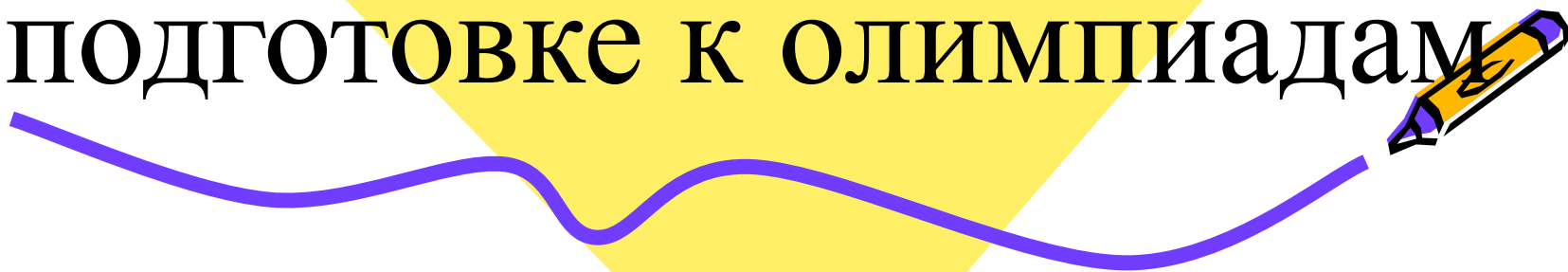




Работа учителя
математики на уроке по
подготовке к олимпиадам



При изучении темы «Объемы тел»
(11 класс) можно предложить учащимся
следующую задачу:

«Найдите объем пирамиды, у которой все
боковые ребра образуют между собой
углы по 90° , а сами ребра имеют длины
соответственно 6, 8, 10 см».



Олимпиадная задача по математике-

задача повышенной трудности, нестандартная
по формулировке или по методам решения.

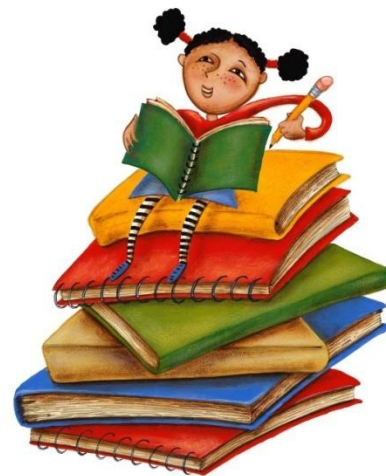


При изучении темы «Сложение и вычитание положительных и отрицательных чисел» можно предложить учащимся следующую задачу:

1. Вычислите:

а) $90+89+88+ \dots +1+0-1-2- \dots -90-91-92-93;$

б) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 2012 - 2013.$



При изучении темы «Степень с
натуральным показателем»

можно предложить для решения
учащимся следующие типы задач:

- а) Сравните: 65^{23} и 255^{17} .
- б) На какую цифру оканчивается
число 2007^{2014} ?



Решение.

$$\text{а) } 65^{23} > 64^{23} = (2^6)^{23} = 2^{138}.$$

$$\text{А } 255^{17} < 256^{17} = (2^8)^{17} = (2^{136}).$$

Так как

$$65^{23} > 2^{138}, 2^{138} > 2^{136},$$

$$\text{а } 2^{136} > 255^{17}, \text{ то } 65^{23} > 255^{17}.$$



б) Так как последняя цифра числа 2007^{2014} определяется последней цифрой числа 7^{2014} , то найдем значения степеней $7^1, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5$ и т. д. и заметим закономерность: последней цифрой являются 7, 9, 3, 1, а далее они повторяются. Так как $2014 = 503 \cdot 4 + 2$, то 7^{2014} оканчивается той же цифрой, что и 7^2 , то есть цифрой 9.

Тогда и число 2007^{2014} оканчивается на цифру 9.



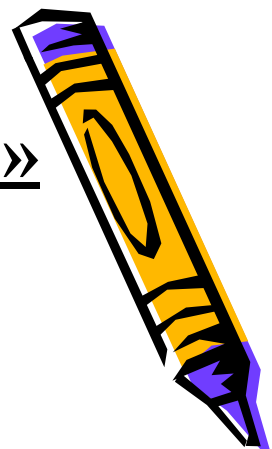
При изучении темы «Алгебраические дроби»
можно решить следующую задачу:

«Вычислите сумму:

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx},$$

если

$$xyz = 1''$$



Решение.

Умножим числитель и знаменатель второй дроби на x , а третьей — на xu . Учитывая, что $xuz = 1$, получим у всех дробей одинаковые знаменатели. Сложим данные три дроби, в итоге получим дробь, у которой числитель и знаменатель равны одному и тому же выражению $1 + x + xu$. А значит, искомая сумма равна 1.



