3} (T_2 + T_3 + T_1),$$

$$\text{при } Fo = 1/4 \quad T_1' = \frac{1}{4} (T_2 + T_3 + 2T_1),$$

Метод элементарных балансов



$$\Delta x = \Delta y = \delta \quad Fo = \frac{a\Delta\tau}{\delta^2}$$

$$T_1' = Fo \left[T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_0 \left(\frac{1}{Fo} - 2 \right) \right],$$

при $Fo = 1/4$

$$T_1' = \frac{1}{4} (T_1 + T_2 + T_3 + T_4).$$

оба метода дают правильные результаты лишь при $Fo < 1/2$ для одномерной задачи и при $Fo < 1/4$ — для двумерной. При больших значениях Fo явные методы дают физически необъяснимые решения

Неявные схемы

Запишем балансовое уравнение для момента $\tau + \Delta\tau$

$$c\rho V(T'_1 - T_1)\Delta\tau = Q_{21} + Q_{31} = \lambda\Delta\tau[(T'_2 - T'_1) + (T'_3 - T'_1)],$$

после преобразований получим

$$(1 - Fo)T'_1 - Fo(T'_2 - T'_3) - T_1 = 0$$