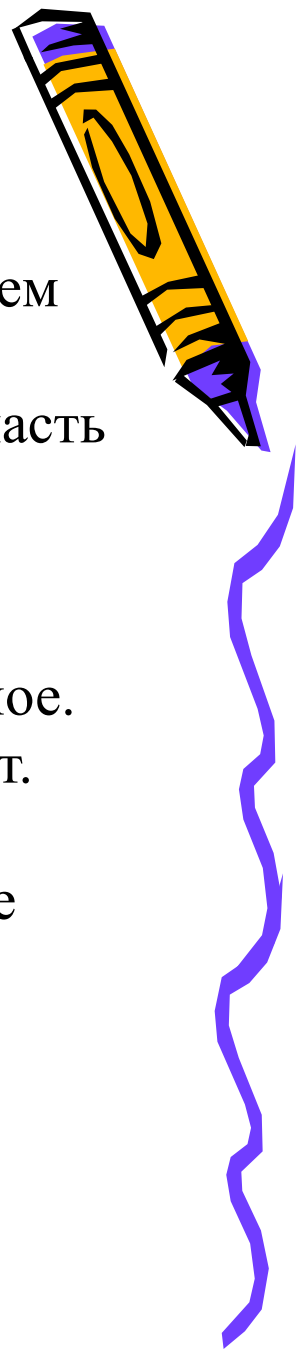
При изучении темы «Квадратные уравнения» можно решить следующую задачу:

«Может ли дискриминант квадратного уравнения с целыми коэффициентами равняться 2014? А 2016?»



Решение.

У квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, где $a, b, c \in \mathbb{Z}$, дискриминант $D = b^2 - 4ac$. Так как $D = 2014$, то найдем целые решения уравнения $b^2 - 4ac = 2014$. Так как правая часть уравнения делится на 2, то и левая часть должна делиться на 2, поэтому $b = 2k$, тогда $4k^2 - 4ac = 2014$. Разделив обе части уравнения на 2, получим: $2k^2 - 2ac = 1007$. В левой части уравнения получилось четное число, а в правой — число нечетное. Поэтому уравнение решений в целых числах не имеет. Для числа 2016 имеем $b^2 - 4ac = 2016$, а так как $b = 2k$, то получим: $4k^2 - 4ac = 2016$. Разделив на 4 обе части уравнения, получим: $k^2 - ac = 504$. Данное уравнение имеет решения в целых числах, например: $a=1, c=25, k=23$. Тогда уравнение $x^2 + 46x + 25 = 0$ имеет дискриминант $D = 2116 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 2016$.



При изучении арифметической
прогрессии можно рассмотреть задачу:
«Докажите, что если в бесконечную
арифметическую прогрессию с
положительной разностью входят числа
25, 43, 70 (не обязательно стоящие
рядом), то в эту прогрессию входит и
число 2005».



Решение.

Так как 25, 43, 70 — члены арифметической прогрессии, то $25 = a_1 + kd$; $43 = a_1 + nd$; $70 = a_1 + md$. Из данных трех равенств следует, что $18 = (n - k)d$, $27 = (m - n)d$.

Из данных двух равенств получаем:

$9 = (m - 2n + k)d$. Так как $2005 = 70 + 1935$,

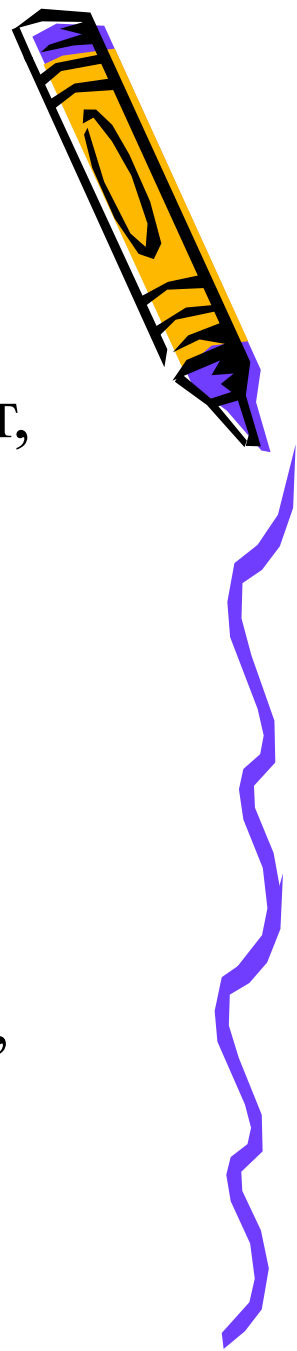
а $1935 = 215 \cdot 9 = 215(m - 2n + k)d$,

то $2005 = 70 + 215(m - 2n + k)d =$

$= a_1 + md + 215(m - 2n + k)d =$

$= a_1 + (216m - 430n + 215k)d$ или $2005 = a_1 + ld$,

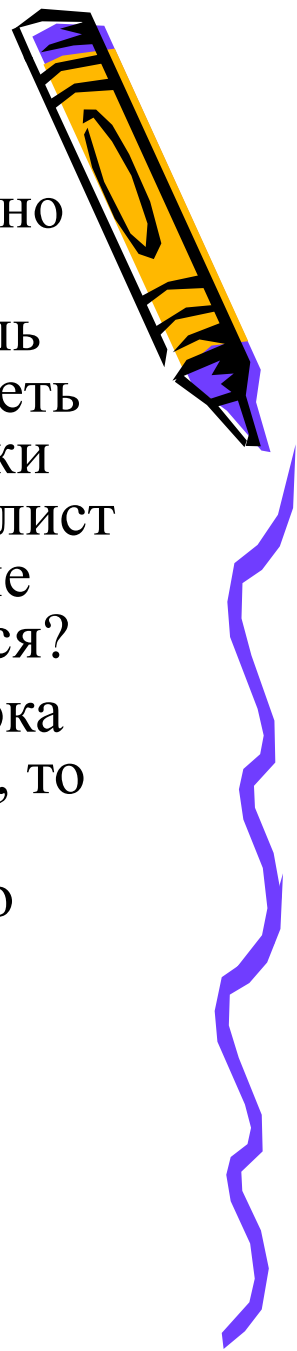
где $l > 0$.



Решение текстовых задач

- а) Мотоциклист и велосипедист выехали одновременно из пункта A в пункт B . Проехав треть пути, велосипедист остановился и тронулся дальше лишь тогда, когда мотоциклисту оставалось проехать треть пути до B . Мотоциклист, доехав до B , без остановки поехал обратно в A . Кто приедет раньше: мотоциклист в A или велосипедист в B , если велосипедист после первой остановки больше в пути не останавливался?

Решение. Так как велосипедист стоял, дожидаясь, пока мотоциклисту останется проехать треть пути до B , то на треть всего своего пути велосипедист затратил времени меньше, чем мотоциклист на треть своего ($\frac{2}{3}AB$ от $2AB$ составляют $\frac{1}{3}$). Значит, и на весь путь велосипедист затратит времени меньше.



б) Одну овцу лев съел за 2 дня, волк — за 3 дня, собака — за 6 дней. За сколько дней они вместе съедят овцу?

Решение.

1) Так как лев съел овцу за 2 дня, то за 1 день он съел $\frac{1}{2}$ овцы.

2) Так как волк съел овцу за 3 дня, то за 1 день он съел $\frac{1}{3}$ овцы.

3) Так как собака съела овцу за 6 дней, то за 1 день она съела $\frac{1}{6}$ овцы.

4) Вместе лев, волк и собака за 1 день съедят $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$, то есть 1 овцу.



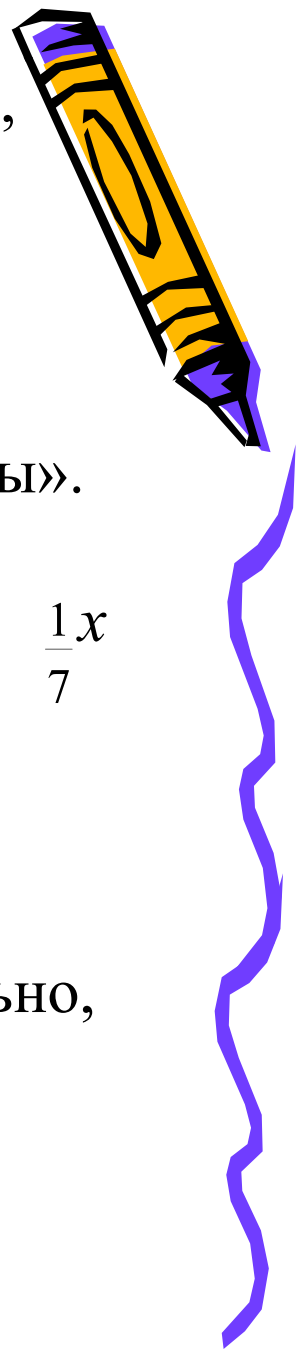
Старинная задача. «Скажи мне, знаменитый Пифагор, сколько учеников посещают твою школу и слушают твои беседы?

— Вот сколько, — ответил философ, — половина изучает математику, четверть — музыку, седьмая часть пребывает в молчании, и, кроме того, есть три женщины».

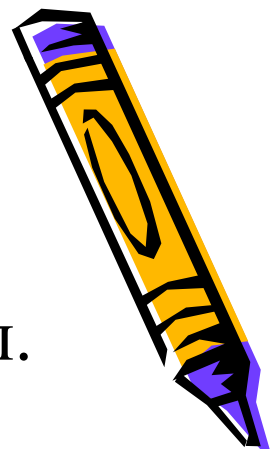
Решение. Обозначив число учеников Пифагора за x , получим, что $\frac{1}{2}x$ изучает математику, $\frac{1}{4}x$ — музыку, а $\frac{1}{7}x$ пребывает в молчании. Так как, кроме того, есть еще 3 женщины, то получаем уравнение:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{7}x + 3 = x$$

Решением данного уравнения будет $x = 28$. Следовательно, школу Пифагора посещают 28 учеников.



При изучении геометрических построений можно предложить задачи на построение углов заданной градусной меры через известный угол.



Например:

«Построить угол в 5° , если дан угол в 34° ».

Решение. Если отложить 5 раз угол, равный 34° , то получится угол, равный 170° . Так как разность развернутого угла и угла, равного 170° будет равна 10° , то разделим угол в 10° на 2 равных угла и получим угол в 5° .



Задача с использованием дополнительного построения

Рассмотрим такую задачу:

«Дан параллелограмм $ABCD$. K — середина стороны BC , M — середина стороны CD , $AK = 6$ см, $AM = 3$ см, $\angle KAM = 60^\circ$.
Найдите длину стороны AD . Ответ обоснуйте»



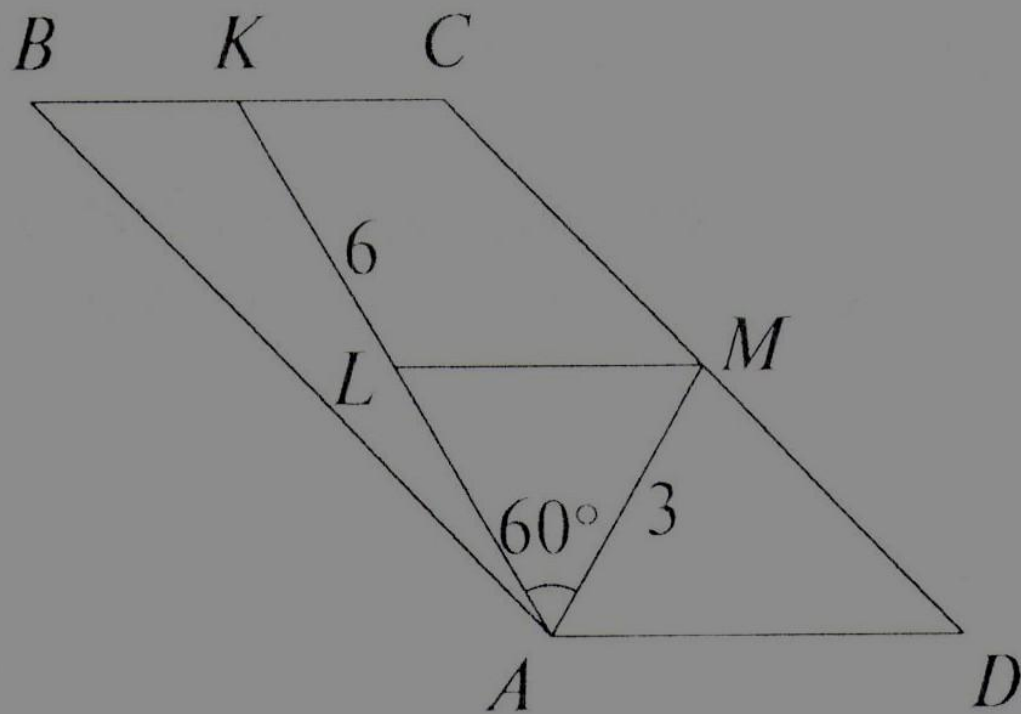
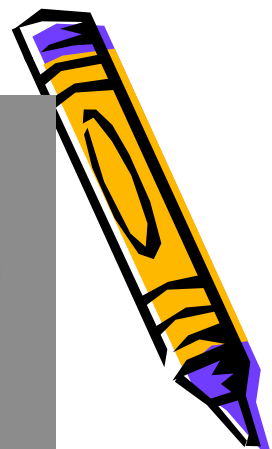


Рис. 1



Решение.

Задача имеет множество решений. Рассмотрим наиболее оригинальное. Проведем в трапеции $AKCD$ среднюю линию ML . Она будет параллельна AD и KC , причем $AL = 3$ см. Получается, что треугольник ALM – равнобедренный с углом при вершине 60° , поэтому он равносторонний, поэтому $LM = 3$ см. Обозначим $AD = 2x$, тогда $KC = x$. А тогда, используя свойство средней линии трапеции, имеем: $\frac{2x+x}{2} = 3$, откуда $x = 2$, а значит, $AD = 4$ см.

